



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1 (:-кратно; / - не кратно)

Пусть $a = k_1 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$ (где $k_1/2$ и $k_1/7$)
 $b = k_2 \cdot 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$ (где $k_2/2$ и $k_2/7$)
 $c = k_3 \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$ (где $k_3/2$ и $k_3/7$)

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z}$
 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0$
 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$

Тогда $ab = k_1 \cdot k_2 \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2}$
 $bc = k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{\beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\beta_2 + \gamma_2}$
 $ac = k_1 \cdot k_3 \cdot 2^{\alpha_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \gamma_2}$

Заметим, что т.к. 2 и 7 - простые числа,
 то: $k_1 \cdot k_2/2$ и $1/7$; $k_2 \cdot k_3/2$ и $1/7$;
 $k_1 \cdot k_3/2$ и $1/7$; $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3/2$ и $1/7$

Тогда из условия следует, что:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 & (11) \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 & (21) \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 & (12) \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 & (22) \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 & (13) \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 37 & (23) \end{cases}$$

$a \cdot b \cdot c = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}$

(*) Сложим: (11) + (12) + (13): $2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 51 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq \frac{51}{2} \geq 26$ (т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$); $(k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N})$

Приведем пример $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, при которых $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 26$ и условия (11), (12) и (13) выполняются: $\alpha_1 = 9, \beta_1 = 6, \gamma_1 = 11$.

(**) Сложим: (21) + (22) + (23): $2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 64 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{64}{2} = 32$.

Приведем пример $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, при которых $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 32$ и условия (21), (22) и (23) выполняются. Но из того, что $\beta_2 \geq 0$ и условие (23) следует, что $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \alpha_2 + \gamma_2 \geq 37$

Приведем пример $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, при которых $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 37$ и условия (21), (22) и (23) выполняются. $\alpha_2 = 20, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 17$.

Заметим, что т.к. k_1, k_2, k_3 никак не влияют на делимость, то $\min abc \Leftrightarrow 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}$ (при $k_1 = k_2 = k_3 = 1$).

Из (*) и (**) видно, что мин. $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 26$, а мин. $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 37$.
 $\Rightarrow$ мин. $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ ($a = 2^9 \cdot 7^{20}, b = 2^6 \cdot 7^0, c = 2^{11} \cdot 7^{17}$)

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$\frac{a}{b}$ - несократима, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$.

$$\text{Рассмотрим дробь } \frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a^2 + 2ab + b^2) - 8ab} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 8ab}.$$

Пусть $(a+b) = kt$. Тогда, во-первых $(a+b) \perp (\text{выражение в } c) k$, во-вторых

$(a+b)^2 = k^2 t^2 : t$. Так как если наша дробь сократима на t , то её чис-

литель и знаменатель оба кратны t . Но есть $(a+b)^2 - 8ab = k^2 t^2 - 8ab$ - кратно

t . Это возможно только если $8ab : t$. Пусть $8ab = l \cdot t$ ($8ab \perp l$).

$$\text{П.к. } (a+b) = kt, \text{ то } b = kt - a. \Rightarrow 8ab = 8 \cdot a \cdot (kt - a) = 8akt - 8a^2 = l \cdot t.$$

Это возможно только если $8a^2 : t$. Пусть $8a^2 = n \cdot t$ ($8a^2 \perp n$). Тогда

$$\text{посмотрим на дробь } \frac{8ab}{8a^2} = \frac{8 \cdot a \cdot b}{8 \cdot a \cdot a} = \frac{b}{a} = \frac{n \cdot t}{l \cdot t}.$$

При $t > 1$ получаем, что дробь $\frac{a}{b} = \frac{n \cdot t}{l \cdot t}$ сократима, что противоре-
чит условию.

При $t = 1$ получаем $\frac{a}{b} = \frac{n}{l}$. П.о. $t = 1$ - максимальное значение t .

~~Пример, когда $t = 1$ подходит, это, например, $a = 2, b = 3$. Но очевидно~~

Ответ: $t = 1$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

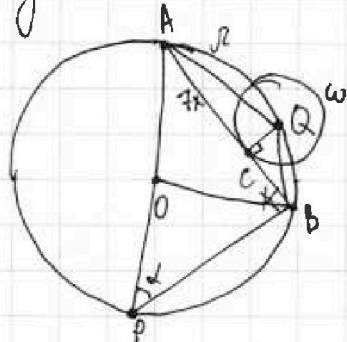
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Портал QR-кода недопустим!

Задача №3



Пусть $AC=7x$ и $CB=x$.
Продлим AO до пересек. с Ω в т. P .

$$\angle APB = \alpha. \quad \angle ABP = 90^\circ \text{ (AP-диам.)} \quad \text{По т. Пифагора: } PB = \sqrt{AP^2 - AB^2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{PB}{AP} = \frac{\sqrt{AP^2 - AB^2}}{AP} = \frac{\sqrt{100 - 64x^2}}{10} = \sqrt{\frac{100 - 64x^2}{100}}$$

$$\angle AQB = 180^\circ - \alpha \text{ (4-x-угольник APBQ - впис.)}$$

$$\Rightarrow \cos \angle AQB = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$\Rightarrow \text{По т. косинусов для } \triangle AQB: AB^2 = AQ^2 + BQ^2 + 2 \cdot AQ \cdot BQ \cdot \cos \alpha$$

Заметим, что по т. Пифагора из $\triangle AQC$ и $\triangle QCB$:

$$AQ = \sqrt{49x^2 + 1}; \quad BQ = \sqrt{x^2 + 1}.$$

$$\Rightarrow (8x)^2 = 49x^2 + 1 + x^2 + 1 + 2 \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{100 - 64x^2}{100}}$$

$$\Rightarrow 14x^2 - 2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)(100 - 64x^2)}{100}} \quad \text{— возведем обе части в квадрат}$$

$$(14x^2 - 2)^2 = 4 \cdot \frac{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)(100 - 64x^2)}{100}$$

$$25 \cdot (14x^2 - 2)^2 = (49x^2 + 1)(x^2 + 1)(100 - 64x^2)$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим:

$$3136x^4 - 3136x^2 = 0$$

$$x^2(3136x^2 - 3136) = 3136x^2(x^2 - 1) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ — не соотв. условию задачи} \\ x=1. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow AB = 7x + x = 8x = 8.$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + (4x^2 - 3x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = (4x^2 - 3x + 3) \quad (*)$$

$$4x^2 - 3x + 3 = 0$$

$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0$. Значит $(4x^2 - 3x + 3) > 0$ при любых x .

