



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

значит отметить, что те числа, на которые делится
 ab ; bc ; ac — это и есть минимальные значения
 ab ; bc ; ac соответственно, тогда перемножим
их и получим ответ

$\sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}}$ — но видно, что получится
целой только из 2^{51} , но если a, b, c натуральные, то есть abc — натуральное,
нужно поделить в левую сторону сдвинутого так в левую
минимальные значения, то $\sqrt{2^{51}}$ — минимальное значение, то
 $\sqrt{2^{51}}$ не имеет дельты, тогда берем $\sqrt{2^{52}} = 2^{26}$

получается, что $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$. теперь стоит обратиться к
условию и проверить верность условия. тогда можно на это
действовать попарно проверять, то да проверяем все три
этих чисел делится ли делится ли из попарно, то да, то да, то да
но здесь видно, что $7^{32} \neq 7^{37}$, то 7^{32} не, то есть $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$
поддерживает условие — каждый пример, тогда это было бы

$$\text{пусть } a = 2^9 \cdot 7^{15}$$

$$b = 2^6$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{22}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{15}$$

$$\Rightarrow ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{22}$$

$$\Rightarrow bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\Rightarrow ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

значит, вариант $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ — верный, удовлетворяет
всем условиям и минимальным.

$$\text{Ответ: } abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) подберем дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}, \text{ тогда}$$

$$\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \text{ отсюда следует, что}$$

если дробь сокращается на m , то 1) $m \leq a+b$

2) $(8ab)$ и $(a+b)$ имеют общий делитель m

т.к. в знаменателе сумма квадратов чисел и
какого-то числа, то сокращение возможно только в
случае, когда это число имеет общий делитель с чисел-
телем, тогда

найдем наибольший общий делитель чисел
 $(8ab)$ и $(a+b)$

1) $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь, $(a, b) = 1$, тогда a и b взаимно
просты числа. сумма взаимно простых чисел не делится
ни на одно из этих чисел. представим $(a+b)$ в виде произвед.

$$a+b = p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \dots \quad \text{или их произвед.}$$

или их произвед.
или не равно
 a или b

$$8ab = 8 \cdot a \cdot b$$

Значит единственный возможный общий делитель - это 2^x
 $x \in \mathbb{N}$, $x \leq 3$, тогда максимальный делитель - 8
Значит, $m = 8$ - наибольший общий делитель

Ответ: $m = 8$

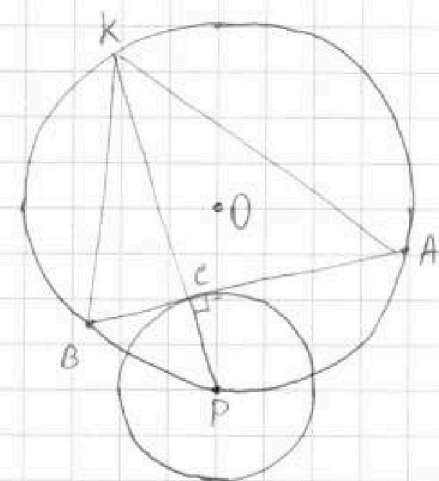
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



P - центр окр. Ω

O - центр окр. Σ

$PC \cap \Sigma = K$

Пусть $BC = x$, то $AC = 7x$, тогда
 $AB \cap PK = C$ - точка пересечения хорд в окр., то

$$BC \cdot AC = PC \cdot CK$$

$$x \cdot 7x = 1 \cdot CK$$

$$CK = 7x^2$$

PC - радиус,
прямая AB касается
 $PC \perp AB$

в $\triangle ACK$ $\angle C = 90^\circ$ - по вписанной дуге,
по т. Пифагора

$$AK = \sqrt{49x^4 + 49x^2} = 7x\sqrt{x^2 + 1}$$

в $\triangle BCK$ $\angle C = 90^\circ$ по вписанной дуге, то по т. Пифагора

$$BK = \sqrt{49x^4 + x^2} = x\sqrt{49x^2 + 1}$$

окр. Σ описана около $\triangle ABK$

$$R_{\text{окр.}} = \frac{BK \cdot AK \cdot AB}{4 S_{\triangle ABK}}$$

$$S_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} CK \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 7x^2 \cdot 8x$$

$$R_{\text{окр.}} = 5 - \text{по условию} \quad R = 5 = \frac{x \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot 7x \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot 8x}{2 \cdot 7x^2 \cdot 8x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 = \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1}$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \quad x = 1 - \text{корень}$$

