



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
- ✓ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

- ✓ 6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- ✓ 7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab : 2^{14} \cdot 4^{10}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 4^{14}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 4^{34}$$

$\min(abc) = ?$

Решение:

т.к. мы хотим минимизировать
произведение 3 чисел и мы знаем, что
попарные произведения кратны 2^{14}
в разном степенях $\Rightarrow$

$$a = 2^{\alpha} \cdot 4^{\beta}$$

$$b = 2^{\gamma} \cdot 4^{\delta}$$

$$c = 2^{\epsilon} \cdot 4^{\zeta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{\alpha+\gamma} \cdot 4^{\beta+\delta} : 2^{14} \cdot 4^{10} \\ 2^{\gamma+\epsilon} \cdot 4^{\delta+\zeta} : 2^{14} \cdot 4^{14} \\ 2^{\alpha+\epsilon} \cdot 4^{\beta+\zeta} : 2^{20} \cdot 4^{34} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma \geq 14 \\ \gamma + \epsilon \geq 14 \\ \alpha + \epsilon \geq 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta + \delta \geq 10 \\ \delta + \zeta \geq 14 \\ \beta + \zeta \geq 34 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha + \gamma + \epsilon) \cdot 2 \geq 51$$

$$\Rightarrow (\alpha + \gamma + \epsilon) \geq 20,5; \alpha, \gamma, \epsilon \in \mathbb{Z}$$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \min(\alpha + \gamma + \epsilon) = 21$$

$$2(\beta + \delta + \zeta) \geq 64 \quad \beta, \delta, \zeta \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (\beta + \delta + \zeta) \geq 32 \Rightarrow \min(\beta + \delta + \zeta) = 32$$

$$\Rightarrow abc = 2^{\alpha+\gamma+\epsilon} \cdot 4^{\beta+\delta+\zeta} \Rightarrow \min(abc) = 2^{21} \cdot 4^{32}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 4^{32}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице!

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Портал QR-кода непустым!

Доказ:

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2}$$

$$(a+b):m$$

$$(a^2-bab+b^2):m$$

$$m \in \mathbb{N}$$

$$\text{max } m?$$

Решение:

$$a^2-bab+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$\rightarrow \begin{cases} ((a+b)^2 - 2ab) : m \\ (a+b) : m \end{cases}$$

$$\rightarrow 2ab : m$$

$$1) a : m$$

$$\Rightarrow b : m \text{ (т.к. } \text{НОД}(a, b) = 1)$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$\Rightarrow \text{невозможно}$$

$$2) b : m \Rightarrow a : m \text{ (т.к. } \text{НОД}(a, b) = 1)$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{невозможно}$$

$$3) 2 : m \Rightarrow \text{max}(m) = 2$$

$$\text{max } m = 2.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(Продолжение)

$$(2) \begin{cases} 4a + 4 = b^2 - 2b + 1 \\ a = 2x^2 + 2x \\ b = 2 - 4x \end{cases}$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 4 - 28x + 49x^2 - 4 + 14x + 1$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 484 + 12 \cdot 41 = 484 + 492 = 976 = 2 \cdot 488 = 2 \cdot 4 \cdot 122 = 8 \cdot 2 \cdot 61 = 16 \cdot 61$$

$$\Rightarrow x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 \pm \sqrt{61}}{41}$$

$$x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$x \in [\frac{3}{2}; +\infty) - \text{в данном случае}$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < \frac{3}{2}$$

$$22 + 4\sqrt{61} < 123$$

$$4\sqrt{61} < 101$$

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < 1$$

$$11 - 2\sqrt{61} < 41$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < 1$$

$$\Rightarrow 11 + 2\sqrt{61} < 41$$

$$2\sqrt{61} < 30$$

$$\text{Ответ: } \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}, \frac{2}{4}.$$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

Возможные ограничения:

$$(2x + 3)(x - 1) \geq 0$$

$$(2x^2 - 5x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(x - 3) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [3; +\infty)$$

$$(2x^2 + 2x + 1) \geq 0 \text{ - верно } \forall x; \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 3 - 4x} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$a = 2x^2 + 2x$$

$$b = 2 - 4x$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b+1} - \sqrt{a+1} = b$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b+1} = \sqrt{a+1} + b$$

$$\sqrt{a+1} \geq -b$$

$$a+b+1 = b^2 + a + 1 + 2b\sqrt{a+1}$$

$$(1) b = 0$$

$$\Rightarrow b = b^2 + 2b\sqrt{a+1}$$

$$\Rightarrow 2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 & (1) \\ 1 - b + 2\sqrt{a+1} & (2) \end{cases}$$

