



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① a, b, c ∈ N:

$$ab = 2^{14} \cdot 4^{10} \cdot K, \quad K \in \mathbb{N}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 4^{14} \cdot M, \quad M \in \mathbb{N}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 4^{34} \cdot N, \quad N \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \\ 34 \\ \hline 64 \end{array}$$

min-abc = ?

$$(abc)^2 = 2^{28} \cdot 4^{20} \cdot 2^{14+14+20} \cdot 4^{10+14+34} \cdot KMN$$

$$(abc)^2 = 2^{51} \cdot 4^{64} \cdot KMN$$

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 4^{64} \cdot KMN} = 2^{25} \cdot 2 \cdot 4^{32} \cdot \sqrt{KMN}$$

$$abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{KMN} \in \mathbb{N}$$

$$\text{Если } K, M, N \in \mathbb{N}, \text{ то } \sqrt{KMN} = \sqrt{K} \cdot \sqrt{M} \cdot \sqrt{N}$$

$$\Rightarrow \sqrt{K} \text{ или } \sqrt{M} \text{ или } \sqrt{N} = 2$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } K=2, \quad M=N=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{KMN} = 2$$

$$\Rightarrow abc = 2^{26} \cdot 4^{32}$$

Пусть  $4^p \mid abc$ ,  $p \in \mathbb{N}$ -max

$$2^4 \mid abc, \text{ } 4^p \text{-max} \Rightarrow p \geq 34, \quad q \geq 20$$

$$abc = 2^{25} \cdot 4^{34} \cdot \sqrt{KMN}$$

$$\Rightarrow \sqrt{KMN} \in \mathbb{N}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{KMN} \in \mathbb{N} \\ 4^5 \mid \sqrt{KMN} \end{array} \right. \Rightarrow \sqrt{KMN} \cdot 4^{10} \mid KMN$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } K=2, \quad M=4^{10}, \quad N=1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① - Продолжение:

$$k=2$$

$$n=y^{10}$$

$$k=1$$

$$\Rightarrow |abc| = 2^{12} \cdot y^{22} \cdot 2 \cdot y^5 = 2^{16} \cdot y^{34}$$

- это максимум, так как  $2kna : y^{10} \cdot 2kna : y^{10}$   
 $\Rightarrow$  среднее  $k, n, a$  равно

~~равно  $k, n$~~

$$\Rightarrow kna = 2^{16-1} \cdot y^{10} \cdot y^2$$

при  $t, d \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$  минимальное значение  
при  $t=1, d=1$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot y^{34}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ - Продолжение

$$\Rightarrow x = 2 \in \left[ \frac{23 - \sqrt{341}}{94} ; \frac{2}{3} \right]$$

$$x = \frac{11 - 11\sqrt{2}}{41} < 0 < \frac{23 - \sqrt{341}}{94} \Rightarrow \text{не подходит}$$

Ответ:  $\frac{2}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

⑥ Найдите все  $a$ : ЗВ.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (1-2) \text{ ум.} \end{cases}$$

(1)  $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

1)  $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$

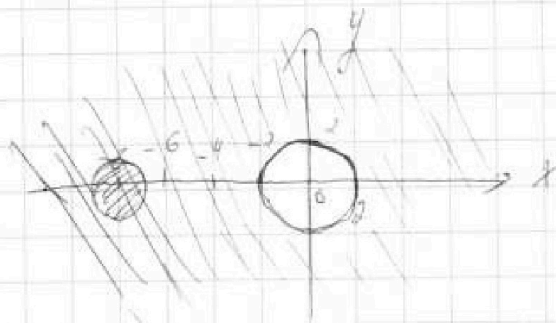
~~$(x+8)^2 + y^2 - 4 \leq 0$~~   $(x+8)^2 + y^2 = 1$

- 0

- Окр. кб с центром в  $(-8; 0)$   
и  $r=1$

$x^2 + y^2 = 4$

- Окр. кб с центром в  $(0; 0)$   
и  $r=2$



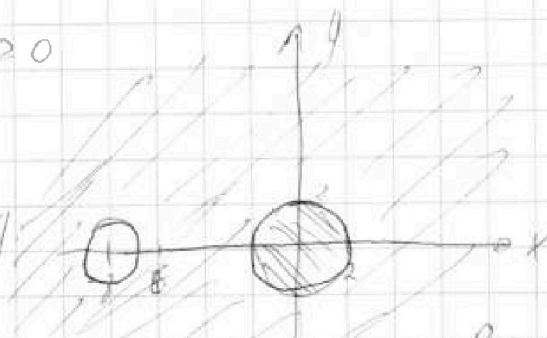
$\Rightarrow$  Решения

- Окр. кр. кб

$r=1$  с центром в  $(-8; 0)$

2)  $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 14 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$

Аналогично (1).



