



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



11

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot k_1$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot k_2$$

$$c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot k_3, \text{ покажем } 2 \text{ и } 7 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$$

$$ab = 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot k_1 \cdot k_2 = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot t_1, t_1 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \geq 15$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 11, \text{ аналогично с оставшимися}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 15 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 11 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 23 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \gamma_2 \geq 39 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_2 + \gamma_2 \geq 18 & (6) \end{cases}$$

$$(1) + (3)$$

$$2\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1) \geq 38$$

$$\text{аналогично}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 55 \\ 2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 68 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq \frac{55}{2} > 27 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 34 \end{cases}$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$a, b, c. \text{ т.к. } ac \geq 7^{39} \Rightarrow abc \geq 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\begin{cases} a = 2^{11} \cdot 7^{16} \\ b = 2^4 \cdot 7^0 \\ c = 2^{13} \cdot 7^{23} \end{cases}$$

пример a, b, c

Значит ответ:

$$\begin{pmatrix} 28 & 39 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b) = 1$$

$$m \geq 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\text{НОД}(a, b) = (a, b)$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2-7ab+b^2) = m \rightarrow \max - ?$$

$$(b-b_0) \text{НОД}(a, b) : \text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, a+kb), \text{ где } \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$a^2-7ab+b^2 = (a-b)^2 - 5ab = (a+b)^2 - 9ab$$

$$(a+b, (a+b)^2 - 9ab) = (a+b, (a+b)^2 - 9ab - (a+b)^2) =$$

$m, k \quad \uparrow \quad -(a+b) \in \mathbb{Z}$

$$= (a+b, -9ab) = (a+b, 9ab), \quad m \geq 3 \begin{cases} \text{если } a=1 \\ b=2 \\ m=3 \end{cases}$$

$$\# \text{ Пусть } a \equiv a_1 \pmod{7}, \quad b \equiv b_1 \pmod{7}$$

$$a_1 \neq b_1$$

~~$$a+b \equiv m$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

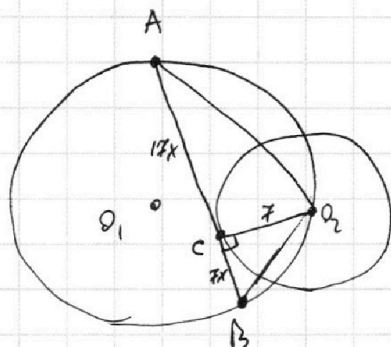
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



23



$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7} \quad R = 13 \quad r = 7$$

~~$$AB = 7x$$~~

$$AC = 17x$$

$$AB = 7x$$

$$R(O_1, R)$$

$$\omega(O_2, r)$$

$$S_{\Delta A O_2 B} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x = \frac{1}{2} A O_2 \cdot O_2 B \cdot \sin \angle A O_2 B = \overset{\text{полупрямоугольный}}{P} \cdot R$$

$$\angle O_2 C A = 90^\circ \text{ (т.к. } O_2 C \text{ - радиус в точку касания)}$$

$$\Rightarrow \Delta A O_2 C \text{ и } \Delta O_2 C B \text{ - прямоугольные}$$

$$\Rightarrow \text{по т. Пифаг: } \cancel{A O_2 = 14x} \quad A O_2^2 = (17x)^2 + 7^2$$

$$O_2 B^2 = (7x)^2 + 7^2$$

$$S_{\Delta A O_2 B} = \frac{1}{2} \cdot O_2 C \cdot AB = \frac{A O_2 \cdot O_2 B \cdot AB}{4R}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{A O_2 \cdot O_2 B}{4R}$$

$$7 \cdot 2 \cdot 13 = A O_2 \cdot O_2 B \quad | \cdot 2$$

$$(14 \cdot 13)^2 = ((17x)^2 + 7^2)((7x)^2 + 7^2)$$

$$7 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 182 = 7^4 + 49(289 + 49)x^2 + 289 \cdot 49x^4 \quad | : 7^2$$

$$26^2 = 7^2 + 338x^2 + 289x^4$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$x = 1 : 289 + 338 - 627 = 0 \quad (\checkmark)$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad (\checkmark) \text{ (т.к. чётная функция)}$$

