



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$abc : ac \Rightarrow abc : 7^{39} \Rightarrow$ минимальная
степень ~~2~~ 7 которая содержится в abc 39

$$abc^2 : (ab \cdot bc \cdot ca) \Rightarrow (abc)^2 : 2^{15+17+23} = 2^{55} \Rightarrow$$

$$abc : 2^{28}$$

$$abc : 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

При

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^5 \cdot 7^{18}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$$

$$abc = 2^{10+5+13} \cdot 7^{11+18} = 2^{28} \cdot 7^{39} \quad abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow$$

минимальное значение $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: минимальное значение abc
 $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

Пусть исходную дробь можно сократить на m , тогда:

$$\begin{aligned} a+b &: m & (1) \\ a^2-7ab+b^2 &: m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2+2ab+b^2) - 9ab &: m \\ (a+b)^2 - 9ab &: m \end{aligned}$$

$$\text{Из условия (1) } (a+b)^2 : m \Rightarrow 9ab : m$$

$$a+b : m \Rightarrow 9a^2+9ab : m$$

$$9a^2+9ab : m \text{ и } 9ab : m \Rightarrow 9a^2 : m$$

Аналогично:

$$9b^2+9ab : m \quad 9b^2 : m$$

$$9a^2 : m$$

$$9b^2 : m$$

Пусть $m = p \cdot q$, где $p \in \mathbb{N}$ и p - простое или 1

$$9b^2 : m \Rightarrow 9b^2 : p \text{ по усл. выбора } p \nmid 9$$

$$\Rightarrow b^2 : p \Rightarrow b : p \text{ (т.к. } p \text{ - простое или } p=1)$$

$$\Rightarrow a : p \text{ и } b : p \text{ но дробь } \frac{a}{b} \text{ несократима} \Rightarrow$$

$$p=1$$

Это верно для любого простого входящего в разложение $m \Rightarrow \text{НОД}(a, m) = 1$

$$= \text{НОД}(b, m) = 1, \text{ а значит } 9 : m \Rightarrow m \leq 9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для $a=4$ $b=5$

$$\frac{4+5}{4^2 - 7 \cdot 4 \cdot 5 + 5^2} = \frac{9}{25+16-140} = \frac{9}{-99} - \text{дробь сокращается на } 9$$

III. к $m \leq 9$ $m=9$ - максимальное

Ответ: наибольшее значение $m=9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$t = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \quad d = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Тогда:

$$1 - 9x = t^2 - d^2 = 3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = 1 - 9x$$

$$t - d = t^2 - d^2$$

$$(t - d)(t + d) - (t - d) = 0$$

$$(t - d)(t + d - 1) = 0$$

$$\begin{cases} t - d = 0 \\ t + d - 1 = 0 \end{cases}$$

$$t - d = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$(3x^2 - 6x + 2) = (3x^2 + 3x + 1)$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$t + d - 1 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 144 + 1104 = 1248$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \\ x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{1}{9}, x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}, x_3 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