$\Rightarrow$  Решения -  
Окр. кр. кб  $r=2$   
с центром в  $(0; 0)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ - Преобразование

$$x = \frac{2}{3} \Rightarrow 0.2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{3}$$

$$0.2x^2 - 5x + 3 \geq 2 - 9x$$

$$2 - 9x > 0$$

$$\frac{2}{9} \geq x \Rightarrow x \leq \frac{2}{9}$$

Если  $2 - 9x \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{2}{9} \leq x \rightarrow$$

также  $9.19$   
 $x \leq 4.4$   
0.031

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 49x^2 - 28x + 4$$

$$0 \geq 47x^2 - 23x + 1$$

$$47x^2 - 23x + 1 \leq 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 47 = 341$$

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{341}}{94}$$

$$\Rightarrow x \in \left[ \frac{23 - \sqrt{341}}{94}, \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right]$$

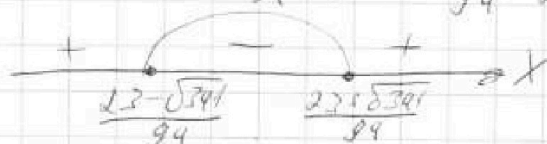
$$x = \frac{23 + \sqrt{341}}{94} = \frac{23 + 18.46}{94} \approx \frac{41.46}{94} \approx \frac{21}{47}$$

$$\frac{21}{47} < \frac{21}{47}$$

$$\frac{21}{47}$$

$$\Rightarrow x = \frac{23 + \sqrt{341}}{94}$$

$$\left( x - \frac{23 - \sqrt{341}}{94} \right) \left( x - \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right) \leq 0$$



$$\Rightarrow x \in \left[ \frac{23 - \sqrt{341}}{94}, \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right]$$

$$\frac{23 - \sqrt{341}}{94} <$$

$$< \frac{23 - 18.46}{94} = \frac{4.54}{94} \approx \frac{1}{21}$$

$$\frac{23 + \sqrt{341}}{94} >$$

$$\frac{23 + 18.46}{94} = \frac{41.46}{94} \approx \frac{21}{47}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

② ④ - Продолжение

$$(4x-25)^2 - 0,25 = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x)$$

$$(4x+3)(4x-2) = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x)$$

$$(3-4x)(2-4x) = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x)$$

$$x = \frac{2}{3} \in ODZ \Rightarrow \text{корень}$$

$$x \neq \frac{2}{3} \Rightarrow (3-4x)(2-4x) = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x) \quad | : (2-4x)$$

$$\frac{3-4x}{2} = \sqrt{2x^2-5x+3}$$

$$\geq 0$$

$$3 \geq 4x$$

$$\frac{3}{4} \geq x$$

$$\boxed{x \leq \frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow 49x^2 - 92x + 9 = 4(2x^2 - 5x + 3)$$

$$49x^2 - 92x + 9 = 8x^2 - 20x + 12$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 11^2 + 3 \cdot 41 = 121 + 123 = 244 = 2 \cdot 121$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{102}}{41}$$

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{102}}{41} < 0$$

$$x_2 = \frac{11 + \sqrt{102}}{41} > \frac{22}{41} > \frac{1}{2} > \frac{3}{4} \Rightarrow \text{не корень}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ или } x = \frac{11 - \sqrt{102}}{41}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + x + 1} = 2 - 4x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)(x-\frac{3}{2}) = (x-1)(2x-3)$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 9$$

$$x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$2x^2 + 2x + 1 = \frac{4x^2 + 4x + 2}{2} = \frac{4x^2 + 4x + 1 + 1}{2} =$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 & (1) \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$(x-1)(2x-3) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline 1 \quad \frac{3}{2} \end{array} \Rightarrow x$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$(2) \quad 2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$D = 4 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow O.D. \quad (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - (2 - 4x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x) + (2 - 4x)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x) + 49x^2 - 28x + 4 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$49x^2 - 33x + 8 - 2x - 1 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

$$49x^2 - 35x + 6 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

$$49x^2 - 35x + 6, 25 - 0, 25 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

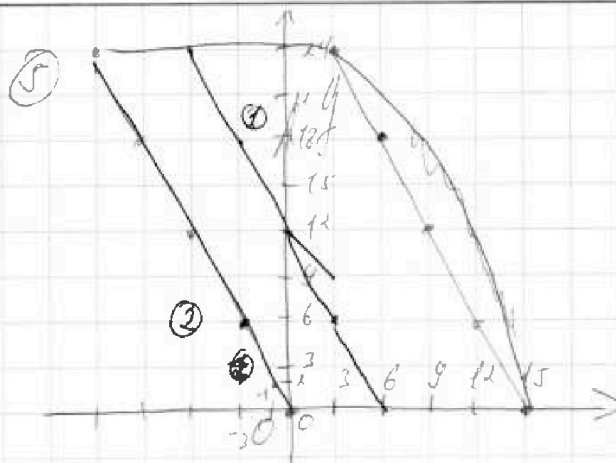
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_1 - y_2 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12$$

$$2x_2 + y_2 = 0 \rightarrow$$

$$2x_1 + y_1 + 12 = 0$$

$\rightarrow$  для  $\forall (x_1, y_1) \in T(2x_2 + y_2 = 0)$   
 $\forall (x_1, y_1)$

$\rightarrow$  для  $\forall x_1 \in$  границе  
 $2x + y = 0$  выполняется.