~~(ср. след. ст.)~~
(сл. с другой стороны)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0 \quad (*) \quad (\text{удаление})$$

1) Схема Гурвица:

	289	0	338	0	-627
$x=1$		289	289	627	627
	289	4 289	627	0 627	0

2)	289	289	627	627
$x=-1$		-289	0	-627
	289	0	627	0

$$\Rightarrow \text{~~289~~} \quad (*) = (x^2 - 1) \underbrace{(289x^2 + 627)}_{> 0} = 0$$

$\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=1$ единственный положительный корень

$$\Rightarrow AB = 24x = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad \boxed{\sim 4}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 3x^2 - 6x + 2 = a \\ & 3x^2 + 3x + 1 = b \\ \hline & 1 - 9x = a - b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \\ & \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ & (\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 - \sqrt{a} + \sqrt{b}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & (1) \quad \sqrt{a} = \sqrt{b} \\ & (2) \quad 1 = \sqrt{a} + \sqrt{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad |^2 \\ & 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ & 1 = 9x \\ & \boxed{x = \frac{1}{9}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Проверка:} \quad & \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - \frac{1}{9} \cdot 9 \\ & \sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} = 0 \quad (\checkmark) \\ & \quad \quad \quad \frac{4}{3} \quad \quad \quad \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$(2) \quad 1 = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad |^2 \quad \text{верно при } 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} 1 &= 6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(3x^2 - 6x + 2)} \\ 0 &= \underbrace{(6x^2 - 3x + 2)}_{f(x)} + 2 \underbrace{\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(3x^2 - 6x + 2)}}_{g(x)} \end{aligned}$$

$$f(x) = 6x^2 - 3x + 2, \quad D = 9 - 4 \cdot 6 \cdot 2 < 0 \Rightarrow f(x) > 0, \text{ при } \forall x$$

$$g(x) > 0, \text{ т.к. под корнем}$$

$$\Rightarrow (2) \quad \emptyset$$

$$\text{Ответ: } \boxed{\frac{1}{9}}$$

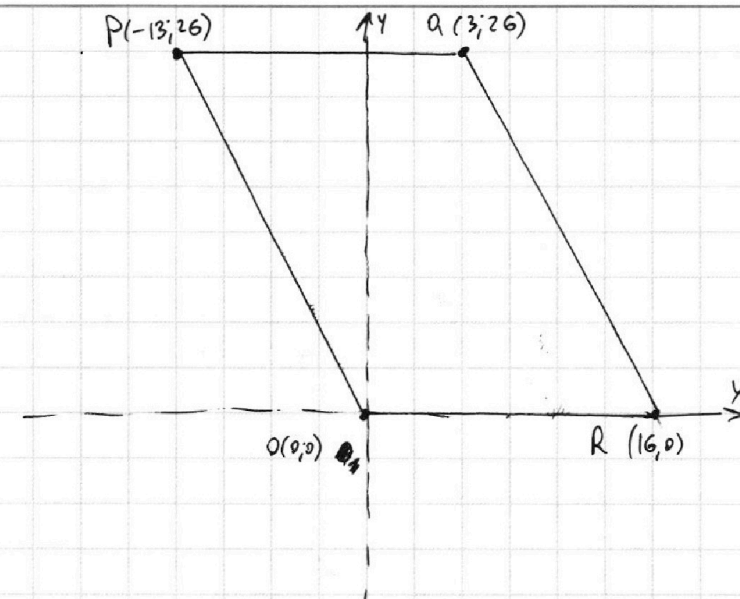
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$

$$\{x_1, y_1, x_2, y_2\} \in \mathbb{Z}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$\text{Пусть } B = P$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (-13) - 2 \cdot (x_1) + 26 - y_1 = 14$$

$$2x_1 + y_1 = -14$$

$$y_1 = -2x_1 - 14 = f(x_1)$$

$y = f(x_1)$ — прямая параллельная PO проходящая через
т. $(0, -14) \Rightarrow \notin \text{парал.-луч.}$

$\Leftrightarrow$ решения $\Rightarrow$
А — общие коэф.-ты $\Rightarrow a_1 x_1 + b_1 y_1 = c_1, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