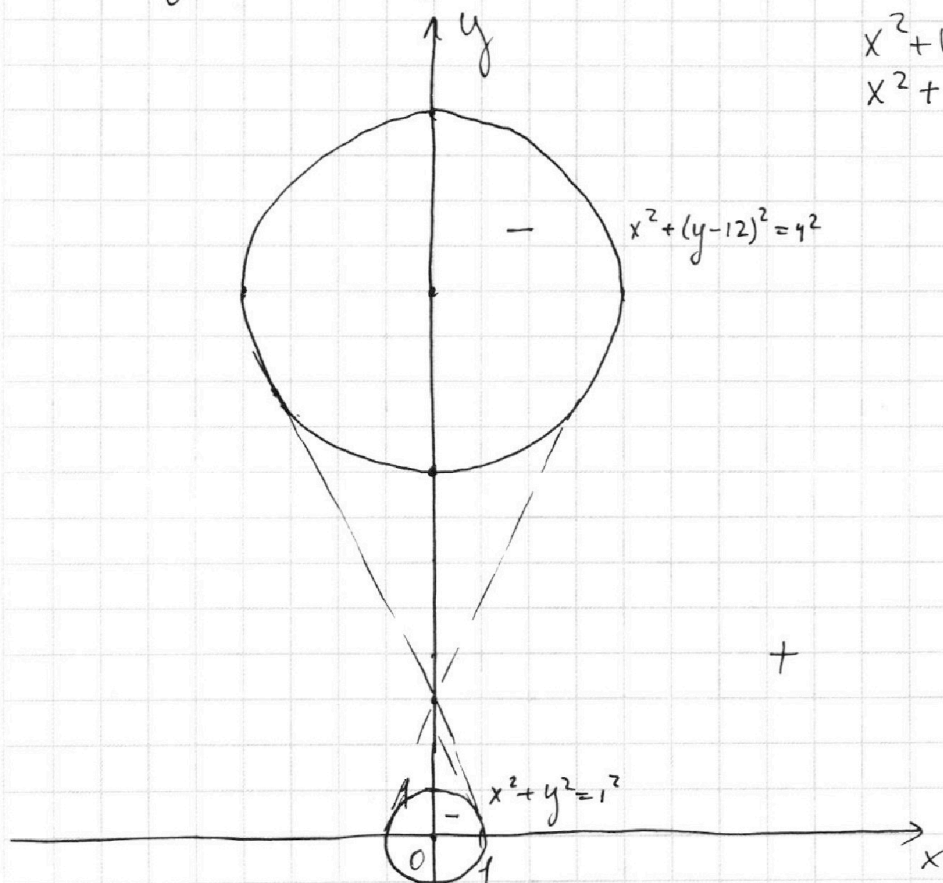
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1^2 \\ x^2+(y-12)^2 &= 4^2 \end{aligned}$$



Чтобы второе выражение принимало значения ~~меньше~~ ≤ 0 точка с координатами $(x; y)$ должна находиться внутри или ~~на~~ ~~среде~~ одной из окружностей или на ней (т.к. вне окружности ~~выражение~~ которое задаёт её больше 0.)

$ax+y-8b=0$ - задаёт прямую
Если прямая пересекает окружность в двух точках, то внутри будет отрезок каждой точки которого будет являться решением $\Rightarrow$ решений будет бесконечно много

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

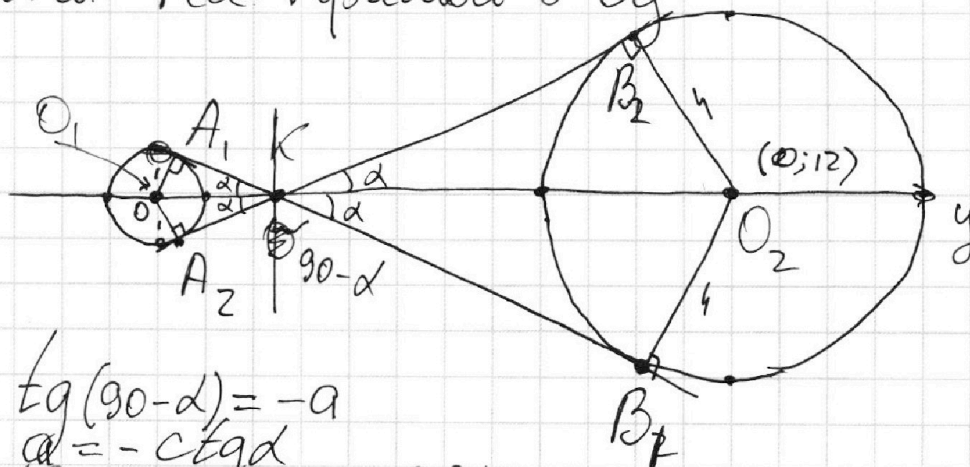
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Значит прямая может иметь с окружностью ~~только~~ только одну общую точку (или 0). А так как необходимо чтобы система имела два решения, прямая должна иметь по одной общей точке с ~~каждой~~ каждой из окружностей. Если прямая с окружностью имеют общую точку, то прямая касается окружности. Значит прямые удовлетворяющие ~~условию~~ условию это ~~касательные~~ касательные к окружностям.