$$(2)$$

$$2\sqrt{a+1} = 1 - b \Rightarrow b \leq 1$$

$$2 - 4x \leq 1$$

$$4a + 4 = b^2 - 2b + 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 4x$$

$$4(2x^2 + 2x) = (2 - 4x)^2 - 2(2 - 4x) + 1$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$8x^2 + 8x = 4 - 28x + 16x^2 - 4 + 14x + 1$$

$$8x^2 + 8x = 16x^2 - 14x + 1$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 22x + 1 = 0$$

$$D = 484 - 16 = 320 = 4 \cdot 80 = 16 \cdot 20 = 16 \cdot 4 \cdot 5 = 8^2 \cdot 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{22 \pm 8\sqrt{5}}{2 \cdot 8} = \frac{11 \pm 4\sqrt{5}}{8}$$

$$\text{Ответ: } \frac{11 \pm 4\sqrt{5}}{8}$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x} \geq 4x - 2; x \geq \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 2x \geq 16x^2 - 28x + 4$$

$$14x^2 - 30x + 4 \geq 0$$

$$x \in (-\infty; \frac{15 - \sqrt{34}}{14}) \cup [\frac{15 + \sqrt{34}}{14}; +\infty)$$

и проверка

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Нормы QR-кода недопустимы!

$$(2) \quad a = \frac{15}{8} b$$

$$\frac{225}{64} b^2 + 1 = 25 b^2$$

$$\Rightarrow 1 = b^2 \left(25 - \frac{225}{64} \right) \Rightarrow b^2 = \left(\frac{1345}{64} \right)^{-1}$$

$$= \frac{64}{1345} = \frac{64}{63.11} \Rightarrow b = \pm \frac{8}{5\sqrt{55}}$$

$$\Rightarrow a = \pm \left(\frac{15}{8} \cdot \frac{8}{5\sqrt{55}} \right) = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \\ a = \pm \frac{1}{3\sqrt{5}} \end{cases}$$

это не всё /

(Ответ: $\pm \frac{3}{\sqrt{55}}$; $\pm \frac{1}{3\sqrt{5}}$.)

Таким же решением будет если

прямая пересекает окружность в 2 точках, а другая вообще не пересекает — не будет 2 решений,

$$\Rightarrow 1) \begin{cases} 1 + 16ab - 63a^2 - 100b^2 > 0 \\ a^2 + 1 < 25b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100b^2 < -13a^2 + 160ab + 1 \\ 25b^2 > a^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (10b - 8a)^2 < a^2 + 1 \\ 25b^2 > a^2 + 1 \end{cases}$$

$$25b^2 > (10b - 8a)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5b > 10b - 8a \\ 5b < 8a - 10b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > \frac{5}{8}b \\ a < \frac{15}{8}b \end{cases}$$

Ответ: $\pm \frac{3}{\sqrt{55}}$; $\pm \frac{1}{3\sqrt{5}}$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода непустима!



(Продолжение)

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad - \text{результат решения}$$

$$\Rightarrow (x+8)^2 + (ax+10b)^2 = 1$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1$$

$$x^2(a^2+1) + x(16+20ab) + 100b^2+63 = 0$$

$$\Delta = (16+20ab)^2 - 4(a^2+1)(100b^2+63) = 0$$

$$\Rightarrow 256 + 640ab + 400a^2b^2 - 4(100a^2b^2 + 63a^2 + 100b^2 + 63) = 0$$

иногда бывает так

$$256 + 640ab - 252a^2 - 400b^2 - 252 = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 640ab - 252a^2 - 400b^2 = 0 \quad | : 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 1 = 25b^2 \\ 100b^2 + 63a^2 - 160ab = 1 \end{cases}$$

$$(10b-8a)^2 - a^2 = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + 1 = (10b-8a)^2$$

$$\Rightarrow 25b^2 = (10b-8a)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5b = 10b-8a \\ 5b = 8a-10b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{8}b \quad (1) \\ a = \frac{15}{8}b \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{25}{64}b^2 + 1 = 25b^2 \Rightarrow 1 = 25(b^2 - \frac{1}{64}b^2) \Rightarrow \frac{25 \cdot 63 \cdot b^2}{64} = 1$$

$$\Rightarrow b = \pm \frac{8}{15\sqrt{4}} \Rightarrow a = \pm \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{15\sqrt{4}} \Rightarrow b^2 = \frac{64}{25 \cdot 4 \cdot 9} = \frac{64}{900}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