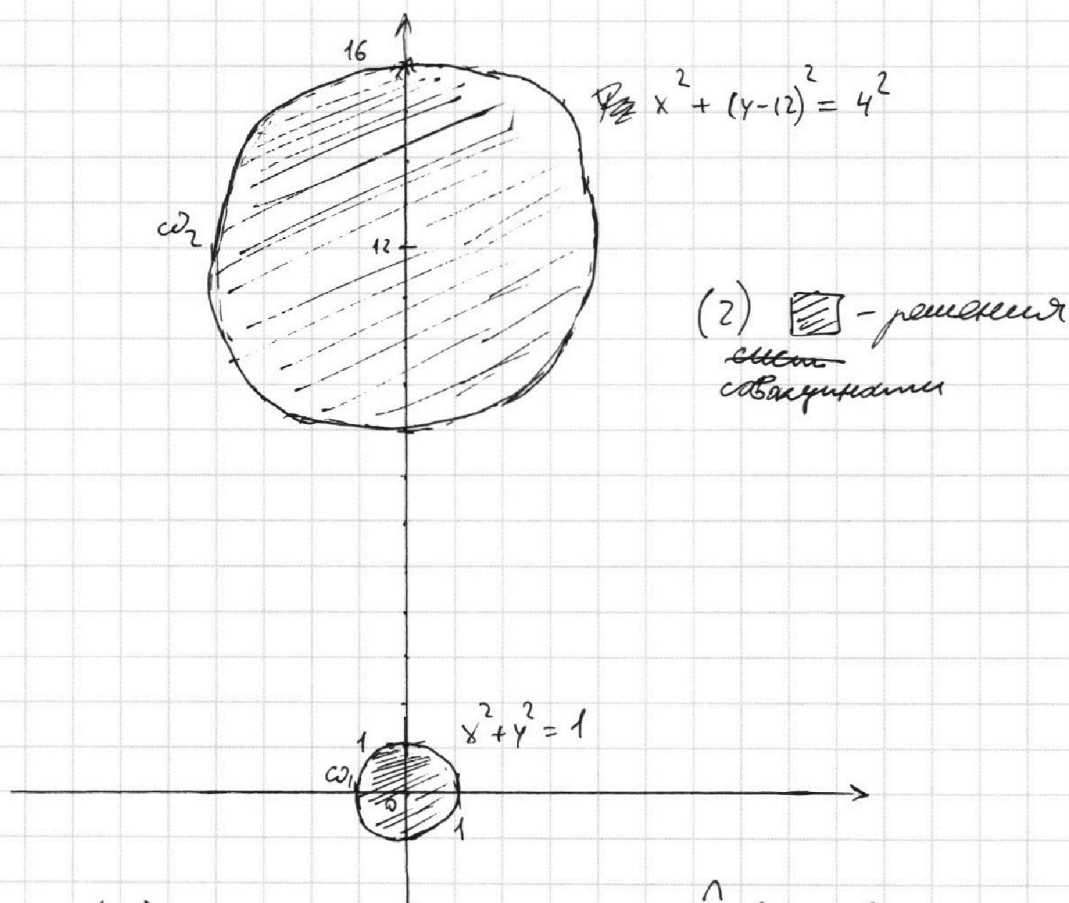
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{46} \quad \begin{cases} ax+y-88=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y-2)^2 - 16 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y-2)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$

ω_1 с центром $(0,0)$ и $r_1 = 1$
 ω_2 с г. $(0,12)$ и $r_2 = 4$



Смателна (2.1) - мн-во точек вкупно $\omega_1 \wedge \omega_2$
 см. (2.2) - мн-во т. вкупно $\omega_2 \wedge \omega_1$

~~(2.1) Bei unkorrelierter Verteilung von ϵ_1 und ϵ_2~~

~~(2.2) - 2-й этаж~~ (2.1) - 1-й этаж. Выходы с 1
(2.2) - 1-й этаж. Выходы с 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



16 (продолжение №1)