Всех  $x_1$  границе

$$2x_1 + y_1 + 12 = 0 \text{ (если } A \in \text{ границе)}$$

$$2x_2 + y_2 \text{ (если } A \in \text{ границе)}$$

$\Rightarrow$  На каждой граничной

$$2x + y + C = 0, C \in \mathbb{R}$$

- по  $\forall$   $x_1, y_1$  в граничной

границе  $x_1, y_1$  в граничной

границе

$$\text{(для } 2x + y = 0)$$

$$\rightarrow (-1, 12), (0, 0)$$

$$(0, 0), (-1, 12), (-2, 24)$$

$$(-12, 24) \neq$$

для  $2x + y + C = 0$  - аналогично,

$$x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$  На каждой граничной

$$2x + y + C = 0, C \in \mathbb{R}$$

- по  $\forall$   $x_1, y_1$  в граничной

границе  $x_1, y_1$  в граничной

$$2x + y + C = 0 \text{ и } 2x + y + C + 12 = 0$$

$$- \text{сведем } 13^2 = 169$$

$$13^2 = 169$$

Всего значений:

$$2x + y = 0 \text{ и } 2x + y + 12 = 0$$

$$2x + y + 1 = 0 \text{ и } 2x + y + 13 = 0$$

$$2x + y + 18 = 0 \text{ и } 2x + y + 30 = 0$$

Всего значений:

и  $x_1, y_1$  в граничной

границе  $x_1, y_1$  в граничной

границе  $x_1, y_1$  в граничной

$$\Rightarrow 13 \cdot 169 = 2197$$

$$\Rightarrow 25 \cdot 19 = 475$$

$$\text{Ответ: } 2197 + 475 = 2672$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 169 \\ \hline 1152 \\ + 1521 \\ \hline 169 \\ \hline 3211 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 169 \\ \hline 1275 \\ + 1300 \\ \hline 2197 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

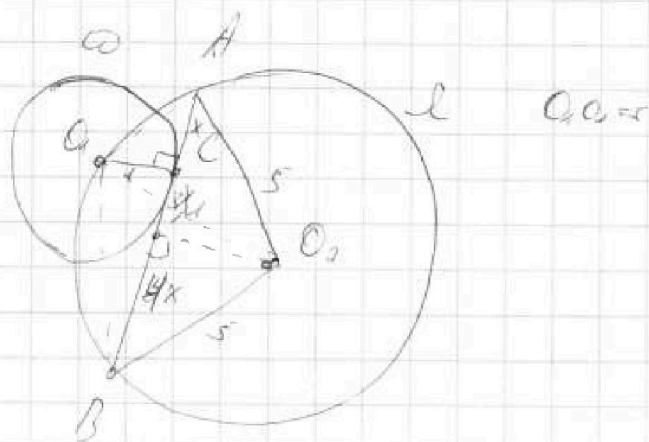
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

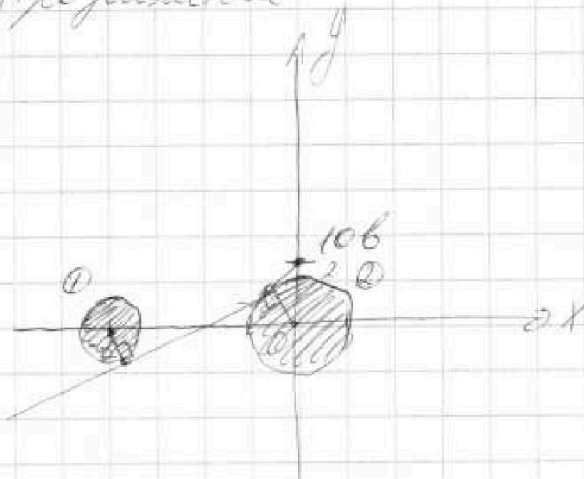
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) - Продолжение

(2)