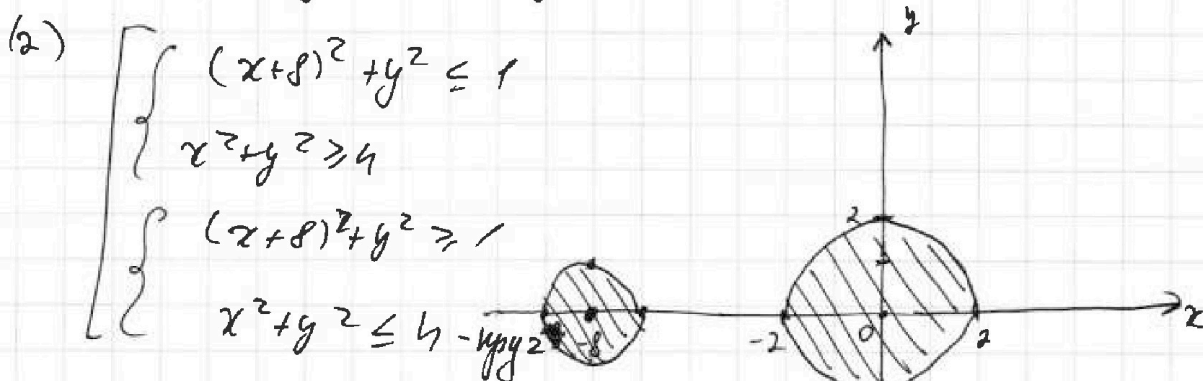
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \quad a - ? \text{ (2 решения)}$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b & \text{— лев. ф.-я. (график — прямая) (1)} \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$



$(x+8)^2 + y^2 \leq 1$ — круг, центр $(-8; 0)$

$R = 1$

$(x^2 + y^2) \geq 4$ — круг, центр $(0; 0)$

$R = 2$

2 решения будут только в том случае, если
прямая $y = ax + 10b$ будет касаться каждого из
кругов
т.е. — ей, иначе будет больше решений, либо меньше
 $\Rightarrow$ по теореме касаний из систем.

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 = 4$$

$$x^2(a^2 + 1) + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$D = 400a^2b^2 - 4(100b^2 - 4)(a^2 + 1) = 0$$

$$400a^2b^2 - 4(100a^2b^2 + 100b^2 - 4a^2 - 4) = 0$$

$$-400b^2 + 16a^2 + 16 = 0 \quad | : 16$$

$$a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \Rightarrow 25b^2 = a^2 + 1$$

↑
целых
решений

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$\triangle ABC$.

ω - опис. окруж. $\triangle ABC$;

$\sphericalangle AM = \sphericalangle MB$;

$\sphericalangle AN = \sphericalangle NC$;

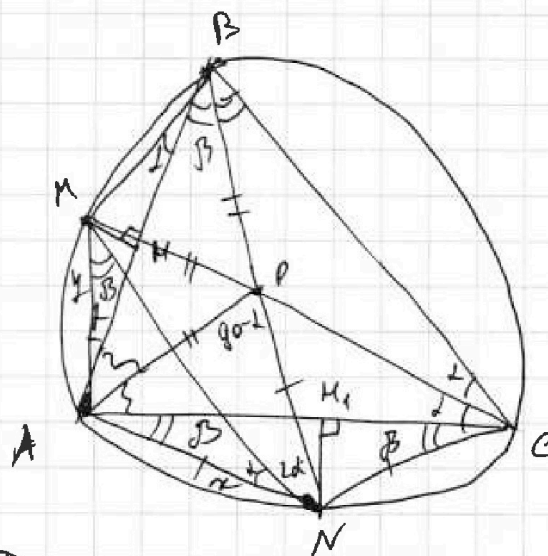
P - центр вписанной
окруж.

$MK = 4,5$; $M \in AB$;

$IN_1 = 2$; $N_1 \in AC$;

$KM \perp AB$; $NK_1 \perp AC$

$AP = ?$



Решение:

$$1) \text{ т. к. } \sphericalangle AM = \sphericalangle MB \Rightarrow \sphericalangle ACM = \sphericalangle MCB$$

$$\Rightarrow CM - \text{биссектриса } \sphericalangle ACB$$

$$\text{т. к. } \sphericalangle AN = \sphericalangle NC \Rightarrow \sphericalangle ABN = \sphericalangle CBN$$

$$\Rightarrow BN - \text{биссектриса } \sphericalangle ABC$$

$\Rightarrow \triangle AMB$ - равнобедренный (внешние углы равны)
 $\triangle ANB$ - равнобедренный (см. рис)

$\Rightarrow KM \cap NB = P$ (у вписанной окруж. м. касания биссектрис)

$$\Rightarrow \sphericalangle BAP = \sphericalangle CAP$$

Пусть $AN = x$; $AM = y$. Тогда из условия:

Пусть $\sphericalangle MBA = \alpha$; $\sphericalangle ACN = \beta$ $PN = AN = NC$; $AP = PB = PM$

$$\rightarrow \sphericalangle ANP = 2\alpha; \Rightarrow AP^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos 2\alpha = 2x^2(1 - \cos 2\alpha) =$$

$$= 2x^2 \cdot 2\sin^2 \alpha; \sin \beta = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{\sin \beta} \Rightarrow AP^2 = \frac{16 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha = \frac{9}{2y} \Rightarrow AP^2 = \frac{16 \cdot \frac{81}{4y^2}}{\frac{4}{x^2}} = \frac{81x^2}{y^2}$$
$$\sin \beta = \frac{2}{x}$$

$$\frac{AP}{\sin 2\alpha \cos \alpha} = \frac{x}{\sin \beta} \Rightarrow AP = 2x \sin \alpha = \frac{18x}{2y} = \frac{9x}{y}$$

Треугольник $MN \Rightarrow \angle ANM = \alpha$; $\angle AMN = \beta$ (вычислен)

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin \beta} = \frac{y}{\sin \alpha} \text{ (м. синусов)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{2}{x}} = \frac{y}{\frac{9}{2y}} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{2y^2}{9} \Rightarrow 4y^2 = 9x^2$$

$$\Rightarrow 2y = 3x \text{ (м. к. } y, x > 0)$$

$$\Rightarrow AP = 9 \cdot \frac{\frac{2}{3}y}{y} = 9 \cdot \frac{2}{3} = 6$$

Ответ: $AP = 6$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos^2 y} = 49$$

$$\Rightarrow 49 - 49 \cos^2 y = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos y$$

$$= \frac{(x^2 + y^2 - x^2) - 49x^2}{x^2 + y^2 - x^2}$$

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{b^2 + y^2 - 49x^2}{b^2 + y^2 - x^2} =$$

$$= 1 - \frac{48x^2}{b^2 + y^2 - x^2} = \frac{1 - 48x^2}{25 + y^2 - x^2}$$

$$\cos x = \frac{25 + y^2 - 49x^2}{10y}$$

$$\cos y = \frac{25 + y^2 - x^2}{10y}$$

$$\cos x = \frac{25 + y^2 - 49x^2}{10y}$$

$$\cos y = \frac{25 + y^2 - x^2}{10y}$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos y$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{(10y^2 - (25 + y^2 - 49x^2)^2)}}{10y}$$

$$\sin y = \frac{\sqrt{10y^2 - (25 + y^2 - x^2)^2}}{10y}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{10y^2 - (25 + y^2 - 49x^2)^2}}{\sqrt{10y^2 - (25 + y^2 - x^2)^2}} = 1$$

$$\Rightarrow 10y^2 - 49(25 + y^2 - 49x^2)^2 = 10y^2 - (25 + y^2 - x^2)^2$$

$$\Rightarrow 480y^2 = (4(25 + y^2 - 49x^2) - (25 + y^2 - x^2)) \cdot (4(25 + y^2 - 49x^2) + (25 + y^2 - x^2))$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

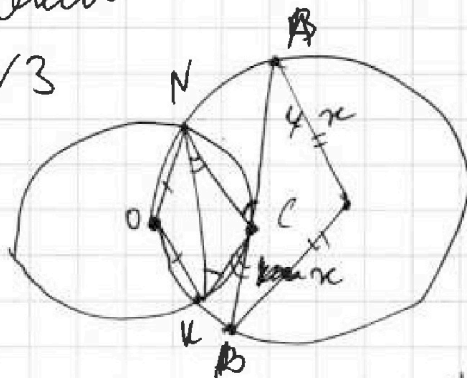
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 черновик

N3

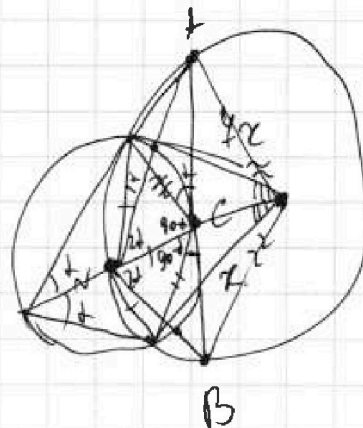
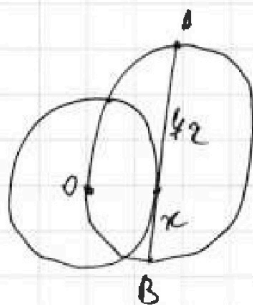