$$\begin{array}{r|l} 49x^4 + 50x^2 - 99 & x-1 \\ \hline 49x^4 - 49x^2 & 49x^3 + 49x^2 + 99x + 99 \end{array}$$

$$49x^3 + 50x^2$$

$$49x^3 - 49x^2$$

$$99x^2$$

$$99x^2 - 99x$$

$$99x - 99$$

$$99x - 99$$

$$0$$

$$49x^3 + 49x^2 + 99x + 99 = 0$$

$$x = -1 - \text{корень}$$

$$\begin{array}{r|l} 49x^3 + 49x^2 + 99x + 99 & x+1 \\ \hline 49x^3 + 49x^2 & 99x + 99 \end{array}$$

$$0 + 99x + 99$$

$$99x + 99$$

$$0$$

$$(49x^2 + 99)(x-1)(x+1) = 0$$

$x = 1$ - единственный неотрицательный корень, то

$$AB = BC + AC = x + 7x = 8x = 8 \cdot 1 = 8$$

Ответ: $AB = 8$

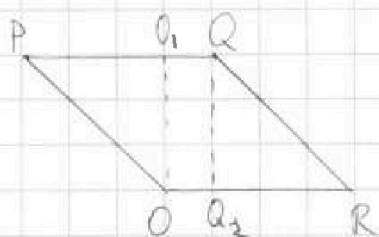
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$O(0;0) \quad R(15;0)$$

$$P(-12;24) \quad Q(3;24)$$

Итак, опустим перпендикуляр из O
на PQ и из Q на OR

- $O_1O = 24$ - расстояние между пр. OR и PQ $24 - 0 = 24$
- $OQ_2 = 3$ - x координата $m O_1$ и x коорд $m Q$ $3 - 0 = 3$
- $PO_1 = PQ - O_1Q = 15 - 3 = 12$ $| -12 - 3 | = 15$

4. Значит, в $\triangle PO_1O$ и в $\triangle QO_2R$ 12 подобных $\triangle$ с целочисленными катетами, тогда m

$$\frac{PO_1}{OQ_2} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \quad \text{посчитаем кол-во целочисленных точек}$$

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \dots}_{(1 \text{ и } 3) \quad (1 \text{ и } 3) \quad (1 \text{ и } 3)} \\ 12 + 1 = 13$$

$$\sum_{ar} = \frac{2 \cdot 1 + 2(B-1)}{2} \cdot 13 = \frac{2 + 12 \cdot 2}{2} \cdot 13 = 169$$

кол-во целочисленных точек в прямоугол

$$O_1QO_2O \quad (O_1Q - 1) \cdot 24 = 2 \cdot 24 = 48$$

Итого в n -ме $169 + 48 = 217$ целочисленных точек

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$, т.е. все прямоугольники с
целыми сторонами содержат по 2 целых точки
вариантов сторон 6

может поместиться только 2 прямоугол: 10×2 и 12×2
по 1 прямоугол: 4×8 и 6×6

Всего 6 вариантов найден может быть использован независимо
т.к. можно поместить и в отрезавшуюся часть, то
прибавляется еще столько же вариантов по независимости

$$2 \cdot 169 + 12 \cdot 2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

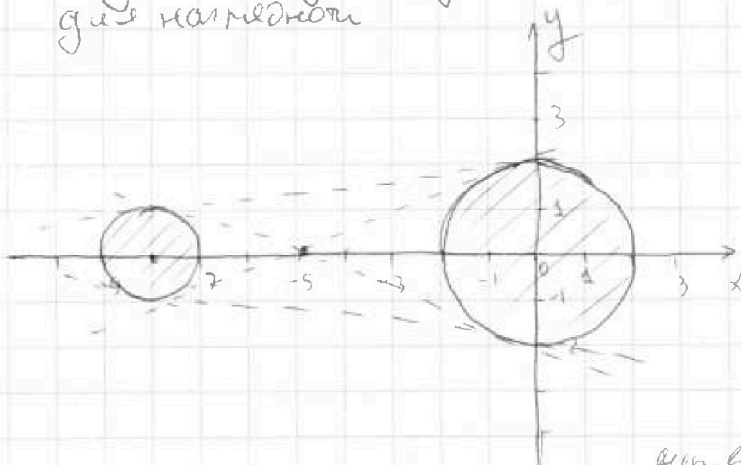
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

итак, рассмотрим (второе) кр. 6

$$(x+8)^2 + y^2 = 1 \text{ - ур. окружности } R=1 \text{ центр } (-8; 0)$$

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ - ур. окружности } R=2 \text{ центр } (0; 0) \text{ построим для наглядности}$$