Но $-2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} \leq 0$ при любых x .

Значит у ур-я $(*)$ нет решений.

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x. \text{ Пусть } \sqrt{2x^2-5x+3} = a \ (a \geq 0) \text{ и } \sqrt{2x^2+2x+1} = b \ (b \geq 0). \text{ Тогда заменим, что } a^2 - b^2 = 2-7x.$$

$$\text{Т.е. } a-b = a^2 - b^2 \Rightarrow (a-b) = (a-b)(a+b)$$

$$1. \text{ ОДЗ: } a) \sqrt{2x^2-5x+3} \Rightarrow 2x^2-5x+3 \geq 0$$

$$\& \text{ (рассмотрим) } 2x^2-5x+3=0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{2} = 1,5. \text{ Методом интервалов:}$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [1,5; +\infty).$$

$$b) \sqrt{2x^2+2x+1}. \quad 2x^2+2x+1 \geq 0$$

$$\& 2x^2+2x+1=0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0$$

$$\Rightarrow 2x^2+2x+1 > 0 \text{ при любом } x.$$

$$2. (a-b) = (a-b)(a+b).$$

$$\text{Случай 1. } (a-b) = 0.$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 0. \Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}.$$

$$2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1.$$

$$5x+2x = 3-1=2$$

$$7x=2$$

$$x = \frac{2}{7}. \text{ — подходит под ОДЗ}$$

$$\text{Случай 2. } (a-b) \neq 0$$

$$(a-b) = (a-b)(a+b) \quad | : (a-b)$$

$$1 = a+b$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1. \text{ Возведем обе части в квадрат:}$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!

Задача №6

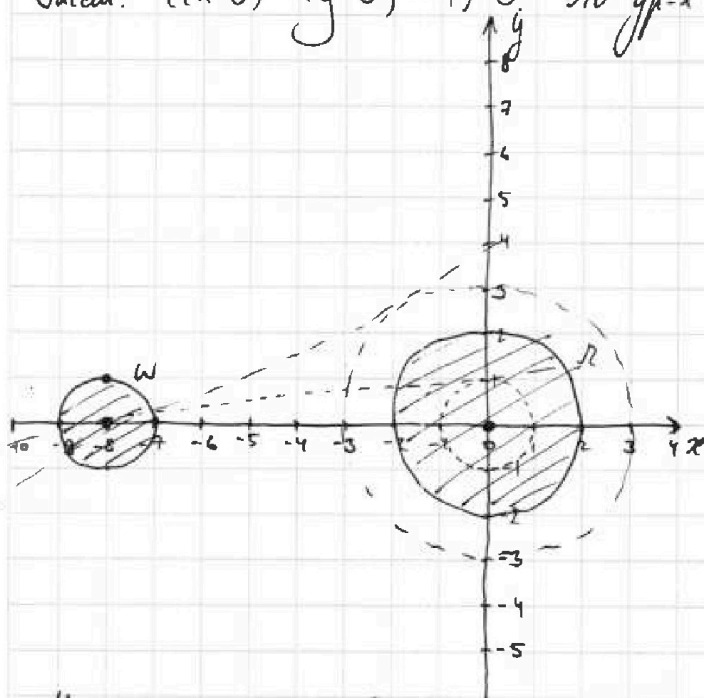
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (*) \end{cases}$$

Рассм. $((x+8)^2 + (y-0)^2 - 1) = 0$. Это ур-е окр. с центром $(-8; 0)$ и радиусом 1.

Рассм. $((x-0)^2 + (y-0)^2 - 4) = 0$. Это ур-е окр. с центром $(0; 0)$ и радиусом 2.

Области внутри и границы окружностей соответствуют неравенству (*).

Есть всего 4 прямые, которые пересекут заштрихованную область 2-раза. Это касательные к этим 2-м окружностям.



Надо найти их уравнение.

1. Внешние касательные. Мысленно уменьшим радиусы окруж. на 1.

(окруж. W станет точкой). Найдём ур-е касат. из этой точки к новой

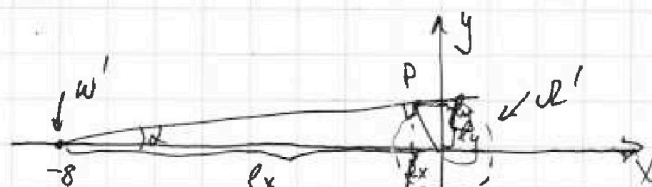
окруж. R. Длина этой касат. l из т. Пифагора:

$$l = \sqrt{(8)^2 + (1)^2} = \sqrt{65}. \quad \sin \alpha = \frac{OP}{AP} = \frac{1}{8}. \Rightarrow l_y = l \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{65}}{8}. \quad l_x = \frac{63}{8}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Внешнее касат. Мысленно уменьшим радиусы окруж. на 1.



Длина этой касат. l из г. Пифагора.