$$y = 86 - ax$$

/// к окружности симметричны относи-
тельно прямой Oy , касательные пересека-
ются на прямой $O'Oy$



$$\operatorname{tg}(90-\alpha) = -a$$

$$a = -\operatorname{ctg} \alpha$$

(Для прямой A_1B_1)

Для прямой A_2B_2)

$$a = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\frac{O_1K}{O_2K} = \frac{O_1A_1}{O_2B_1} \quad (\text{следствие из подобия } \triangle O_1A_1K \text{ и } \triangle O_2B_1K)$$

$$\frac{O_1K}{O_2K} = \frac{1}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{KO_1}{KO_2} = \frac{O_1A_1}{O_2B_1} = \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{KO_1}{KO_2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{KO_2 - KO_1}{KO_2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{O_1O_2}{KO_2} = \frac{3}{4}$$

$$KO_2 = \frac{4 \cdot 12}{3} = 16$$

$$KO_2 = 16$$

$$KO_1 = 4$$

$$A_1K = \sqrt{KO_1^2 - O_1A_1^2}$$

$$A_1K = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{A_1K}{O_1A_1}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{1} = \sqrt{15}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{15} \\ a = -\sqrt{15} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{2}{5}\sqrt{21}$$

$$a = \sqrt{15}$$

$$a = \frac{2}{5}\sqrt{21}$$

$$a = -\sqrt{15}$$

Аналогично т.к картин-
ка симметрична отн.
Оу: $\begin{cases} a = \operatorname{ctg} \alpha \\ a = -\operatorname{ctg} \alpha \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

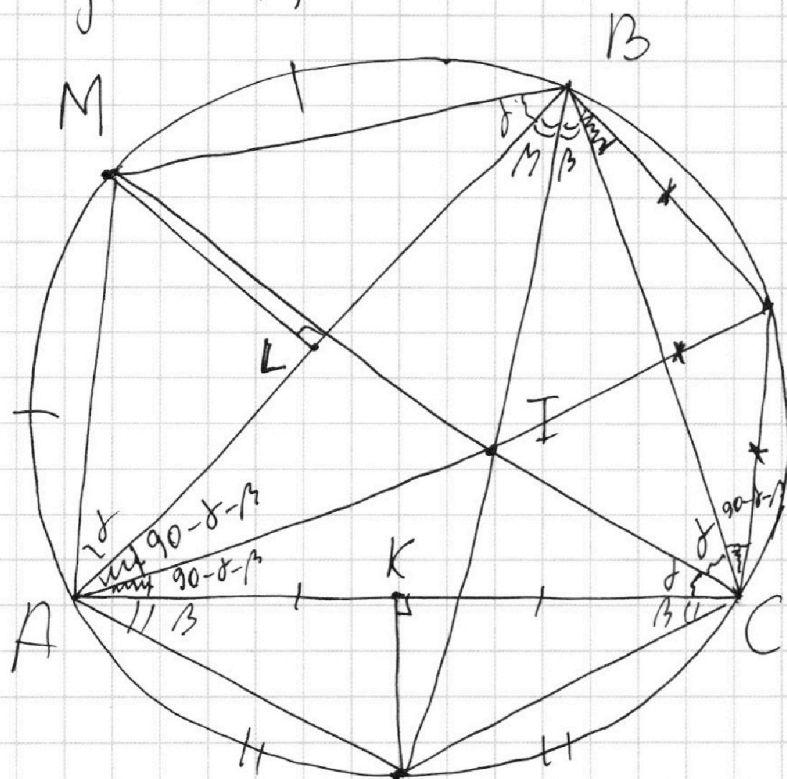
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7