1) - окружность с центром в  $(-2, 0)$   
2) - окружность с центром в  $(2, 0)$

сист. им. 2 р-н.  $\Rightarrow ax - y + 10b = 0$

д. 1. Пересечением окружностей

$\Rightarrow$  при

$\Rightarrow ax - y + 10b = 0$  - касания 1 и 2

$\Rightarrow ax - y + 10b = 0$

3.  $(x, y), (x, y)$

$\Rightarrow \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ax - y + 10b = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow ax - y + 10b = 0$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} = 1 \text{ р-н.}$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 = 1 \end{cases} = 1 \text{ р-н.}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8) Продолжение

$$\begin{cases} 25b^2 - a^2 = 1 \\ 1600b \cdot 64a^2 - 75b^2 = 0 \end{cases}$$

$$64a^2 - 1600b + 75b^2 = 0$$

$$(8a - 10b)^2 = 25b^2$$

$$8a - 10b = 5b$$

$$8a - 10b = -5b$$

$$8a = 15b$$

$$\frac{8a}{15} = b$$

$$8a = 5b$$

$$\frac{8a}{5} = b$$

$$1) \left(\frac{8}{15}\right)^2 a^2 \cdot 25 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(25 \cdot \frac{64}{25 \cdot 9} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \left(\frac{64}{9} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{55}{9} = 1$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$\text{См. также: } \pm \frac{\sqrt{63}}{63}, \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$2) \left(\frac{8a}{5}\right)^2 \cdot 25 - a^2 = 1$$

$$\frac{64}{25} a^2 \cdot 25 - a^2 = 1$$

$$63a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{63}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{63}}{63}$$



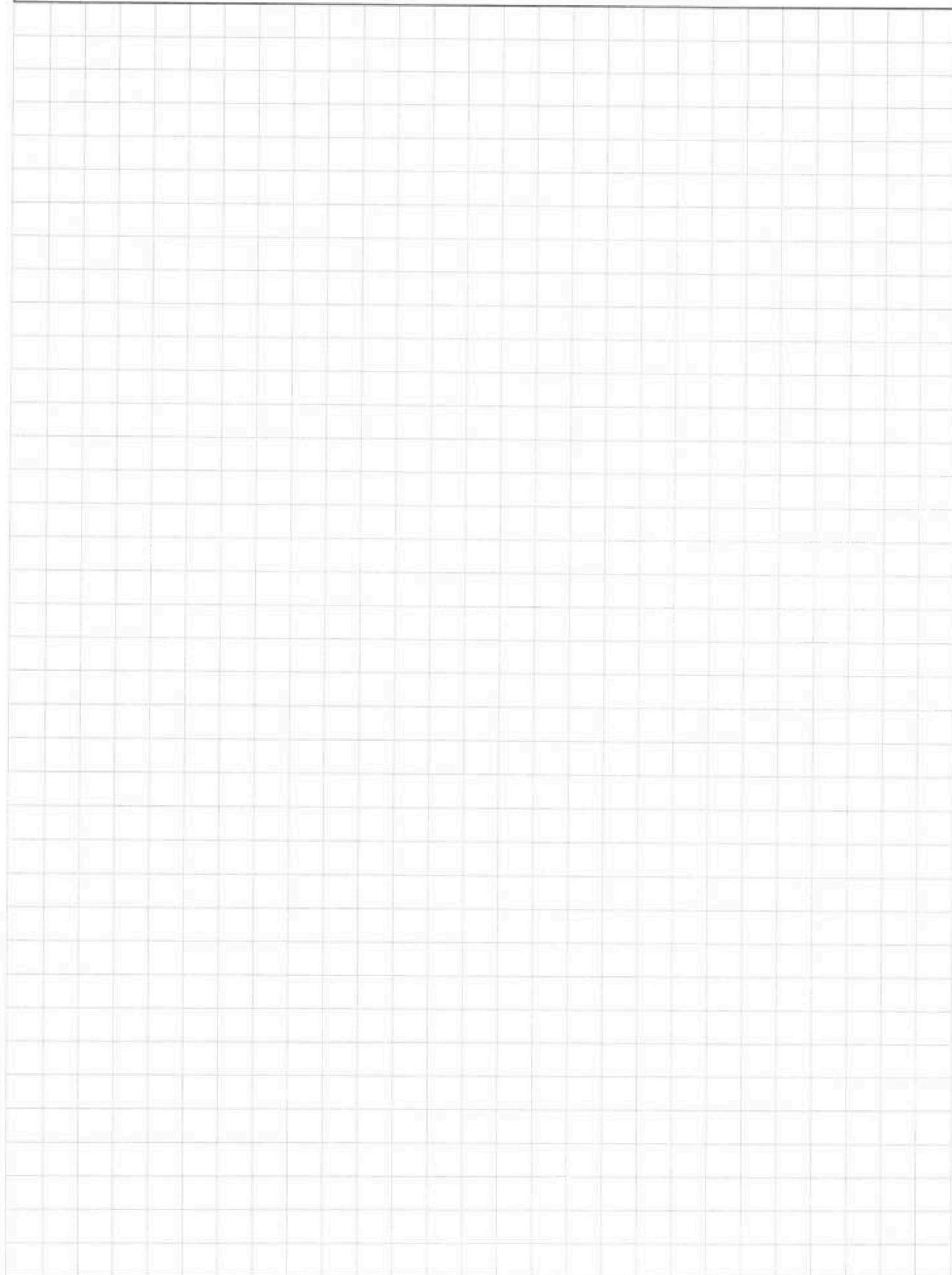
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 25b^2 - a^2 = 1 \\ 1600b - 64a^2 - 45b^2 = 0 \end{cases}$$