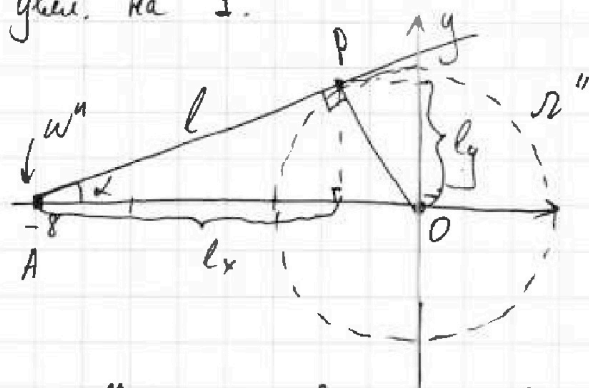
$$l = \sqrt{63}, \sin \alpha = \frac{1}{8} = \frac{OP}{AP}$$

$$\Rightarrow l_y = l \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}, l_x = \frac{63}{8}$$

Найдем ур-е:
$$\begin{cases} 0 = -8a + 10b \\ (-8 + \frac{63}{8})a + 10b = \frac{\sqrt{63}}{8} \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{63}/63$$

Аналогично: $a = -\sqrt{63}/63$ (реальное касат. найдем паралл. переносом на ± 1 вдоль Oy)

2. Внутр. касат. Мысленно уменьшим радиус w на 1, а рад. R увелич. на 1.



$$l = \sqrt{64 - 9} = \sqrt{45}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{8} = \frac{OP}{AP}$$

$$\Rightarrow l_y = l \cdot \sin \alpha = \frac{3\sqrt{45}}{8}; l_x = \frac{45}{8}$$

$\Rightarrow$ Найдем a :
$$\begin{cases} 0 = -8a + 10b \\ (-8 + \frac{45}{8})a + 10b = \frac{3\sqrt{45}}{8} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{45}}{45}$$

Аналогично: $a = -\frac{3\sqrt{45}}{45}$ (реальное касат. найдем паралл. переносом на ± 2 вдоль Oy).

Ответ: $\pm \frac{\sqrt{63}}{63}; \pm \frac{3\sqrt{45}}{45}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

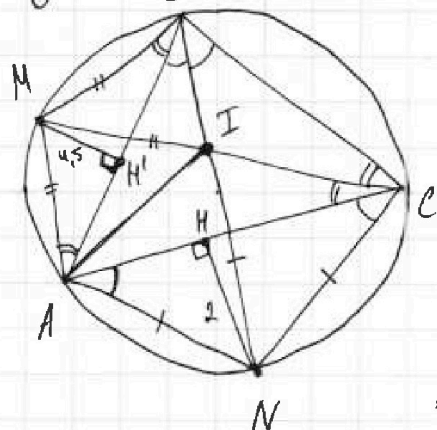
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7



AI-?

I - центр. впис. окр., I - т. пересеч.

BN и CM (бисек. $\angle B$ и $\angle C$)

По лемме о треугольнике $AM=MB=MI$,
 $AN=NC=NI$.

$\angle ABN = \angle ACN$ (впис., оп-ся на $\widehat{AN}$)
 $\Rightarrow \angle NAC = \angle ACN = \angle ABN$

$\angle MBA = \angle MCA$ (впис., оп-ся на $\widehat{AM}$)

$\Rightarrow \angle MBA = \angle MAB = \angle MCA$

Потому MH' - выс. в равнобед. $\triangle AMB$. $\Rightarrow MH'$ - медиана $\Rightarrow AH' = H'B$.

NH - выс. в равнобед. $\triangle ANC$. $\Rightarrow NH$ - медиана $\Rightarrow AH = HC$.