~~$$ax + y - 8b = 0$$~~

~~$$y = -ax + 8b = f(x) - \text{прямая с коэф. наклона } -a$$~~

~~$$\text{и } y \cap OY = 8b.$$~~

~~1) $f(x)$ пересекает ω_1 и не пересекает ω_2~~
~~2) $f(x)$ касается и.т.~~
~~3) $f(x)$ касается внешней ω_1 и ω_2~~
~~4) $f(x)$ касается внутренней ω_1 и ω_2~~

$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = -ax + 8b = f(x) - \text{прямая коэф. наклона } -a$$

$$\text{и } y \cap OY = 8b.$$

Если прямая пересекает 2 раза какой-то
окружность $\Rightarrow$ решений > 2

$\Rightarrow$ прямая должна быть касательной к двум
окружностям. т.к. окр. ω_1 и $\omega_2 \Rightarrow \exists$ внешняя и внутренняя
касат. общ. касат.

$$\Rightarrow y = -ax + 8b$$

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ при } y \text{ имеет 1 решение}$$

$$x^2 + (-ax + 8b)^2 = 1 \text{ (т.к. картинка симметрична относительно } OY \Rightarrow \text{ если } a \text{ - решение, то } -a \text{ - решение)}$$

$$x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 = 1$$

$$(1+a^2)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = 256a^2b^2 - 4(1+a^2)(64b^2 - 1) = 0 \text{ (т.к. 1 корень)}$$

$$256a^2b^2 - (4 + 4a^2)(64b^2 - 1) = 0$$

АВВ

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~16~~ 16 (уточнение 2)

$$256a^2b^2 - (256b^2 + 256a^2b^2 - 4 - 4a^2) = 0$$

$$4a^2 + 4 = 256b^2 \quad | :4$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$\frac{16}{144} \quad \frac{16}{36}$$

С другой стороны

$$x^2 + (y-12)^2 = 16 \quad \text{при } y = -ax + 8b - 12 \text{ — реш.}$$

$$x^2 + (-ax + 8b - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 144 - 16abx - 192b + 24ax = 16$$

$$(1+a^2)x^2 + (24a - 16ab)x + (64b^2 - 192b + 128) = 0$$

$$D = (8a(3-2b))^2 - 4(1+a^2)(64b^2 - 192b + 128) = 0$$

$$64a^2(9 - 6b + 4b^2) - 4(64b^2 - 192b + 128 + 128a^2 - 192a^2b + 64a^2b^2) = 0$$

$$64a^2b^2 + 144 - 96ba^2 - 64b^2 - 192b + 128 + 128a^2 - 192a^2b + 64a^2b^2 = 0$$

(не устал, далее получаем систему из двух уравнений на (a, b) , решаем, получаем 2 значения a , которые ~~еще~~ дают еще два решения при фиксированном $b = -1$, т.е. симметричные относительно OY)

Ответ: $\pm a_1, \pm a_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

121

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot k_1$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot k_2$$

$$c = 2^{\delta_1} \cdot 7^{\delta_2} \cdot k_3$$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2\}$ - степени входящих
целых в числа $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{k_1, k_2, k_3\}$ - ~~остатки~~
другие множители $\Rightarrow \{k_1, k_2, k_3\} \in \mathbb{N}$.

$$ab : 2^{15} 7^{11} \Rightarrow 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot k_1 \cdot k_2 : (2^{15} \cdot 7^{11})$$

Аналогично с оставшимися $\Rightarrow$ система:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 15 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 11 \\ \alpha_1 + \delta_1 = 23 \\ \alpha_2 + \delta_2 = 39 \\ \beta_1 + \delta_1 = 17 \\ \beta_2 + \delta_2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{21}{2} \\ \beta_1 = \frac{3}{2} \\ \delta_1 = \frac{25}{2} \\ \alpha_2 = 16 \\ \beta_2 = -5 \\ \delta_2 = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{21}{2} \\ \alpha_2 = 16 \\ \beta_1 = \frac{3}{2} \\ \beta_2 = -5 \\ \delta_1 = \frac{25}{2} \\ \delta_2 = 23 \end{cases}$$