возьмем точки

$$A(0; 0), B(-8; 0)$$

$$\text{и } C(5; 5)$$

тогда видно, что

в т. А и В касание

линейного касания

отличается

в т. С касание

точка

кас. в. не выходит за пределы

окружности

следовательно если прямая $y = ax + 10b$ будет касаться обеих окружностей, то будет иметь 2 решения системы

$$1) \text{ приравняем } y = ax + 10b \text{ и } (x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2(1+a^2) + x(16-20ab) + 100b^2 + 63 = 0 \quad a \neq -1$$

$$D = 4(100a^2b^2 - 320ab - a - 100b^2)$$

касание, а не пересечение в центре $D=0$

$$100a^2b^2 - 320ab - a - 100b^2 = 0$$

$$2) \text{ приравняем } y = ax + 10b \text{ к } x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2(a^2+1) - 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$D = 4(100a^2b^2 - 100ab^2 - 100b^2 + 4a + 4) \text{ касание только в}$$

центре $D=0$

$$100a^2b^2 - 100ab^2 - 100b^2 + 4a + 4 = 0$$

$$\text{решим систему } \begin{cases} 100a^2b^2 - 100ab^2 - 100b^2 + 4a + 4 = 0 \\ 100a^2b^2 - 320ab - a - 100b^2 = 0 \end{cases}$$

$$100ab^2 - 320ab - (5a+4) = 0 \quad D = 4^2 \cdot 10^2 a^2 + 4^2 \cdot 10^2 + 2000a$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D_{\text{кр}} = 4^4 \cdot 10^2 a^2 + 2000a + 4^2 \cdot 10^2 = 160^2 a^2 + 2000a + 1600$$

ног. Везде $b_1, b_2 = \frac{1600}{200}$

$$D=0 \rightarrow 160^2 a^2 + 2000a + 1600 = 0 \rightarrow 4 \cdot 10^6 a^2 + 4 \cdot 4^2 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^2 = 4 \cdot 10^4 (100 - 64) = 1200^2$$

$$a_1 = \frac{-2000 \pm 1200}{320} = \frac{-800}{320} = -2,5$$

$$a_2 = \frac{-3200}{320} = -10$$

$$b_{\text{кр}} = \frac{160a \pm \sqrt{160^2 a^2 + 2000a + 1600}}{200a}$$

итого всего 4 значения варианта

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^{14} \cdot 7^{10} \text{ min}$
 $bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \text{ min}$
 $ac: 2^{20} \cdot 7^{37} \text{ min}$

~~ab: 2^{14} \cdot 7^{10}~~
~~bc: 2^{17} \cdot 7^{17}~~

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$
 $\frac{c}{a} = 2^3 \cdot 7^7$
 $c = a \cdot 2^3 \cdot 7^7$

НОК

$\frac{a}{b} = 2^3 \cdot 7^{20}$

$b = \frac{a}{2^3 \cdot 7^{20}} \quad a = b \cdot 2^3 \cdot 7^{20}$

$\frac{c}{b} = 2^6 \cdot 7^{27}$

$b = \frac{c}{2^6 \cdot 7^{27}}$

~~$abc = 2^{23} \cdot 7^{30} \cdot \frac{c}{2^3 \cdot 7^7} \cdot \frac{a}{2^3 \cdot 7^{20}}$~~

~~$abc = ac \sqrt{b^2} = 2^{20} \cdot 7^{37} \sqrt{\frac{ac}{2^9 \cdot 7^{17}} \cdot \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^9 \cdot 7^{20}}}$~~