$$400b - 16a^2 = 1125b$$

$$64a^2 - 1600b + 45b^2 = 0$$

$$(8a)^2 - 1600b + (55b)^2 = 0$$

$$45b^2 - 1600b + 64a^2 - 1600b + 100b^2 + 15b^2 = 0$$

$$100b^2 - 1600b + 169a^2 = 25b^2$$

$$(10b + 8a)^2 = 25b^2$$

$$20 - 10b = \pm 15b$$

$$10b + 8a = 5b \quad 10b + 8a = -5b \quad 8a = -15b$$

$$8a = -15b$$

$$8a = -5b$$

$$a = -\frac{15b}{8}$$

$$4a = -b$$

$$-\frac{8a}{15} = b$$

$$8a = b$$

$$\Rightarrow 125 \cdot \left(\frac{8}{35}\right)^2 a^2 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(25 \cdot \frac{64}{49} - 1\right) = 1$$

$$\frac{64}{49} - 1 = \frac{15}{49}$$

$$a^2 \left(\frac{64}{49} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{15}{49} = 1$$

$$a^2 = \frac{49}{15}$$

$$a = \pm \frac{7}{\sqrt{15}} = \pm \frac{7\sqrt{15}}{15}$$

$$2) \quad 25 \cdot \left(-\frac{8}{15}\right)^2 a^2 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(25 \cdot \frac{64}{225} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \left(\frac{64}{9} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{55}{9} = 1$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

Решение:  $a = \pm \frac{7\sqrt{15}}{15}$   
 $b = \pm \frac{7\sqrt{15}}{15}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6 - Продолжение.

$$\square: \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$ax + 10b = y^2 \quad y^2 = (ax)^2 + 20abx + 100b^2$$

$$x^2 + (ax)^2 + 20abx + 100b^2 = 4$$

$$x^2(1+a^2) + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow D = 400a^2b^2$$

$$\Rightarrow D = 400b^2$$

$$D = 100a^2b^2 - (100b^2 - 4)(1+a^2) = 0$$

$$100a^2b^2 - 100b^2 - 100b^2a^2 + 4 + 4a^2 = 0$$

$$200a^2b^2 - 100b^2 + 4a^2 - 4 = 0 \quad | :4$$

$$50a^2b^2 - 25b^2 + a^2 - 1 = 0$$

$$25b^2(2a^2 - 1) + a^2 - 1 = 0$$

$$-100b^2 + 4 + 4a^2 = 0$$

$$25b^2 + 1 - a^2 = 0$$

$$25b^2 - a^2 = -1$$

$$\square: \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+8)^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 100$$

$$x^2(a^2+1) + x(16+20ab) + 64+100b^2=0$$

$$D = (8+10ab)^2 - (a^2+1)(64+100b^2)$$

$$= 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 63a^2 - 100a^2b^2 - 63 - 100b^2 = 0$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 25b^2 - a^2 = 0$$

$$160ab - 64a^2 - 75b^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

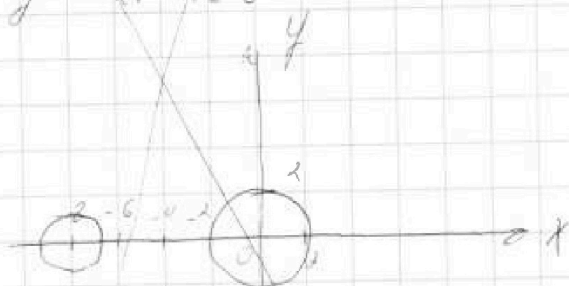
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



① Проверим  
по формуле  
для выпукл. круга.

$$\Rightarrow \|ax - y + kb\| = 0$$

$$y = -ax - kb$$



②  $\frac{a}{b}$  - не сокр.,  $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