$$\frac{AI}{IB} = 4$$

$$R_w = 1$$

$$R_L = 5$$

$$AB = ?$$



$$8x = 10$$

$$\Rightarrow AB = 10$$

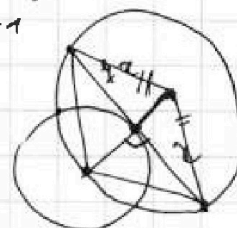
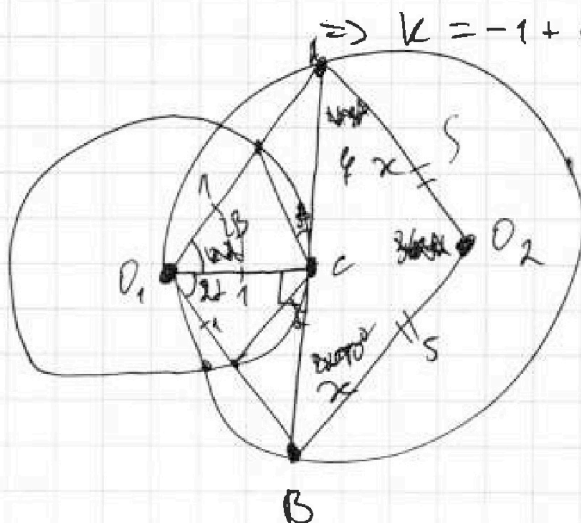
$$x \neq 10$$

$$k(k+2) = x^2$$

$$\Rightarrow k^2 + 2k - x^2 = 0$$

$$D = 4 + 4x^2 = 4(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow k = -1 + \sqrt{x^2 + 1}$$



$$L = \frac{(x^2 + 1) \cdot 4x}{8x} + \frac{(4x^2 + 1) \cdot x}{8x}$$

$$L = \frac{4}{8}x^2 + \frac{4}{8} + \frac{4x^2}{8} + \frac{1}{8} - \frac{4x^2}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



Дано:

$$D(0,0)$$

$$P(-12; 24)$$

$$Q(3; 24)$$

$$R(15; 0)$$

$$A(x_1; y_1);$$

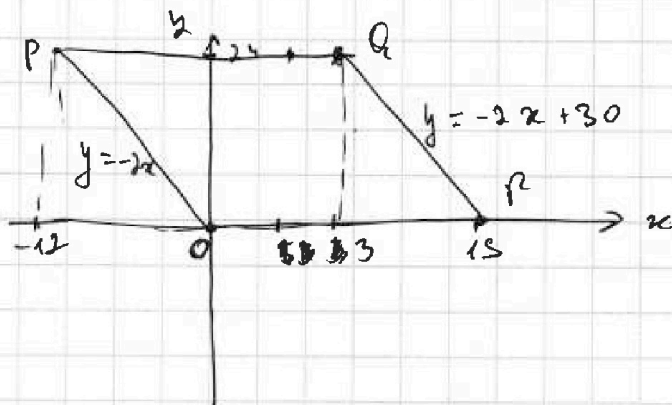
$$B(x_2; y_2)$$

$$x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12$$

код - во напр.?

(внутри $\triangle PQR$)



$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12$$

$$\Rightarrow (y_2 - y_1) : 2$$

$$-12 \leq x_1 \leq 15$$

$$-12 \leq x_2 \leq 15$$

$$0 \leq y_1 \leq 24$$

$$0 \leq y_2 \leq 24$$

$$-12 \leq x \leq 0 \Rightarrow y \geq 0$$

$$y \leq 24$$

$$2\Delta x + \Delta y = 12$$

N 4

$$\sin \angle AOC = \frac{4}{5}$$

$$\sin \angle BOC$$

$$\sin \angle AOC = 4 \sin \angle BOC$$

$$(OB-1)(OB+2) = x$$

$$OB \cdot OA$$

$$\frac{OB \cdot OA \cdot \sin \alpha}{OA \cdot OB \cdot \sin \beta}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BC} = 1$$

$$\triangle OAC \sim \triangle OBC$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos^2 y} = \frac{4}{5}$$

$$\cos y = \frac{12 + y^2 - x^2}{2xy}$$

$$\cos z = \frac{12 + y^2 - 4x^2}{2xy}$$

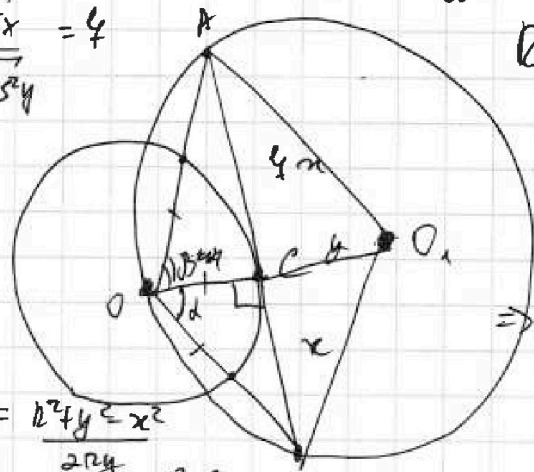
$$4OB \sin \alpha = OA \cdot \sin \beta$$