Дано: $KN = 2,5$
 $ML = 5$

P-точка пересечения AI и окруж

I - точка пересечения биссектрис (центр вписанной)
M. K. M. является серединой дуги AB - она лежит на прямой содержащей биссектрису из C
Аналогично $N \in BI$

$$\angle ABT = \angle IBC = \beta$$

$$\angle ACI = \angle ICB = \delta$$

$$ANCB - \text{вписан. четырёхугол} \Rightarrow \angle ACN = \angle CAN = \beta$$

$$AMBC - \text{вписан. четырёхугол} \Rightarrow \angle MBA = \angle MAB = \delta$$

$$AB = 2 \cdot 5 \cdot \operatorname{ctg} \delta = 10 \operatorname{ctg} \delta$$

$$AC = 2 \cdot 2,5 \cdot \operatorname{ctg} \beta = 5 \operatorname{ctg} \beta$$

$$BC = 10 \operatorname{ctg} \delta \cdot \cos 2\beta + 5 \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos 2\delta$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



По лемме о ~~П~~результате

$$PI = PB = PC$$

$$\angle PBC = \angle PCB = 90^\circ - \beta - \gamma$$

$$PC = PB = \frac{BC}{2 \cdot \cos(90^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{BC}{2 \sin(\beta + \gamma)} = PI$$

По теореме синусов

$$\frac{BC}{\sin(\angle ACP)} = \frac{AP}{\sin(90^\circ - \gamma - \beta)}$$

$$AP = \frac{PC \cdot \sin(90^\circ - \gamma - \beta)}{\sin(90^\circ - \gamma - \beta)} =$$

$$AI = AP - PI$$

$$PI = \frac{10 \operatorname{ctg} \gamma \cdot \cos 2\beta + 5 \operatorname{ctg} \beta \cos 2\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)} = PC$$

$$PI = \frac{10 \operatorname{ctg} \gamma \cos 2\beta + 5 \operatorname{ctg} \beta \cos 2\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)} \cdot \left(\frac{\sin(90^\circ - \gamma - \beta)}{\sin(90^\circ - \gamma - \beta)} - 1 \right) =$$

$$= \frac{(10 \operatorname{ctg} \gamma \cos 2\beta + 5 \operatorname{ctg} \beta \cos 2\gamma) (\cos(\beta - \gamma) - \cos(\gamma + \beta))}{2 \sin(\beta + \gamma) \cos(\gamma - \beta)} =$$

$$= \frac{(10 \operatorname{ctg} \gamma (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) + 5 \operatorname{ctg} \beta (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)) \cdot (\cos(\beta - \gamma) - \cos(\gamma + \beta))}{\sin(2\beta - 2\gamma)}$$