возм.:  
Найд.  $m$ ,  $n$   $| a+b, m | a^2-6ab+b^2$   
гсд

$$\text{gcd} \\ (a, b) = 1 \\ \text{гсд}$$

$$(a+b, a^2-6ab+b^2) = m$$

$$a^2-6ab+b^2 = t$$

$$a+b = p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = \frac{t}{b^2}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{p}{b}$$

$$\text{пусть } m = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{(m+1)^2}{(m^2-6m+1)^2}$$

$$m^2-6m+1 = 2$$

$$m^2-6m+1 = m^2-6m+9-8 = (m-3)^2$$

$$\Delta = 36-4$$

$$m_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



⑥

Найти все  $a : \exists b$ :

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (2) \end{cases}$$

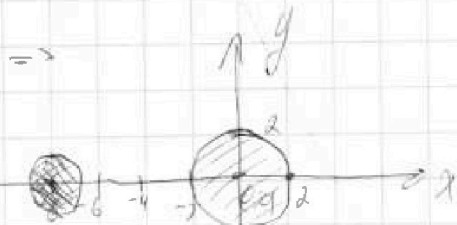
$$\begin{cases} ((x+8)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4)) \leq 0 & (1) \end{cases} \quad \begin{matrix} \sim \text{имеет} \\ 2 \text{ р-и} \end{matrix}$$

$$(1): ((x+8)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4)) \leq 0$$

$$\Rightarrow 1) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \neq 0 \end{cases}$$

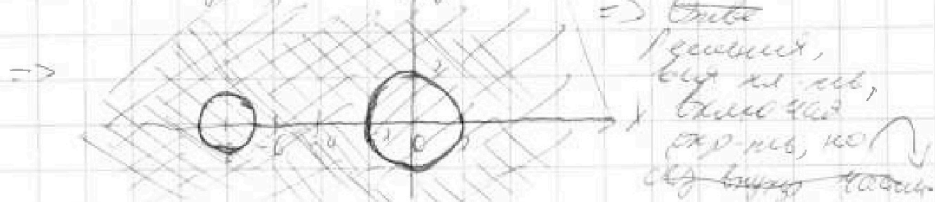
$x^2 + y^2 = 4$  - окружность в  $\pi$   
с центром в  $(0, 0)$   
и  $r = 2$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$  - окружность  
с центром в  $(-8, 0)$   
и  $r = 1$



$\Rightarrow$  и.и. пересекаются неск. раз.

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$\Rightarrow$  Ответ  
Решения,  
быть из  $\pi$ ,  
или из  $\pi$ ,  
или из  $\pi$ ,  
или из  $\pi$ ,  
или из  $\pi$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

②  $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$   $\frac{a}{b}$  - несократим

$m = \max$   $\begin{cases} a+b = mn \\ a^2-6ab+b^2 = mn, \quad n, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n}{1} \text{ - несократим} \end{cases}$

$$a^2 + 2ab + b^2 = m^2 n^2$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = mn = m^2 n^2 - 8ab$$

$$\Rightarrow 8ab : m$$

$$\gcd(a, b) = 1$$

$$\gcd(a+b, a^2-6ab+b^2-mn) = m, \quad \gcd(a, b) = 1$$

$$\gcd(m, m^2 n^2 - 8ab) = m$$

$$\Rightarrow \gcd(m, 8ab) = m$$

$$\gcd(a, b) = 1$$

$$\gcd(a+b, a^2-6ab+b^2) = m$$

$$(a+b, -8ab) = m$$

$$(a+b, 8ab) = m, \quad (a, b) = 1$$

$$\text{Так как } m | 8ab \Rightarrow m | 8ab$$

$$m | 8ab \text{ и } m | (a+b)$$

$$m | ab \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b = mn & a = mn - b \\ 8ab = m^2 \end{cases}$$

$$8b(mn-b) = m^2$$

$$8bmn - 8b^2 = m^2$$

$$8bmn - mn = 8b^2$$

$$\Rightarrow m | 8b^2 \Rightarrow m | 8a^2$$

$$\text{Так как } m | ab$$

$$\Rightarrow 64a^2b^2 = m^2 n^2$$

$$\frac{8(b^2+a^2)}{b(a+b)+10ab} = m$$

$$8(a-b)^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



②

$$\begin{cases} a+b=mn \\ a^2+b^2=mn \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 : mn$$