$a = 2^{10} \cdot 7^7$
 $b = 2^7$
 $c = 2^{10} \cdot 7^{30}$

$a+c \geq 20$
 $b+c \geq 17$
 $a+b \geq 14$

$a+b+2c \geq 37$
 $2c \geq 23$
 $c \geq 11,5$
 $c_{\min} = 12$

$c = 2^{11}$
 $b = 2^6$
 $a = 2^9$

$a+c \geq 31$
 $2b \geq 11$
 $b \geq 5,5$
 $b \geq 6 \text{ min}$

$2a+b+c \geq 34$
 $2a \geq 12$
 $a \geq 6$

$2^{26} \cdot 7^{32}$

$a+c \geq 37$
 $b+c \geq 17$
 $a+b \geq 10$

$2c \geq 44$
 $b \geq 0$
 $2a \geq 30$
 $c \geq 22$
 $a \geq 15$

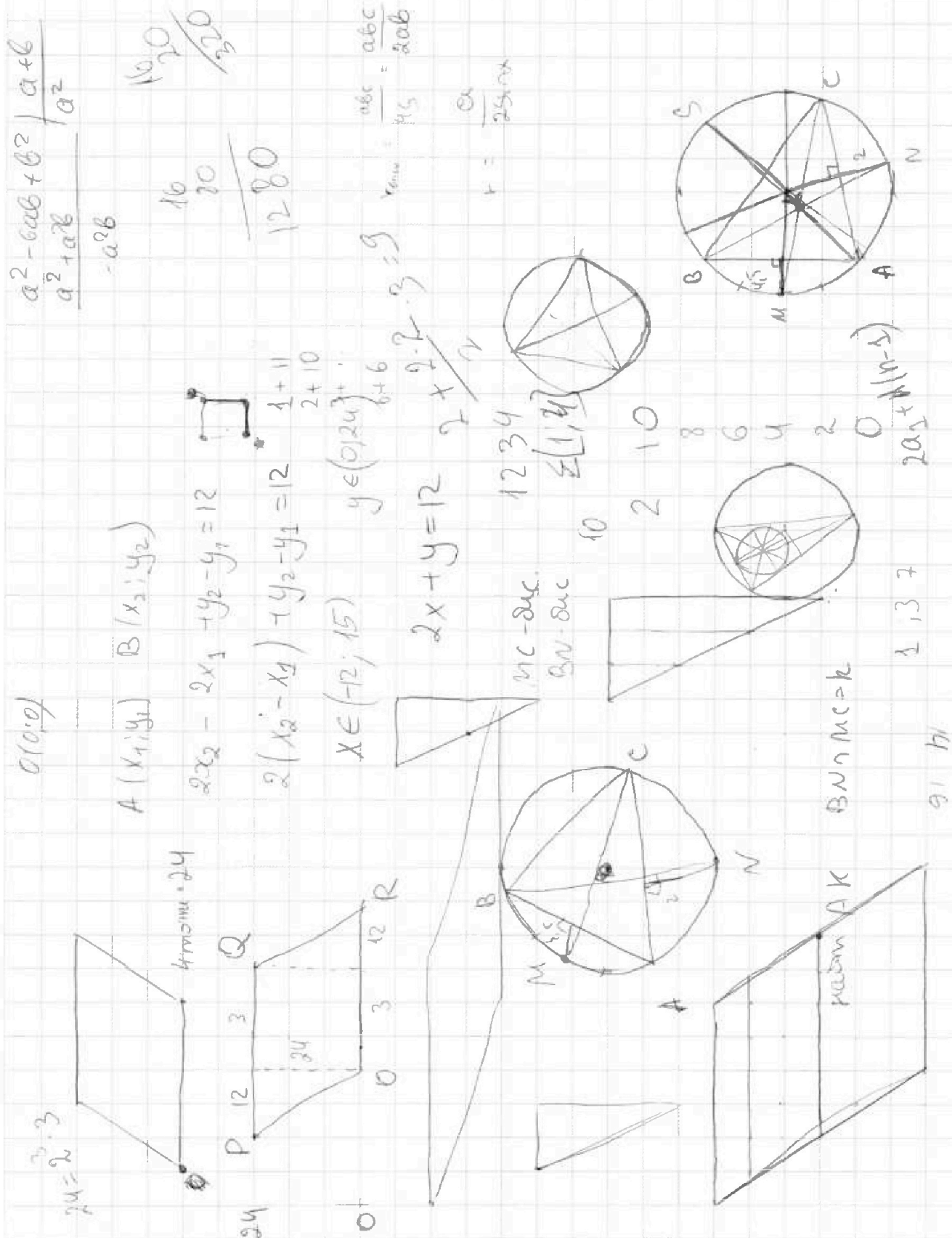
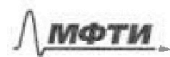
$c = 22$
 $a = 15$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$100 = 49x^2 + 49x^4 + 1 + x^2$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 49x^4 + 50x^2 - 99 & x-1 \\ \hline 49x^4 - 49x^2 & \\ \hline 49x^2 + 50x^2 & \\ 49x^2 - 49x^2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 49x^3 + 49x^2 + 99x + 99 & x+1 \\ \hline 49x^3 + 49x^2 & \\ \hline 99x + 99 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99x^2 - 99 \\ 99x^2 - 99x \\ \hline 99x - 99 \end{array}$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$49x^3 + 49x^2 + 99x + 99 = 0$$

$$x = -1$$

$$x = -1 - \text{корень}$$

$$49x^3 + 49x^2 + 99x + 99 = 0$$

$$49x^3 + 49x^2 + 99x + 99 = 0$$

$$\begin{array}{l} x < -1 \\ x > -1 \\ x < -1 \\ x > -1 \end{array}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 2x - 2$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2 \geq 2x$$

$$\begin{array}{r} 181 \\ 2 \\ \hline 82 \end{array}$$

$$8 - 4 = 4$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$8x^2 + 2x + 1 > 0$$

$$8x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$8x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\sqrt{8x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