Полученные решения системы обусловлены тем,
что я считал, что $k_1, k_2, k_3 \nmid 2$ и $\nmid 7$, хотя это
значит $k_1, k_2, k_3 : 2$ и $: 7$, так, где реше-
ния < 0 или $\notin \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow k_1 : (\text{хотя бы } 2) \Rightarrow k_1 \geq 2$$

$$k_2 : (\text{хотя бы } 2 \text{ и хотя бы } 7) \Rightarrow k_2 \geq 2 \cdot 7^5$$

$$k_3 : (\text{хотя бы } 2) \Rightarrow k_3 \geq 2$$

~~$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$$~~

$\Rightarrow$ Новая система

a, b

$$b = ka + r$$

$$r = b - ka$$

$$(a, b) = (a, r) = a, b - ka$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

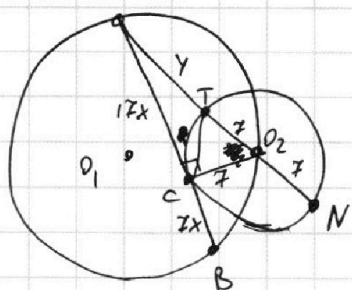
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~ 3



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$\Omega(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$$

$$R = 13$$

$$r = 7$$

AB-?

* Tugend $AC = 17x \Rightarrow BC = 7x$

$$A \cap \omega = \tau, \quad A \tau = \gamma$$

~~11~~ O_2C -радиус к т. касания $\Rightarrow \angle O_2CA = 90$

(1) По т. о касан. и сек. гур ω и т. А:

(изучив $AT \cap \omega$ вписанного в m, N)

$$A^T \cdot A N = A C^2$$

$$\Rightarrow y \cdot (14 + y) = 17x^2$$

$$S_{\Delta A O_2 B} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x = \frac{A O_2 \cdot O_2 B \cdot AB}{4R}, \text{ m.k. } AB = 24x \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{2} = \frac{A_{O_2} \cdot O_2 B}{4R}, \quad A_{O_2} = \sqrt{49 + (7x)^2}, \quad (m. \text{Плоск. } \triangle ACO_2)$$

$$O_2 B = \sqrt{49 + (7x)^2}, \quad (m. \text{Плоск. } \triangle O_2CB)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2} \cdot 4 \cdot 13 = \sqrt{49 + (7x)^2} \cdot \sqrt{49 + (7x)^2}$$

$$14 \cdot 13 = \sqrt{(49 + 289x^2)(49 + 49x^2)} \mid^{\wedge} 2$$

$$(182)^2 = (49)^2 + (49 \cdot 289 + 49 \cdot 49)x^2 + 289 \cdot 49x^4$$

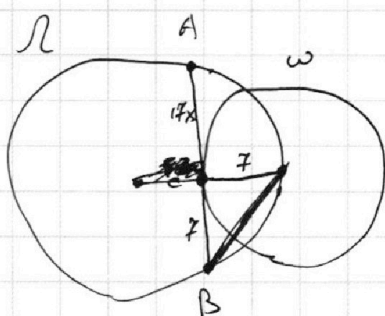
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

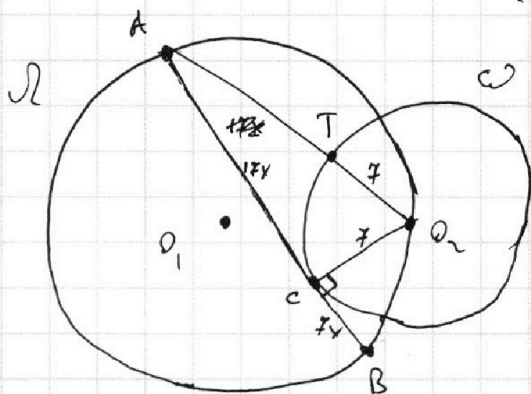


$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$AB = ?$

$$\checkmark = \checkmark$$

$$R = 13$$



ATZ

$$(I \otimes X)^2 = A^T \cdot (A^T + Z)$$

$$(I \otimes X)^2 + Z^2 = (I \otimes T + Z)^2$$

Q 6: 2¹⁵ 7¹¹

BC : 2 7 17 18

$$ac : 2^3 \quad 3^9$$

$(abc)_{\min} = ?$

~~$\text{HOD}(a \in, e_c) =$~~

$$a = 2^{2^1} \cdot 7^{2^2}$$

$$G = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$C = 2^{\delta_1} 7^{\delta_2}$$