$$4OB = OA$$

$$4OB \cdot \sin \alpha = OA \cdot \sin \beta \quad R_{\omega} = 1$$

$$R_{\omega} = 5$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{4}{5}$$



$$(OB+1) \cdot (OB+4)$$

$$(OB+1)^2 = x^2$$

$$\Rightarrow OB+1 = x$$

$$\Rightarrow OB = x-1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

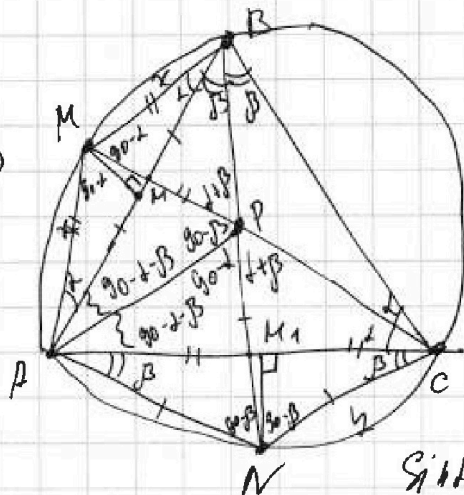
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4 (Черновик)



$$v_{AM} = v_{MB}$$

$$v_{AN} = v_{NB}$$

$$AP = ?$$

$$MM_1 = \frac{9}{2}$$

$$NM_1 = 2$$

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{6}{\sin \alpha}$$

$$\frac{2}{\sin \beta} = \frac{9}{2 \sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{MM_1}{MP} \Rightarrow MP = \frac{MM_1}{\sin \alpha} = \frac{9}{\frac{2}{9}} = \frac{81}{2}$$

$$\frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha} \Rightarrow AB = 2x \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{2 \cos \beta}{x}$$

$$\cos \alpha = \frac{AP^2 = 2 \cdot 81}{4 \sin^2 \alpha} - \frac{2 \cdot 81 \cdot \cos 2\beta}{4 \sin^2 \alpha}$$

$$AP = y = \frac{\sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{4x^2 - 81}}{2x} = \frac{81}{2 \sin^2 \alpha} (1 - \cos 2\beta) = \frac{81 \cdot \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}$$

$$\frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha} \Rightarrow AB = 2x \cos \alpha; 4 = \frac{x^2 \cdot 2 \cos \alpha}{2x \cos \alpha} + \frac{x^2 \cdot 2 \cos \alpha}{2x \cos \alpha} - x^2 \cos^2 \alpha$$

$$4 = x^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow x \sin \alpha = 2$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{x}; \sin \beta = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 - 4}{4x^2 - 81} = \frac{4}{y^2}$$

$$\Rightarrow AP^2 = 81 \cdot \frac{4}{y^2} = \frac{16 \cdot 81}{y^2}$$

$$\Rightarrow y^2(y^2 - 4) = 4(4x^2 - 81)$$

$$\frac{\sqrt{4x^2 - 81}}{2x} \cdot \frac{\sqrt{y^2 - 4}}{y}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (a^2+b^2+ab):m \end{cases} \quad ((a+b)^2 - 3ab):m$$

$$\Rightarrow 3ab:m$$

$$3ab:m$$

$$(a+b):m$$

$$(a+b):2 \Rightarrow ((a+b)^2 - 3ab):2$$

$$1) a:m \quad (a,b)=p$$

$$\Rightarrow b:m$$

$$2) b:m \Rightarrow a:m$$

$$(a,b)=1 \text{ кор}$$

$$3) a:m \quad (a,b)=1$$

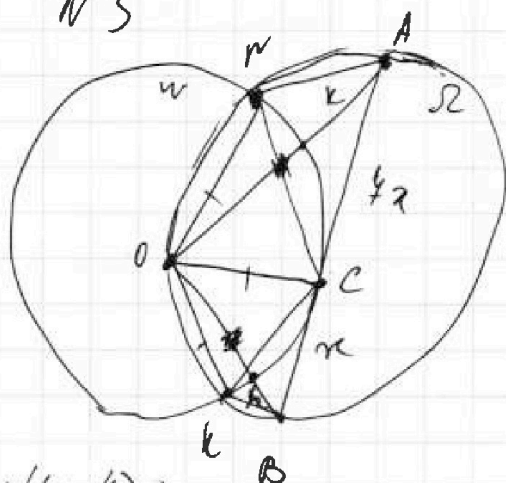
$$b:m \quad - \text{кор}$$

$$\Rightarrow 3:m \Rightarrow \text{кор} = 2$$

$$\text{кор}(m)=8$$

Второй инвариант: 8

N3



$$\frac{n(n+1)}{k(k+1)} = 49$$

$$k(k+2) = k(n+2)$$

$$k(k+2) = 49n^2$$

$$n(n+2) = n^2$$

$$\Rightarrow \frac{k(k+2)}{n(n+2)} = 49$$

$$\frac{AC}{CB} = 4$$

AB-?