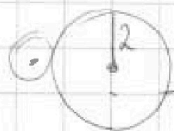
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = ax + 10b$$

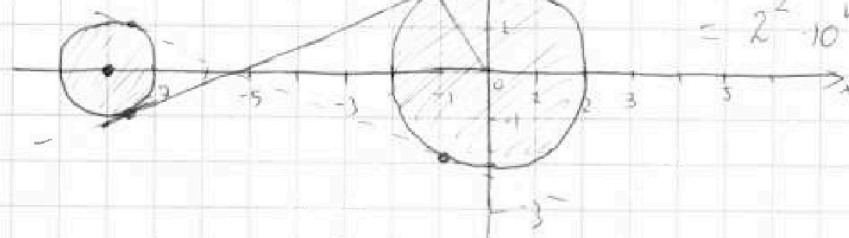


$$\begin{array}{r} 1000 \ 40 \\ 80 \ 2 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$160^2 a^2 + 2000a + 1600$$

$$4 \cdot 10^6 - 4 \cdot 4^4 \cdot 10^4 \cdot 4^2$$

$$4 \cdot 10^4 (100 - 4^8) = 4 \cdot 10^4 \cdot 36$$



$$y = ax + 10b$$

$$a^2 x^2 + 100b^2 - 20abx$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ 4 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2(a+1) - 20abx + 100b^2 = 0$$

$$x^2(1+a) + x(16-20ab) + 100b^2 + 63 = 0$$

$$D = 256 - 1280ab + 400a^2b^2 - 4a - 400b^2$$

$$D = 0$$

$$400a^2b^2 - 1280ab - 4a - 400b^2 = 0$$

$$100a^2b^2 - 320ab = a = 100b^2 = 0$$

$$100ab^2(a+1) = a(320b+a)$$

$$2) D = 400a^2b^2 - 4(a+1)(100b^2-4) =$$

$$D = 0 \quad 100a^2b^2 - 100ab^2 - 100b^2 + 4a + 4 = 0$$

$$100ab^2 - 4a - 4 - 320ab - a = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

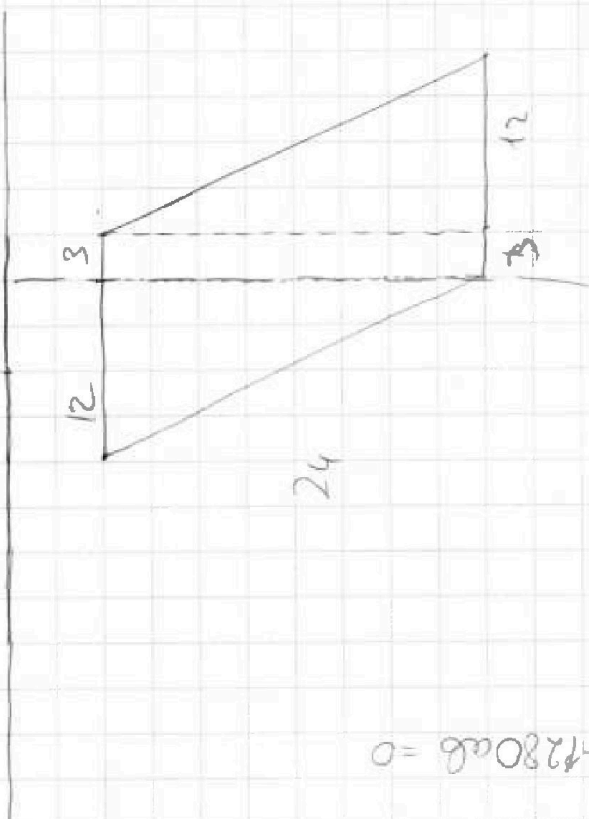
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

320
120

$12 \times 3 +$



$$500a^2b^2 - 100ab^2 - 50b^2 + 4 - 1280ab = 0$$