



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

abc - мин. - ?

a, b, c должны состоять
только из простых
множителей 2 и 7,
чтобы abc было минимал., т.к.

иначе другие множит. не
увеличат на выходы, услов.
и a, b, c , не увеличат
ни abc , тогда - увеличат.
(т.к. любой прост. множ. > 1)

Другой вариант: (т.к. $ab, bc, ac \neq 0$, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$)

$$\begin{cases} 1. ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \\ 1. bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \\ 1. ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases} : \begin{matrix} \text{т.к. } b \neq 0 \\ a \neq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = 2^3 \cdot 7^7 \\ ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

$$c^2 = 2^{23} \cdot 7^{44}$$

это невозможно
т.к. $\sqrt{2^3} \notin \mathbb{N}$

Представим $\begin{cases} a = 2^x \cdot 7^y \\ b = 2^z \cdot 7^f \\ c = 2^e \cdot 7^g \end{cases}$, где $x, y, z, f, e, g \in \mathbb{N}$
 ≥ 0

$$\begin{cases} 2^x \cdot 7^y \cdot 2^z \cdot 7^f = 2^{14} \cdot 7^{10} & \text{т.к. другой вариант невозможен} \\ 2^z \cdot 7^f \cdot 2^e \cdot 7^g = 2^{17} \cdot 7^{17} & \text{то для рав-ва} \\ 2^x \cdot 7^y \cdot 2^e \cdot 7^g = 2^{20} \cdot 7^{37} & \text{должны} \\ & \text{на 2 и 7} \\ & \text{в нуж. ст.} \\ & \text{т.к. } x, y, z, f, e, g \in \mathbb{N}_{\geq 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+z=14+k \\ y+f=10+l \\ z+e=17+m \\ f+g=17+n \\ x+e=20+o \\ y+g=37+r \end{cases}, \text{ а } abc = 2^{x+z+e} \cdot 7^{y+f+g} = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



51 (продолжение)

$$\begin{cases} x+z=14+k \\ y+f=10+l \\ z+e=17+m \\ f+g=17+n \\ x+e=20+o \\ y+g=37+r \end{cases}$$

Найти

$$x+z+e \quad y+f+g$$

k, l, m, n, o, r - наименьш. подкод. числа

$$\begin{cases} x+z \geq 14 \\ y+f \geq 10 \\ z+e \geq 17 \\ f+g \geq 17 \\ x+e \geq 20 \\ y+g \geq 37 \end{cases}$$

А так
наимен., это
все 2 числа

$$\begin{aligned} x+z &\geq 3 \\ x+z &\geq 14 \end{aligned}$$

$$2x \geq 17$$

$$x \geq 8,5$$

$$\Rightarrow x=9 \text{ (наим. } x)$$

$$9+z \geq 14$$

$$z \geq 5$$

$$z=5 \text{ (наим. } z)$$

$$5+e \geq 17$$

$$e \geq 12$$

$$e=12 \text{ (наим. } e)$$

$$x+z+e = 9+5+12 = 26$$

$$y-f \geq 20$$

$$y+f \geq 10$$

$$2y \geq 30$$

$$y \geq 15$$

$$y=15 \text{ (наим.)}$$

$$g \geq 37-y$$

$$g \geq 22$$

$$g=22 \text{ (наим.)}$$

$$f+g \geq 17$$

$$f \geq -5$$

$$f=0 \text{ (наим.)}$$

$$y+g+f=37$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } 26 \quad 37$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



52

$\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2}$$

можно
сократить
на m

$\Rightarrow$ т.к. у нас a и b -
взаимно прост., т.к.
 $\text{НОД}(a, b) = 1$

$$a^2 - bab + b^2 =$$

$$= 2a^2 - 4ab + 2b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) =$$

$$= 2(a-b)^2 - (a+b)^2$$

или

$$a^2 - bab + b^2 =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 3ab = (a+b)^2 - 3ab$$

Пусть $a+b = m \cdot x$, где $m, x \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot x}{(mx)^2 - 3ab} = \frac{m \cdot x}{m^2 x^2 - 3ab}$$

$\Rightarrow$ чтобы сократить на
 m надо, чтобы

$$3ab : m$$

Заметим, что

сумма взаимно
простых чисел

на каждое из них,

ведь чтобы сумма дел. на a ,

надо чтобы каждое слагаемое дел. на a .