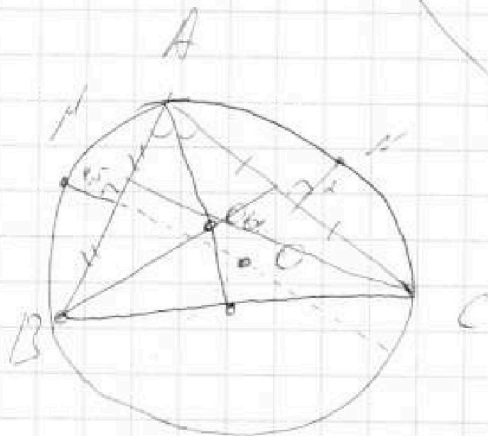
$$2(ab+b^2) : mn$$

$$4a^2 + 8ab + 4b^2 : mn$$

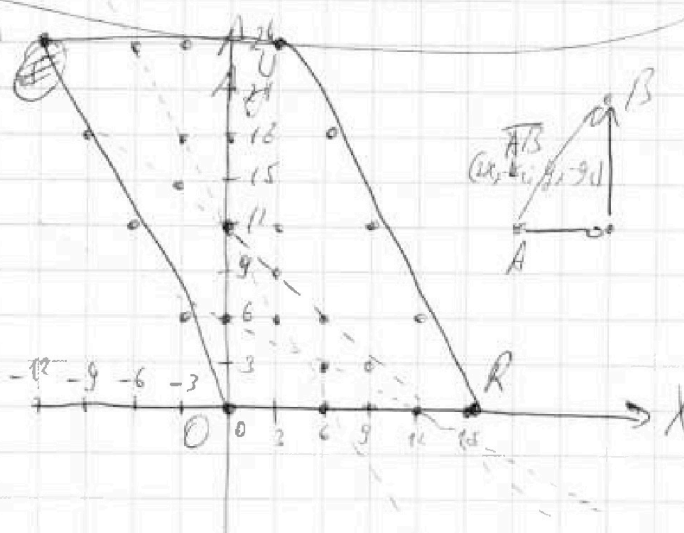
$$4a^2 - 8ab + 4b^2 : mn$$

$$2(a-b)^2 : mn$$

③



④



$$\begin{aligned} 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 &= 12 \\ 2x_1 + 8y &= 12 \end{aligned}$$

$$1) \quad 0 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq 12$$

$$8y = 12 - 2x$$

$$0 \leq 0 \leq 6$$

$$y = 1.5 - 0.25x/4$$

$$\text{или } 0 \leq x \leq 6$$

$$0 \leq x \leq 6 - \frac{8y}{2}$$

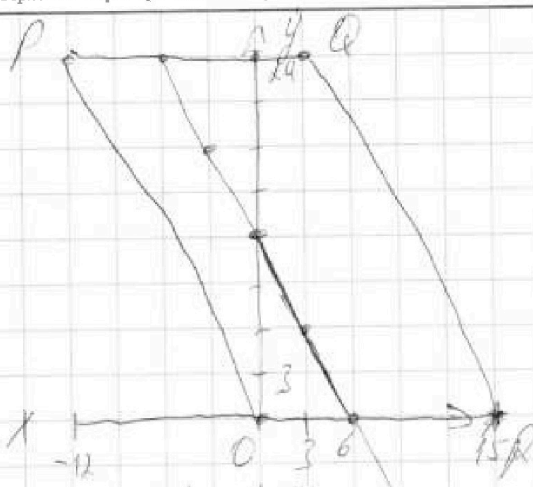
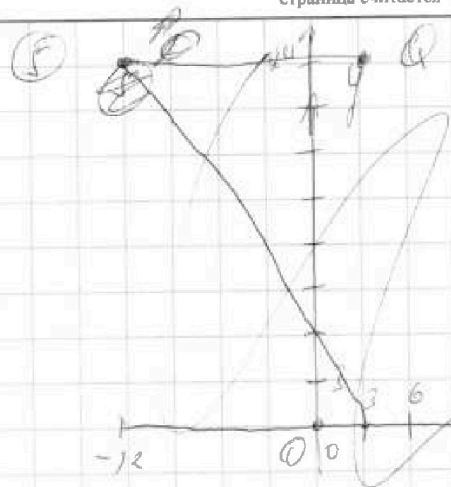
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{c|c|c} \delta x & 6 & 0 \\ \hline \delta y & 0 & 12 \end{array}$$

$$2\delta x + \delta y = 12$$

$\Rightarrow$  ~~так~~

Если  $(x_0, y_0) \in PQAO$

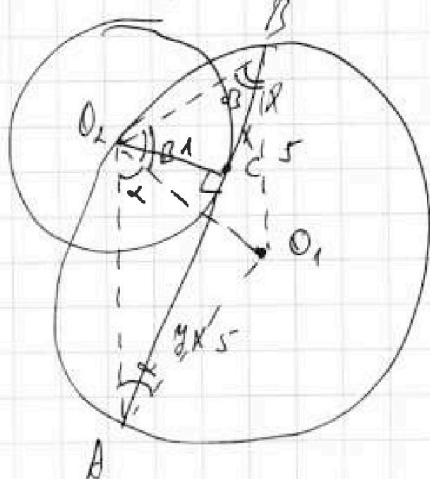
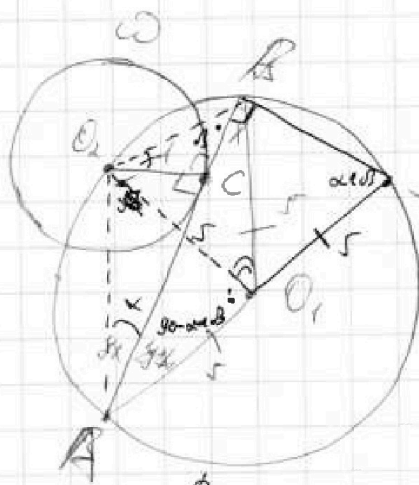
$\Rightarrow$  ~~так~~  $4x \in [0, 24]$