$\Rightarrow HH'$ - ср. линия

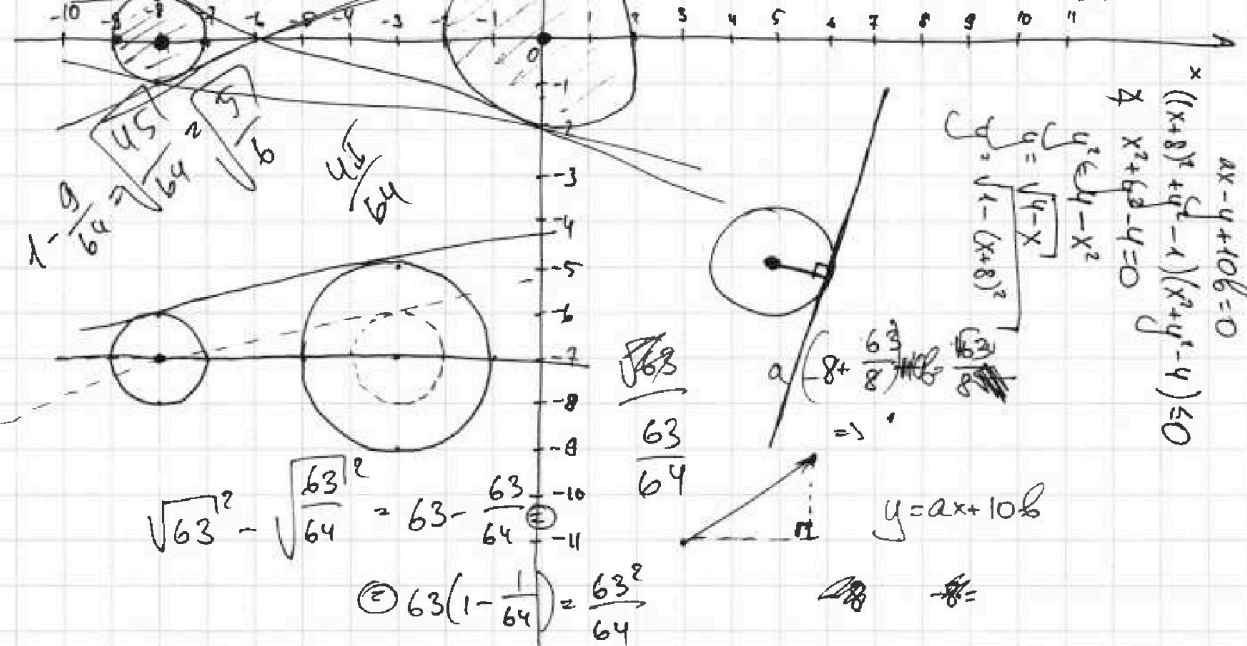
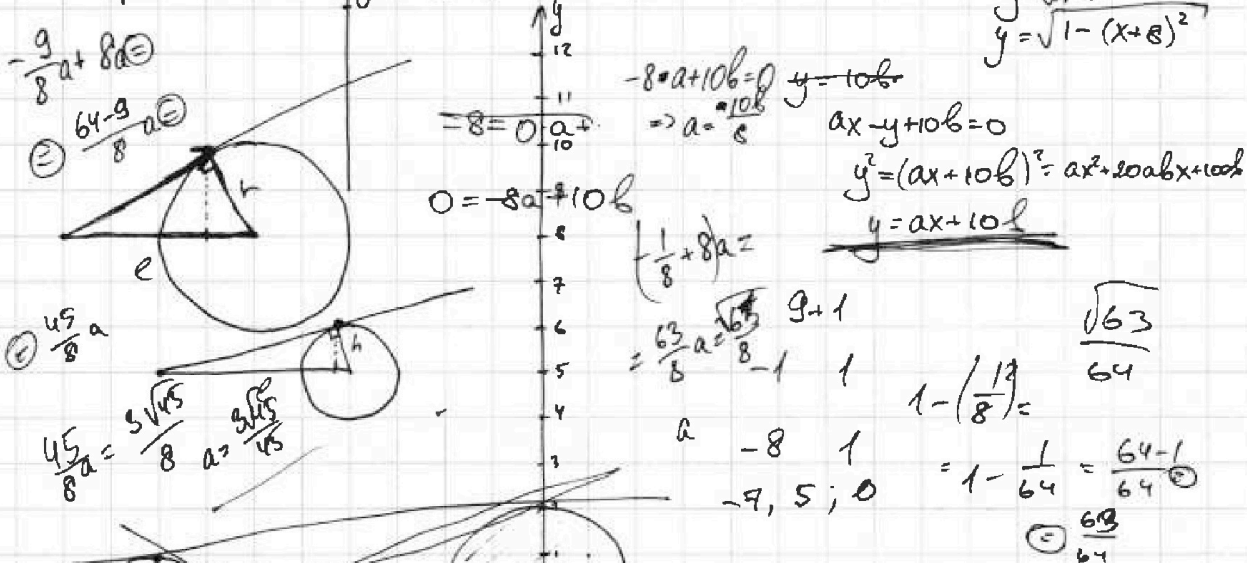
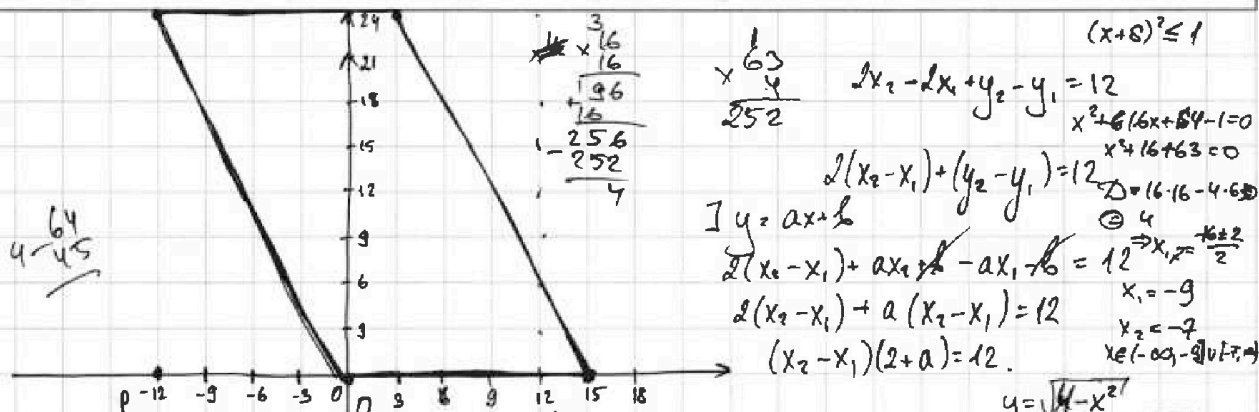
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода непустима!



$$0 > (h_1 - h_2 x)(89 + x9 + 2h_2 x)$$

$$h_19 + x9 + 2h_2 x = 2(8 + x)$$

$$0 > (h_1 - h_2 x)(1 - h_2 + 2(8 + x))$$

$$0 = 90 + 4 - x9$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y^2 - (x+8)^2 + 1 = 1 - x^2 - 16x - 64 = -x^2 - 16x - 63$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$x_0 = \frac{-16}{-2} = -8$$