~~a.b~~ $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 15 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 11 \end{cases}$$

$$a \cdot 0 = 0$$



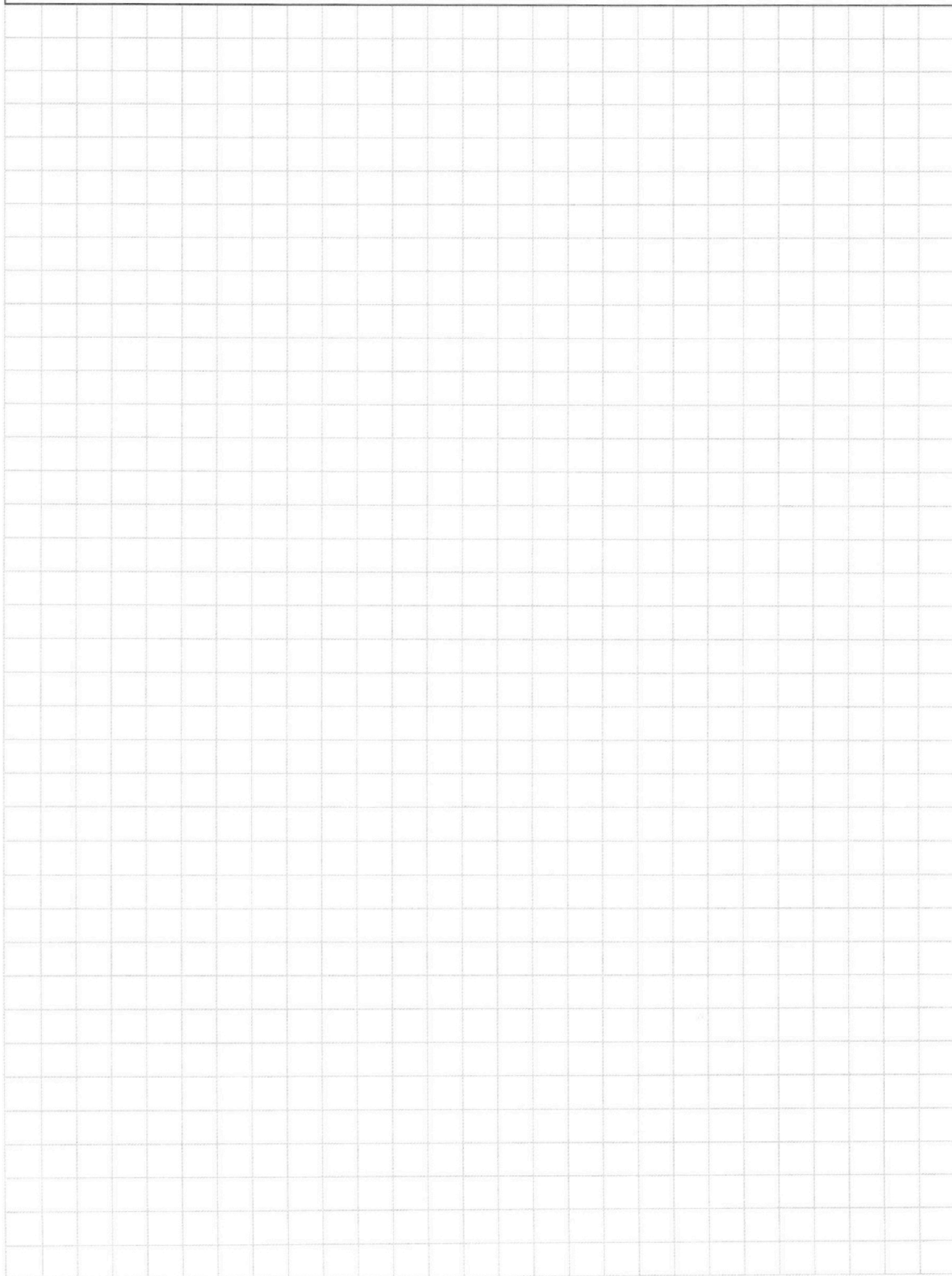
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