$\delta x \in [0, 15]$

$\delta y \in [-24, 24]$

$\delta x \in$

④ ③



$$R=5 \quad r=1 \quad \frac{AC}{CB} = ?$$

$$O_1 O_2 = R = 5$$

$$O_1 A = \sqrt{1 + 49x^2}$$

$$O_2 B = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\text{так как } \frac{AB}{\sin(\angle AOB)} = 2R = 2$$

$$\frac{2x}{\sin(\angle AOB)}$$

$$= 2 \Rightarrow 4x = \sin(\angle AOB)$$



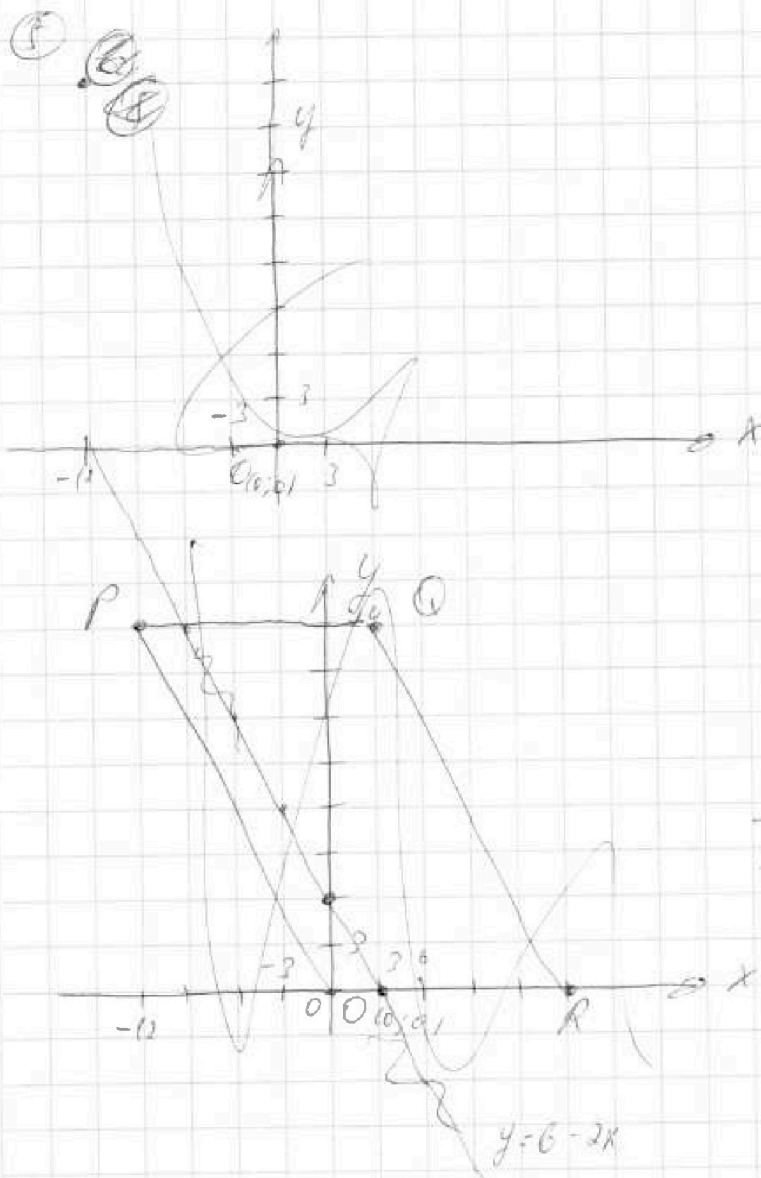
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Используем кол. 60.  
 $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$   
 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ :

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Решим:  $2x + y = 6$

$$\Rightarrow y = 6 - 2x$$

|   |   |   |
|---|---|---|
| x | 0 | 3 |
| y | 6 | 0 |

$$\Rightarrow 1x_2 - 1x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 6 \wedge (2x_1 + y_1 + 6) = 0$$

$$2x_2 + y_2 - 6 = 2x_1 + y_1 + 6$$

Решение:

Рассуждения

Пусть  $x_2 - x_1 = 6x, y_2 - y_1 = 6y$

$$\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$26x + 6y = 12$$

$$6y = 12 - 26x$$