$$y^2 =$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2$$

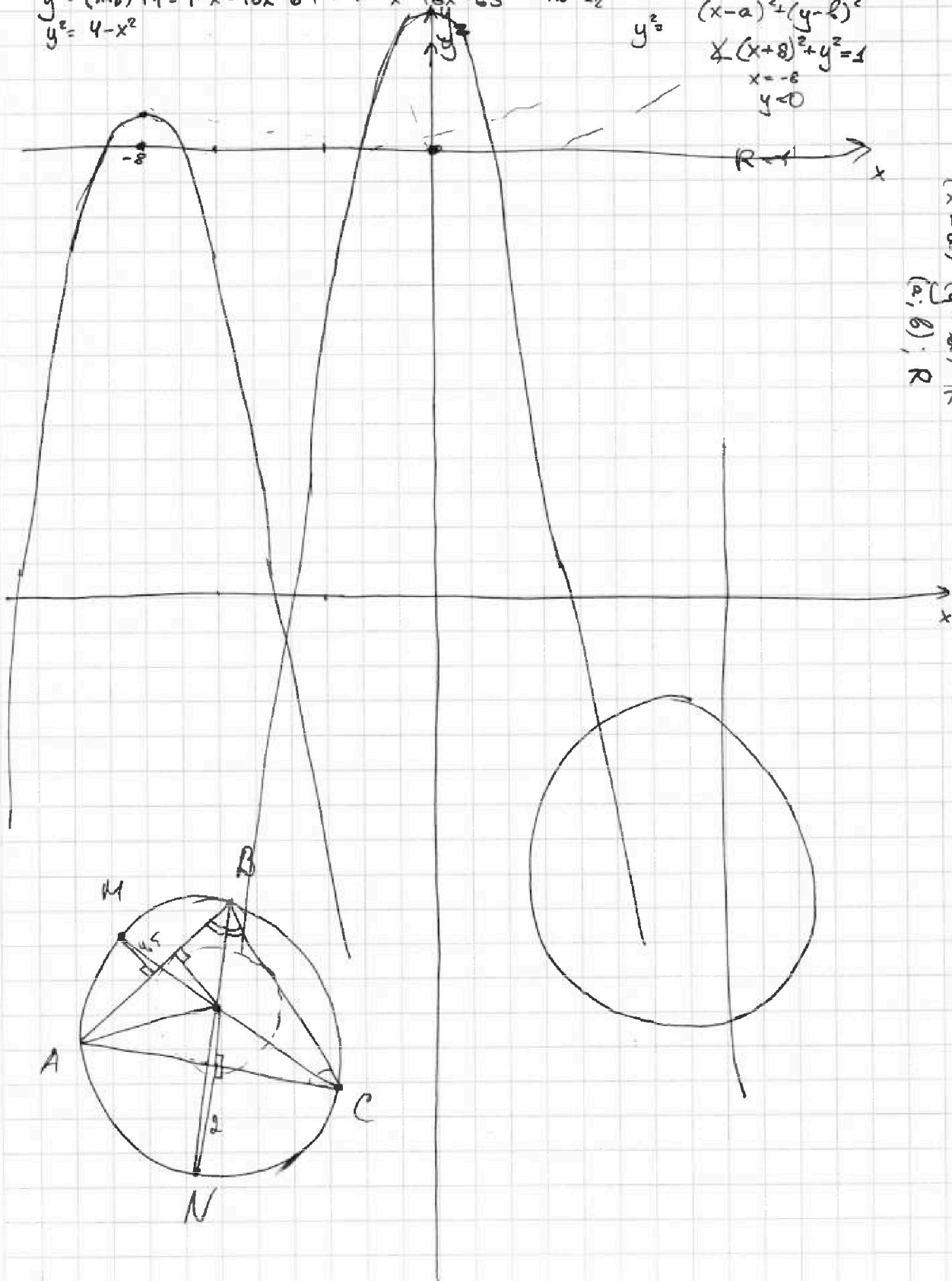
$$x(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$x = -8$$

$$y = 0$$

$$(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) = R^2$$

$$(a, b), R$$





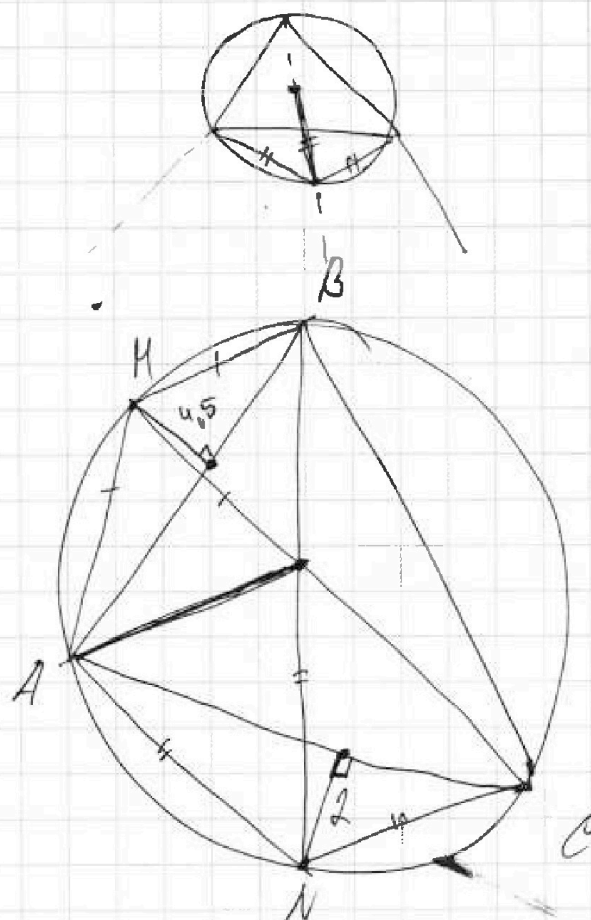
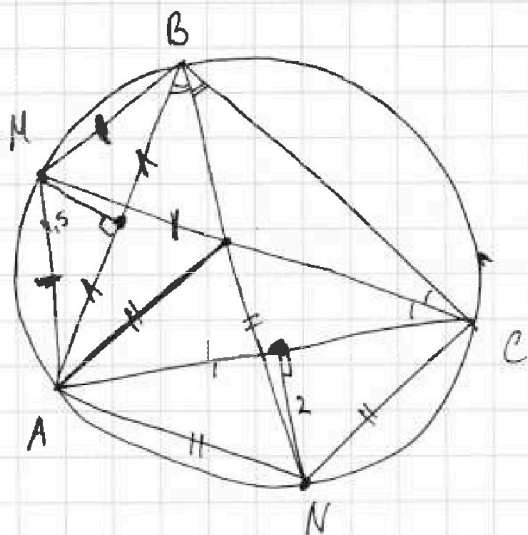
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