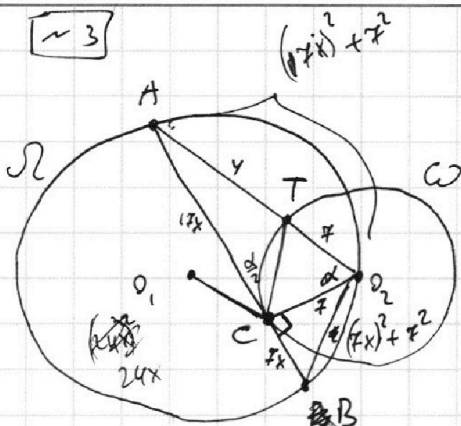
1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 3



~~Решение~~

$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

O_1 - центр Ω

O_2 - центр ω

r - радиус ω

R - радиус Ω

AB - ?

$(96) - 1$

Решение.

$a+b$

Пусть $AC = 17x \Rightarrow BC = 7x$.

Пусть $AO_2 \cap \omega = T$. Пусть $AT = y$.

(1) По т. о касательной и секущей для ω в т. A:

$$AO_2 \cdot AT = AC^2, \text{ т.к. } AC - \text{касает}$$

$$(7+y)y = (17x)^2 \quad (1)$$

(2) Проведём радиус ω O_2C , $\angle O_2CA$ - тупой.

$\Rightarrow$ По т. Пир. в $\triangle ACO_2$: ~~$(17x)^2 + x^2 = (7+y)^2$~~ $AC^2 + CO_2^2 = AO_2^2$

$$(2) (17x)^2 + x^2 = (7+y)^2$$

(1) в (2): $(7+y)y + x^2 = (7+y)^2$

$$14y + y^2 + 49 = 49 + 14y + y^2$$

$$0 = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{17x}{7+y}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{7+y}$$

$$\sin \alpha = \frac{17x}{7+y}$$

$$49 + \frac{(17x)^2}{(7+y)^2} = 1$$

$$49 + (17x)^2 = (7+y)^2$$

$$(49 + 289x^2)(49 + 49x^2)$$

$$49^2 +$$

$$\frac{289}{49}$$

$$49 +$$

$$\frac{14}{13} \cdot \frac{42}{182}$$

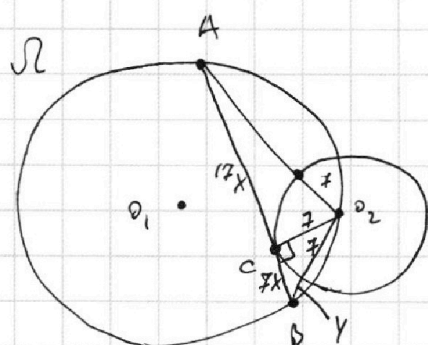
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$AB = ? \quad r = 7 \\ R = 13$$

$$(7x)^2 + 49 = (7+y)^2$$

$$(7x)^2 = (7+y) \cdot y =$$

$$y(7+y) + 49 = (7+y)^2$$

$$y^2 + 7y + 49 = y^2 + 14y + 49$$

$$y = 0$$

$$(17x)^2 +$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$D = 36 - 24 = 12 = 4 \cdot 3$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{3}} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | \cdot 2$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 6 = 12$$

$$3x^2 - 6x + 2 = a$$

$$3x^2 + 3x + 1 = b$$

$$1 - 9x = a - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\sqrt{b} - \sqrt{b} = a - \sqrt{a}$$

$$\sqrt{b}(\sqrt{b} +)$$

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2$$

$$1 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq$$

$$\geq 3 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) + 1$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 < 0$$

$$x_0 = -\frac{3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$$

$$y_0 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$$

$$3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4} + \frac{6}{4} + 2 =$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{8}{4} = \frac{17}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~21222~~

$$2(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq 15 + 23 + 17 = 55$$

$$\frac{11 + 39 + 18}{50} = 68$$

$$\begin{array}{l} a = 2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \\ b = 2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \\ c = 2 \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \end{array}$$