$$R_w = 1$$

$$R_n = 5$$

$$k^2 - 4n = 3(k+2)$$

$$n(n+1) = n^2$$

$$k(k+1) = 49n^2$$

$$\Rightarrow \frac{k(k+1)}{n(n+1)} = 49$$

$$\Rightarrow n^2 + n = 49k^2 + 49k$$

$\Rightarrow$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

N1

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 7^{14}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$\min(ab, bc, ac) = ?$$

$$abc = k \cdot m \cdot 2^{2+8+8} \cdot 7^{3+4+6}$$

↓
min

$$k \cdot m = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+8 \geq 14 \\ 3+4 \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8+8 \geq 14 \\ 4+6 \geq 14 \\ 2+6 \geq 20 \\ 3+6 \geq 34 \end{cases}$$

$$2, 8, 8 \in \mathbb{Z}$$

$$2(2+8+8) \geq 20+14+14$$

$$2+8+8 \geq 25,5 \quad 51$$

$$\Rightarrow 2+8+8 \geq 26$$

$$2(3+4+6) \geq 24+34=64$$

$$\Rightarrow 3+4+6 \geq 32 \Rightarrow \min(2+8+8) = 26$$

$$\min(3+4+6) = 32$$

$$\min(abc) = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{32}$$

N2

$$a \neq b, \gcd(a, b) = 1, a+b$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$m \rightarrow \max$$

$$m = ?$$

$$a^2 \pm 6ab + b^2 \mid (a+b) \cdot m$$

$$((a-b)^2 - 4ab) \mid m$$

$$((a+b)^2 - 8ab) \mid m, (a+b) \mid m \Rightarrow 8ab \mid m$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 6 (Продолжение)

$$1) (x+y)^2 + (ax+10b)^2 = 1$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 + 100ab^2 = 1$$

$$x^2(a^2+1) + x(16+20ab) + 100b^2 + 63 = 0$$

$$(16+20ab)^2 - 4(a^2+1)(100b^2+63) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = ax + 10b \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (ax+10b)^2 = 4 \\ x^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0 \\ x^2(a^2+1) + 20abx + 100b^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 400a^2b^2 - 4(a^2+1)(100b^2-4) = 0 & (1) \\ (16+20ab)^2 - 4(a^2+1)(100b^2+63) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 400a^2b^2 - 4(100a^2b^2 - 4a^2 + 100b^2 - 4) = 0$$

$$16a^2 - 400b^2 + 16 = 0 \quad | : 16$$

$$a^2 - 25b^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 1 = 25b^2$$

(2)

$$256 + 640ab + 400a^2b^2 - 4(100a^2b^2 + 63a^2 + 100b^2 + 63) = 0$$

$$256 + 640ab - 252a^2 - 400b^2 - 252 = 0$$

$$640ab - 252a^2 - 400b^2 + 4 = 0 \quad | : 4$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 63a^2 + 100b^2 - 160ab = 1$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 25b^2 \Rightarrow 100b^2 = 4a^2 + 4 \\ 63a^2 + 100b^2 - 160ab = 1 \quad 67a^2 - 160ab + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 25214} \\ \underline{252} \\ 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 25b^2 \\ 63a^2 + 100b^2 - 160ab = 1 \end{cases}$$

$$64a^2 - 160ab + 100b^2$$

$$10 \cdot 2 \cdot 8$$

$$(8a - 10b)^2 = 64a^2 - 160ab + 100b^2$$

$$(8a - 10b)^2 - a^2 = 1$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = (8a - 10b)^2 \\ a^2 + 1 = 25b^2 \end{cases}$$

$$25b^2 = (8a - 10b)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5b = 8a - 10b \Rightarrow 15b = 8a \\ 5b = 10b - 8a \Rightarrow 8a = 5b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{15}{8}b \\ a = \frac{5}{8}b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1) \frac{225}{64}b^2 + 1 = 25b^2$$

$$1600 - 225 = 1375$$

$$\Rightarrow b^2 \left(25 - \frac{225}{64} \right) = 1$$

$$35^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$$

$$b^2 = \frac{64}{1375}$$

$$1375 = 5^3 \cdot 11$$

$$\Rightarrow b = \pm \frac{8}{5\sqrt{55}}$$

$$\Rightarrow a = \pm \left(\frac{15}{8} \cdot \frac{8}{5\sqrt{55}} \right) = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$22 - 4\sqrt{61}$$