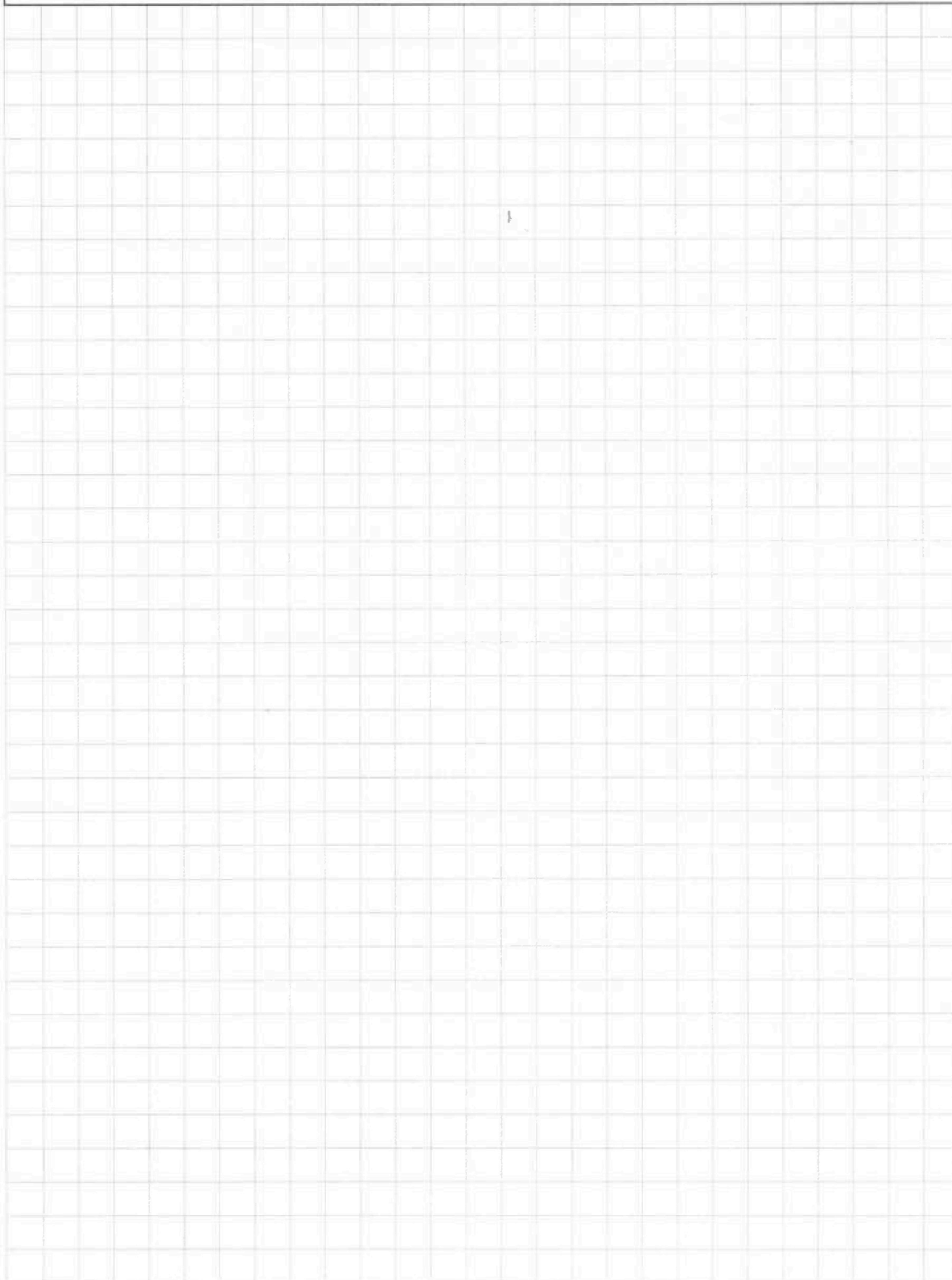
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Нормы QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1	2	3	4	5	6	7
✓	✓	✓	✓			

$$\begin{array}{r} 13 \\ - \frac{36}{23} \\ \hline 5 \\ - 23 \\ \hline \end{array}$$

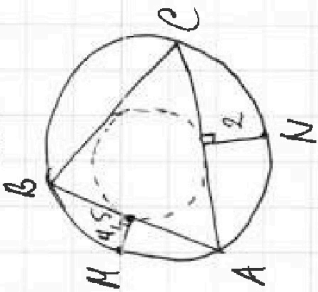
$$4 - 6 \cdot 6 + 9 = 13 - 36$$

$$4 + 9 = 13$$

$$\frac{8a^2}{8ab} = \frac{a}{b} = \frac{fm}{8m} = \frac{f}{8}$$

$$\frac{5}{7}$$

$$25 + 49 =$$



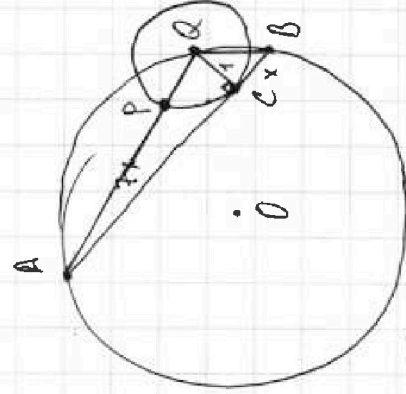
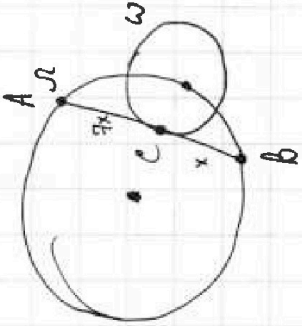
$$AQ = \sqrt{49x^2 + 1} = \sqrt{49x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow AP = AQ - 1$$