~~$$\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1$$~~

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq 15$$

$$\beta_1 + \delta_1 \geq 17$$

$$\alpha_1 + \delta_1 + 2\beta_1 \geq 32$$

$$\alpha_1 + \delta_1 \geq 23$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} \geq$$

~~$$\rightarrow 2\beta_1$$~~
$$\alpha_1 + \delta_1 = 24$$

$$\beta_1 = 4$$

$$\frac{17}{13}$$

~~$$a+b: m$$~~
$$a^2-7ab+b^2: m$$

$$\alpha_1 = 11$$

$$\delta_1 = 13$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 11$$

~~$$\alpha_2 + \delta_2$$~~
$$\alpha_2 + \delta_2 \geq 39$$

~~$$\beta_2 + \delta_2 \geq 18$$~~
$$2\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 50$$

~~$$\alpha_2 + \delta_2 + 2\beta_2 \geq$$~~

$$\Rightarrow 2\alpha_2 \cdot \alpha_2 = 16$$

$$\beta_2$$

$$\delta_2 = 23$$

$$\beta_2 = 0$$

$$\frac{+16}{39}$$

$$\frac{39}{16} \cdot 23$$

$$\frac{627}{49}$$

$$\frac{338}{-289} \cdot 449$$

~~$$3x^2 + 3x + 15$$~~

$$\begin{array}{r} 289 = 17^2 \\ + 49 = 7^2 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ \hline 52 \\ - 676 \\ \hline 49 \\ - 627 \end{array}$$

$$6x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{array}{r} 289x^4 + 338x^2 - 627 \mid x^2 - 1 \\ 289x^4 - 289x^2 \\ \hline 49x^2 - 627 \\ - 49x^2 - 49 \\ \hline -578 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пример $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot k_1$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot k_2$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot k_3$;

$\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2\} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ - степени 2 и 7;

$\{k_1, k_2, k_3\} \in \mathbb{N}$.

Имеем $ab = 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot k_1 \cdot k_2 : (2^{15} \cdot 7^{11})$

$\Leftrightarrow ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot m_1$, где $m_1 \geq 1$ и $m_1 \in \mathbb{N}$

Если $m_1 > 1 \Rightarrow ab \cdot c = m_1 \cdot t_1$, где $t_1 \in \mathbb{N}$ и $t_1 \geq 1$

Значит, чтобы найти $\min(ab)$, берём $m_1 = 1$,

аналогично с множителями ac и bc :

$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 15 & (1) \\ \alpha_2 + \beta_2 = 11 & (2) \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 23 & (3) \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 39 & (4) \\ \beta_1 + \gamma_1 = 17 & (5) \\ \beta_2 + \gamma_2 = 18 & (6) \end{cases}$

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 15$
 $\alpha_1 + \gamma_1 \geq 23$ $\oplus$

$2\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1) \geq 38$
 $2\alpha_1 \geq 21 \quad \alpha_1 \geq \frac{21}{2}$

$(3) - (1) : \gamma_1 - \beta_1 = 8$ $\oplus$
 $(5) : \gamma_1 + \beta_1 = 17$

$2\gamma_1 = 25$

$\gamma_1 = \frac{25}{2}$, покажем, что

такое γ_1 не возможно, но
возвращаемся к началу разберёмся.

$(5) \beta_1 = 17 - \gamma_1 = \frac{34 - 25}{2} = \frac{9}{2}$

$\alpha_2 + \beta_2 = 11$
 $\alpha_2 + \gamma_2 = 39$

$\gamma_2 - \beta_2 = 28$
 $\gamma_2 + \beta_2 = 18$

$\gamma_2 = \frac{46}{2} = 23$

$\beta_2 = 18 - 23 = -5$

$\alpha_2 = 39 - \gamma_2 = 16$

$\alpha_1 + \beta_1 = 15$
 $\gamma_1 + \beta_1 = 17$

$\gamma_1 - \alpha_1 = 2$
 $\gamma_1 + \alpha_1 = 23$
 $\gamma_1 = \frac{25}{2}$

$\beta_1 = \frac{9}{2}$

$\alpha_1 = 15 - \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$