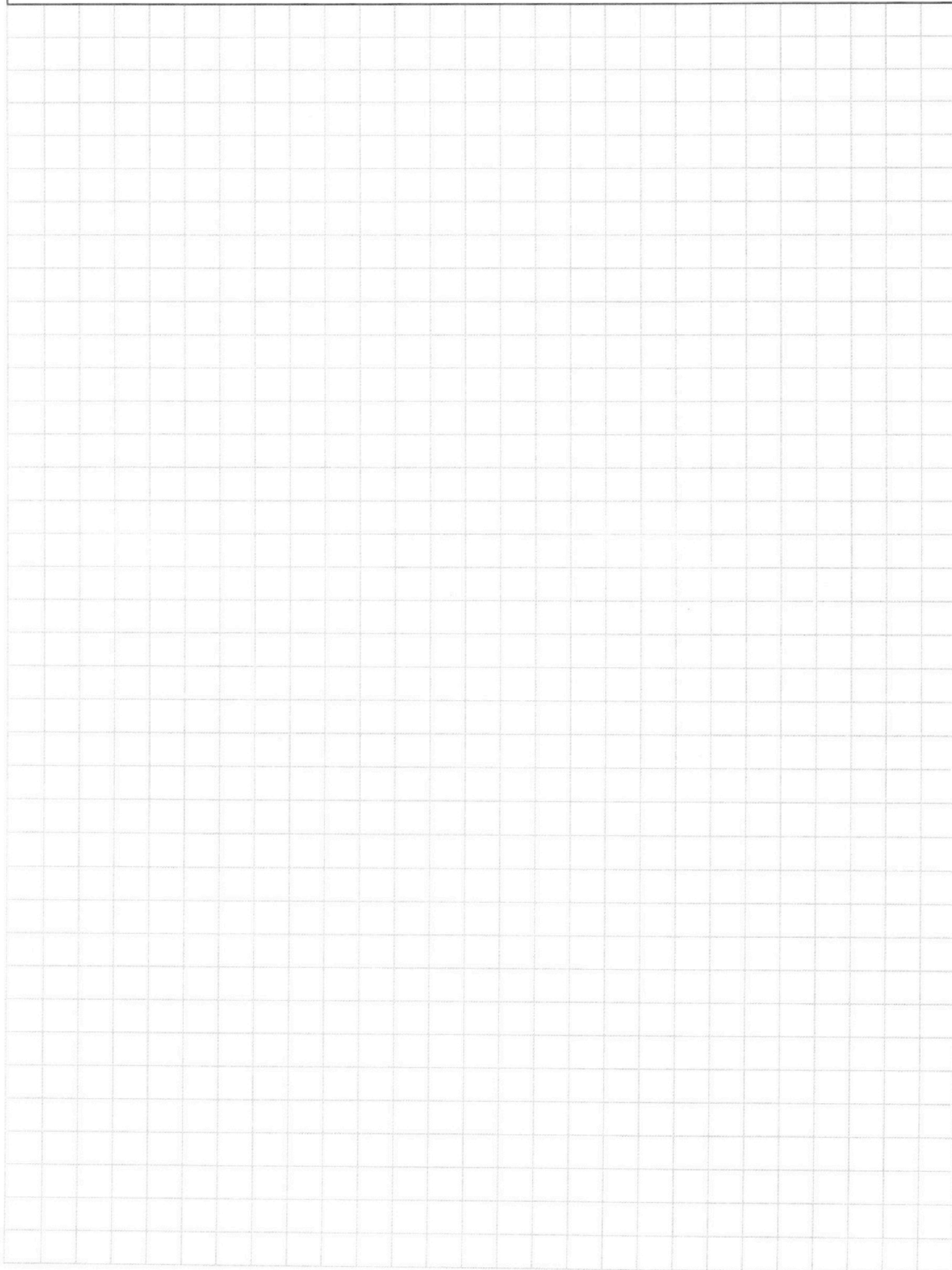
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$t = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$d = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$t - d = t^2 - d^2$$

$$(t-d)(t+d) = (t-d)$$

$$(t-d)(t+d-1) = 0$$

$$-\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1$$

$$\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{1}{27} + \frac{4}{3} = \frac{37}{27}$$

$$\frac{1}{27} +$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$144 + 4 \cdot 4 \cdot 69$$

$$6^2 = 36$$

$$36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

$$2\sqrt{3}$$

$$16 \cdot 3$$

$$69 \cdot 3 =$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 1 + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$9x - 2 = -2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$\frac{81}{4}x^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\textcircled{2}$$

$$3 + \frac{1}{2} - \frac{3}{13} - 6 + \frac{6}{13}$$

$$4$$

$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 414 \\ 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\frac{312}{4}$$