$$\Rightarrow AP^2 = 7x^2 = (AQ + 1) \cdot (AQ - 1) = (AQ^2 - 1)$$

$$\begin{array}{r} 14.15 \\ - 11.35 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13.75 \\ - 11.35 \\ \hline 2.40 \end{array}$$



$$QB = \sqrt{1 + x^2}$$

$$(a-b)^2(a-b)^2 = (a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2-2ab) = a^4+a^2b^2-2a^2b^2-2ab^2+b^4 = a^4+b^4-2a^2b^2 = (a^2-b^2)^2$$

$$a+b = km \Rightarrow (a+b) \perp k$$

$$\Rightarrow l = km - a$$

$$8ab = 8 \cdot a \cdot (km - a) = 8akm - 8a^2 = l \cdot m \quad (l \perp 8ab)$$

$$\Rightarrow 8a^2 : m \quad 8ab : m \Rightarrow 8a^2 = fm \Rightarrow \frac{8a^2}{8ab} = \frac{a}{b} = \frac{fm}{8m} = \frac{f}{8}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 8ab}{(a+b)} = \frac{(a^2+2ab+b^2)-8ab}{(a+b)} = \frac{a^2-6ab+b^2}{(a+b)}$$

$$(a-b)^2 - 4ab = km$$

$$a+b = km \Rightarrow m = \frac{a+b}{k}$$

$$\frac{a^2-6ab+b^2}{(a+b)} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{(a+b)}$$

32

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab \equiv 0 \pmod{2^{14} \cdot 7^{10}}$$

$$bc \equiv 0 \pmod{2^{17} \cdot 7^{17}}$$

$$ac \equiv 0 \pmod{2^{20} \cdot 7^{37}}$$

$$2^{51} = 2 \cdot 2^{50}$$

$$\min abc = ? \quad \sqrt{2^{50}} = 2^{25}$$

$$\frac{2^4}{51} \quad \frac{2^4}{51} \quad \frac{10}{17} \quad \frac{37}{64}$$

$$ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 2^3 \cdot 7^{10} \cdot 7^7$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} = k_3 \cdot 2^{14} \cdot 2^6 \cdot 7^{10} \cdot 7^{27}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = (abc)^2 = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$\Rightarrow x^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$x = \sqrt{k_1} \cdot 2^{25} \cdot \sqrt{7} \cdot 7^{32}$$

$$\Rightarrow \sqrt{k} = n\sqrt{2} \Rightarrow x = n\sqrt{2} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32} = \sqrt{2} \cdot 2^{26} \cdot 7^{32} \cdot n$$

$$\Rightarrow \text{при } n=1, k_1=1, k_2=2, k_3=1$$

$$p_1 \geq 3$$

$$A=6$$

$$B=9$$

$$C=11$$

$$\frac{10}{17} + \frac{37}{64}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \quad (1)$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \quad (2)$$

$$\beta_1 + \delta_1 \geq 17 \quad (3)$$

$$\beta_2 + \delta_2 \geq 17 \quad (4)$$

$$\alpha_1 + \delta_1 \geq 20 \quad (5)$$

$$\alpha_2 + \delta_2 \geq 37 \quad (6)$$

$$4x^2 - 3x + 4$$

$$\frac{1}{2} \cdot 8x = 4x$$

$$\frac{10}{17} + \frac{37}{64}$$

$$\frac{14}{31} + \frac{17}{31}$$

$$\frac{31}{20} + \frac{37}{64}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 \geq 26$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 37$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 37$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 37$$

$$3a = \alpha \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$$

$$b = \beta \cdot 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$c = \gamma \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$$

$$\Rightarrow ab = \alpha \beta \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2}$$

$$bc = \beta \gamma \cdot 2^{\beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\beta_2 + \gamma_2}$$

$$ac = \alpha \gamma \cdot 2^{\alpha_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \gamma_2}$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c \cdot a \cdot c = x^2 = 2^{k_1 + p_1 + \delta_1} \cdot 7^{k_2 + p_2 + \delta_2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \cdot 2^{(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1)} \cdot 7^{(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2)}$$

$$(1) + (2) + (3) \cdot 2 \cdot (\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq 51$$

$$\frac{(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1)}{2} \geq \frac{51}{2} > 25$$

$$(2) + (4) + (6) \cdot 2 \cdot (\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) \geq 64$$

$$\frac{(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2)}{2} \geq \frac{32}{2} = 16$$

$$\Rightarrow x = \alpha \beta \gamma \cdot 2^{(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1)} \cdot 7^{(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2)}$$

$$\text{Ответ: } x = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$\frac{20}{17} + \frac{37}{64}$$

$$\frac{37}{64} + \frac{10}{17}$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 10$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 10$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 37$$