$$22 - 4\sqrt{61} < 123$$

$$-101 - 4\sqrt{61} < 0$$

$$22 + 4\sqrt{61} < 123$$

$$4\sqrt{61} < 101$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

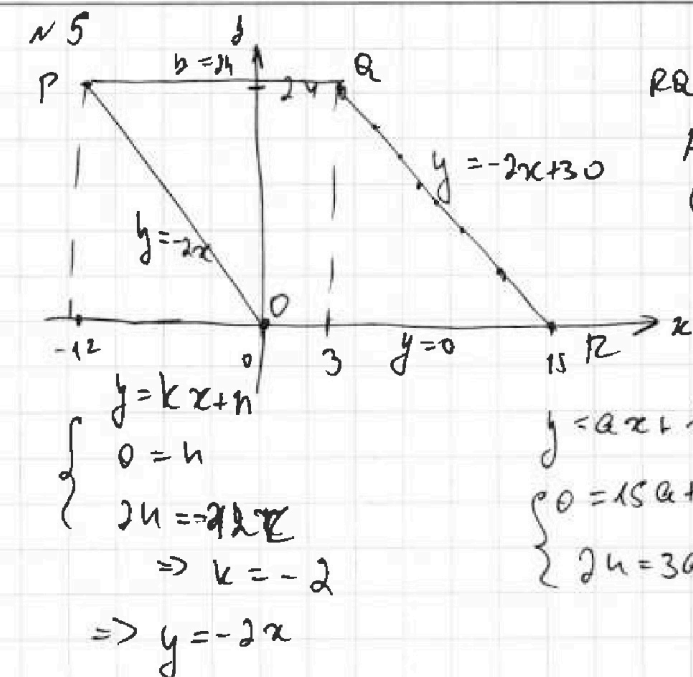
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



РР 20-пар-и

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$

кон. 60 пар.?

$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$\Rightarrow (y_2 - y_1) : 2$$

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} 0 = 15a + b \\ 24 = 3a + b \end{cases} \quad b = -15a$$

$$\Rightarrow -12a = 24$$

$$\Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow b = 30$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$(y_2 - y_1) : 2$$

$$x \in [12; 15]$$

$$2(-2x_2 + 2x_1)$$

$$y \in [0; 24]$$

$$2(x_2 - x_1) + (2x_1 - 2x_2) = 12$$

-not true.

№ 6

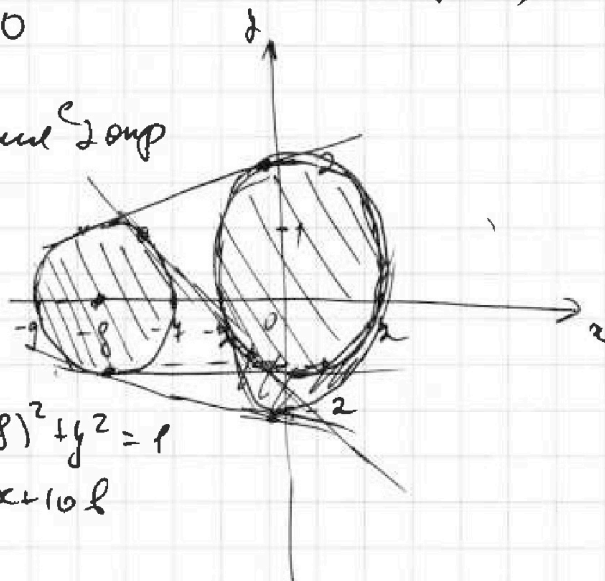
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \end{cases}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$a = ? \{ \exists b \hookrightarrow \exists 2 \text{ рещ.} \}$

$$y = ax + 10b$$

касание 2 окруж



$$1) \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ y = ax + 10b \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 8x + 13} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x+1)(x-3) \Rightarrow (2x+1)(x-3)$$

$$\frac{11-4\sqrt{5}}{11} > \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{(2x+1)(x-3)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

ОДЗ:

$$x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (3; +\infty)$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$$

$$\sqrt{b+a+1} - \sqrt{b+1} = a$$

$$a = 2 - 4x$$

$$b = 2x^2 + 2x$$

$$a = -\sqrt{b+1}$$

$$\sqrt{b+1+a} = a + \sqrt{b+1}$$

$$b+1+a = a^2 + 2a\sqrt{b+1} + b+1$$

$$\Rightarrow a = a^2 + 2a\sqrt{b+1}$$

$$8x^2 + 8x + 3 =$$

$$= (2-4x)^2 - 4 + 14x$$

$$8x^2 + 8x + 3 = -28x + 49x^2 + 14x$$

$$8x^2 + 8x + 3 = 49x^2 - 14x$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 3$$

$$2\sqrt{b+1} = 1-a$$

$$4b+4 = a^2 - 2a + 1$$

$$4b+3 = a^2 - 2a$$

$$8x^2 + 8x + 3 = 49x^2 - 28x + 4 - 4 + 14x = 2 \cdot 22^2$$

$$8x^2 + 8x + 3 = 49x^2 - 14x$$

$$\Rightarrow \text{Окончательно } \frac{11 \pm 11\sqrt{2}}{41}$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{22 \pm 22\sqrt{2}}{2 \cdot 41} = \frac{11 \pm 11\sqrt{2}}{41}$$

$$\frac{11-11\sqrt{2}}{41} < 0$$