$$78 = 3 \cdot 26$$

$$16$$

$$4\sqrt{78}$$

$$\frac{6+9}{69} = \frac{5}{23}$$



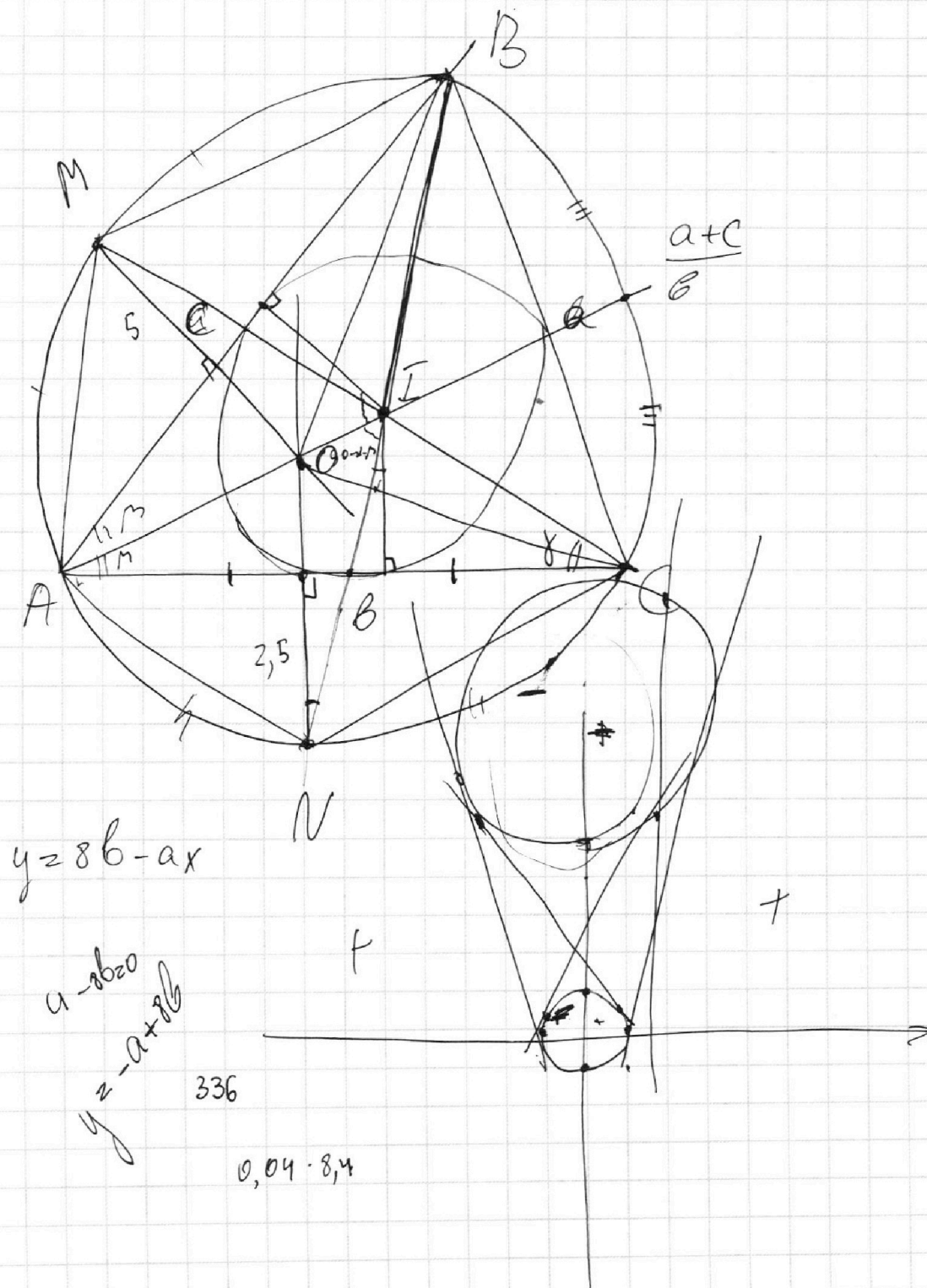
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