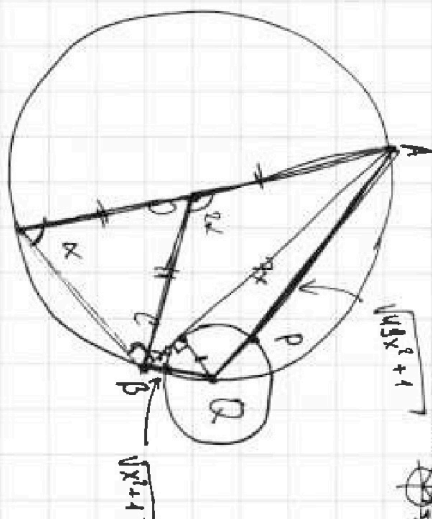
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{49x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \text{in } \cos: AB^2 = (8x)^2 = 64x^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos 2\alpha \quad \textcircled{3}$$

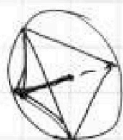
$$\angle AQB = 180^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \angle AQB = -\cos 2\alpha = \frac{8}{v} = \frac{8}{\sqrt{49x^2 + 1} - v} \Rightarrow v = \frac{8}{\sqrt{49x^2 + 1} - v}$$

$$\Rightarrow AB^2 = AO^2 + OB^2 + 2 \cdot AO \cdot OB \cdot \cos \alpha \Rightarrow 64x^2 = 49x^2 + 1 + x^2 + 1 + 2 \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cdot \cos \alpha - 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} = \frac{\frac{8}{\sqrt{49x^2 + 1} - v} + 1}{2}$$

$$\cos 2\alpha / 1 = \frac{100 - 64x^2}{100} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{100 - 64x^2}{100} \Rightarrow \frac{8}{\sqrt{49x^2 + 1} - v} = \frac{100 - 64x^2}{100}$$



$$\sqrt{63} \cdot \frac{8}{v} = 901 + v \cdot \left(\frac{8}{59} + 8 \right)$$

$$\frac{8}{\sqrt{63}} = 901 + v \cdot \frac{8}{59}$$

$$0 = 901 + v \cdot 8 - \frac{8}{\sqrt{63}}$$

$$\frac{100 - 64x^2}{100} = \frac{\sqrt{100 - 64x^2}}{100} \Rightarrow \sqrt{100 - 64x^2} = 100 - 64x^2$$

$$14x^2 - 2 = 2 \cdot \sqrt{100 - 64x^2}$$

$$(14x^2 - 2)^2 = 4 \cdot (100 - 64x^2) \Rightarrow 196x^4 - 56x^2 + 4 = 400 - 256x^2$$

$$25(14x^2 - 2)^2 = (49x^2 + 1)(x^2 + 1)(100 - 64x^2)$$

$$25 \cdot (18x^4 - 56x^2 + 4) = (49x^4 + 50x^2 + 1)(100 - 64x^2)$$

$$4900x^4 - 1400x^2 + 100 = 4900x^4 - 3136x^2 + 5000x^2 - 6400x^2 + 100 - 64x^2$$

$$3136x^2 - 3136x^2 = 0$$

$$x^2(3136x^2 - 3136) = 0$$

$$3136(x^4 - 1) = 0 \Rightarrow \sqrt{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)} \cdot 0.8x = 8x$$

$$x^4 = 1$$

$$x = 1$$

$$\sqrt{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)} = 10$$

$$\frac{8}{9.8} = \frac{8 \cdot 10}{8} = 10$$

$$\frac{1864 - 5000}{3136} = \frac{8}{9.8}$$

$$\frac{1600}{3200} = \frac{8}{9.8}$$

$$5.7 \pm 5.8$$

$$\frac{196}{3136}$$

$$\frac{1800}{1800}$$

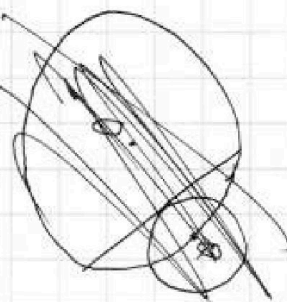
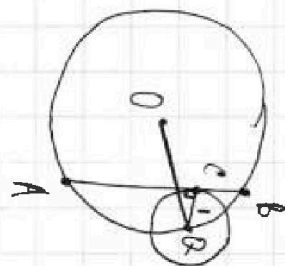
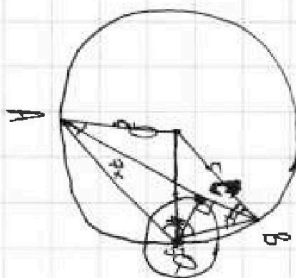
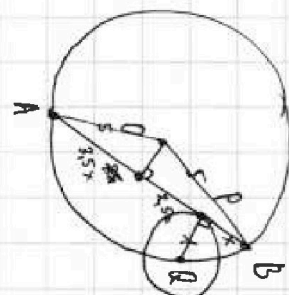
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\begin{aligned}
 2x^2 - 5x + 3 &\geq 0 \\
 2x^2 - 5x + 3 &= 0 \\
 D &= 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = \\
 &= 25 - 24 = 1 \\
 \Rightarrow x_1, x_2 &= \frac{5 \pm 1}{4} \\
 x_1 &= 1, x_2 = \frac{3}{2} = 1.5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 - 7x &= 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 \\
 \Leftrightarrow 2 - 7x &= 2x^2 - 7x + 2 \\
 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 2 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 2x + 1 &\geq 0 \\
 2x^2 + 2x + 1 &= 0 \\
 D &= 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0 \\
 \Rightarrow x &\in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} &= 2 - 7x \\
 \sqrt{2x^2 - 5x + 3} &= \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2 - 7x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D03: 4x^2 - 3x + 3 &\geq 0 \\
 D &= 9 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -43 \\
 \Rightarrow x &\in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$(a-b)(a+b) = (a-b)(a+b)$$

$$1. a-b=0$$

$$1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$D03:$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} &= 1 \\
 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} &= 0 \\
 4x^2 - 3x + 3 &= -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}
 \end{aligned}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$-5x - 2x = 1 - 3$$

$$-7x = -2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$64 - 9 = 45$$