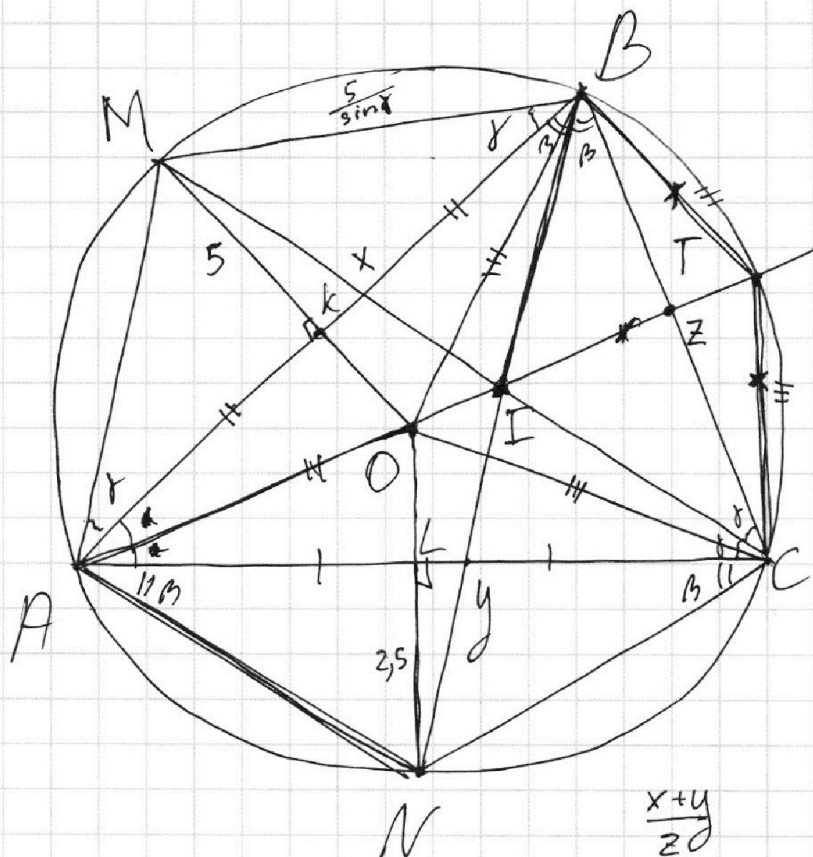
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{5 \operatorname{ctg} \beta + 10 \operatorname{ctg} \delta}{5 \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\frac{BT}{TC} = \frac{x}{y}$$

$$\left(\frac{x}{y} + 1\right) \cdot z$$

$$ky - \left(\frac{x}{y} + 1\right) \cdot z \cdot \left(\frac{y}{x} + 1\right) \cdot z$$

$$\left(ky - \left(2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \cdot z\right) \cdot \frac{x+y}{z}$$

$$ky(x+y) - 2x - 2y + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right)$$

$$AC = 5 \operatorname{ctg} \beta \quad AB = 10 \operatorname{ctg} \delta$$

$$BC = 5 \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos 2\delta + 10 \operatorname{ctg} \delta \cdot \cos 2\beta$$

$$= 5 \left(\operatorname{ctg} \beta \cdot \cos 2\delta + 2 \operatorname{ctg} \delta \cdot \cos 2\beta \right)$$

$$= 5 \left(\operatorname{ctg} \beta \cdot \frac{1 - \tan^2 \delta}{1 + \tan^2 \delta} + 2 \operatorname{ctg} \delta \cdot \frac{1 - \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta} \right)$$

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \cdot (x+y) =$$

$$= \frac{x^2}{y} + y + x + \frac{y^2}{x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} - 7}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} - 7}$$

$$\frac{9}{16+25-7 \cdot 20}$$

$$\begin{cases} ab : m \\ a^2 - 7ab + b^2 : m \\ 9ab : m \\ 9ab : m \\ a+b : m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &9 \cdot 4 \cdot 6 \\ &9 \cdot 6 \cdot \cancel{4} \cdot 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &9ab + 9b^2 : m \\ &9ab : m \\ &9b^2 : m \\ &9a^2 : m \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &b : m \\ &a : m \\ &b^2 : m \end{aligned}$$

$$m = pq \quad p \text{ и } q \text{ такие, что}$$

$$\begin{aligned} &9a^2 - 9b^2 \\ &9(a^2 - b^2) = 9(a-b)(a+b) : p \end{aligned}$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc : ac \Rightarrow abc : 2^{23} \cdot 7^{39} \quad abc : 2^{28}$$

$$a \cdot 2^{29}$$

$$55$$

$$a = 7^{11} \quad c = 7^{18} \quad b = 1$$

$$\begin{aligned} &a^2 b^2 c^2 : ab \cdot bc \cdot ac \\ &a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{77} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 28 \\ x+y &= 23 \\ y+z &= 17 \\ z+x &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\geq 20 \\ x &\leq 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 18 \\ z &= 10 \end{aligned}$$