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = mx \div a \\ a+b = mx \div b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a : m$$

$$b : m$$

$$\Rightarrow 3ab : m$$

$$\Rightarrow \text{макс. } m = 3, \text{ т.к. } a, b \text{ и } m$$

не им. общ. простых
множит.

$$\Rightarrow \text{ответ: } m = 3$$



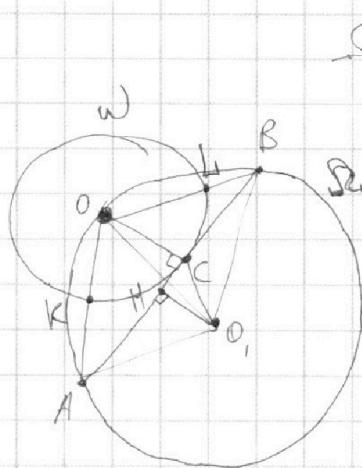
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC : CB = 7$$

C - т. касан.

$$R_W = 1 = r$$

$$R_\Omega = 5 = R$$

$AB = ?$

Пусть $AO \cap W = \pi, K$

$$OB \cap W = \pi, L$$

Тогда по свойству касат. и секущ.

$$AC^2 = AK \cdot (AK + 2r)$$

$$BC^2 = BL \cdot (BL + 2r)$$

$$49x^2 = AK^2 + 2AK$$

$$x^2 = BL^2 + 2BL$$

$$AK_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 49x^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + 49x^2} > 0$$

$$\Rightarrow AK = -1 + \sqrt{1 + 49x^2}$$

$$BL_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4x^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + x^2} > 0$$

$$\Rightarrow BL = -1 + \sqrt{1 + x^2}$$

Проведем OC - радиус в т. касан.

$\Rightarrow OC \perp AB$ (так как радиус перпендикулярен к т. касан.)

Проведем O_1O , O_1B и O_1A -

радиус Ω

След. AO, OB и CO ,

Проведем $O_1H \perp AB$ ($H \in AB$)

Пусть $CB = x$, тогда

$$AC = 7x$$

O_1H - высота в $\triangle O_1AB$ ($O_1A = O_1B$)
явл. медианой и биссектрисой.

$$\Rightarrow AB = \frac{AB}{2} = \frac{AC + CB}{2} = \frac{8x}{2} = 4x$$

$$\Rightarrow OA = r + AK = \sqrt{1 + 49x^2}$$

$$OB = r + BL = \sqrt{1 + x^2}$$

$\Rightarrow$ уг $\angle AOB$: (по т. косин.)

$$\cos \angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \frac{1 + 49x^2 + 1 + x^2 - 64x^2}{2 \sqrt{1 + 49x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2}} = \frac{2 - 54x^2}{2 \sqrt{1 + 49x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1 - 27x^2}{\sqrt{1 + 49x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2}}$$

Заметим, что

$$\angle AOB = \frac{AOB}{2} = \frac{AOB}{2} = 180 - \frac{AO_1B}{2}$$

$$\cos \angle AOB = \cos 180 - \frac{\angle AO_1B}{2} = -\cos \frac{\angle AO_1B}{2}$$

$$\left(\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \\ \Rightarrow \cos \alpha &= \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} \end{aligned} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3 (продолжение)

$$\Rightarrow \cos \angle \frac{AO, B}{2} = -\cos \angle AOB$$

Заметим, что O, H - бисс. (выше доказано)

$$\Rightarrow \angle AO, H = \frac{\angle AOB}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \angle AO, H = -\cos \angle AOB$$

$\triangle AO, H$ - пр/уг

$$\Rightarrow \cos \angle AO, H = \frac{O, H}{AO,}$$

$$\frac{O, H}{AO,} = \frac{7x-1}{\sqrt{49x^2+1} \cdot x} = \frac{O, H}{5}$$

$$O, H = \frac{35x^2-5}{\sqrt{1+49x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}}$$

По т. Пифагора из $\triangle AHO,$

$$AO,^2 = AH^2 + O, H^2$$

$$25x^2 = 16x^2 + \frac{25(7x-1)^2}{(1+49x^2)(1+x^2)}$$

$$\frac{(25x^2+16x^2)(1+50x^2+49x^4)+25(7x-1)^2}{(1+49x^2)(1+x^2)} = 0$$

$$-25 - 25 \cdot 50x^2 - 25 \cdot 49x^4 + 16x^2 + 16 \cdot 50x^4 + 16 \cdot 49x^6 + 25 \cdot 7x^2 - 25 = 0 \quad | :x^2 (x \neq 0)$$

$$16 \cdot 49x^4 + 16 \cdot 50x^2 - 32 \cdot 50 + 16 = 0 \quad | :16$$

$$49x^4 + 50x^2 - 100 + 1 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 49 \cdot 99}}{49 \cdot 2} = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 49 \cdot 99}}{49} > 0$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 49 \overline{) 4999} \\ \underline{441} \\ 489 \\ \underline{441} \\ 480 \\ \underline{441} \\ 390 \\ \underline{343} \\ 470 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5\sqrt{96} (24) \\ 49 \overline{) 4704} \\ \underline{441} \\ 294 \\ \underline{245} \\ 490 \\ \underline{441} \\ 490 \end{array}$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 7x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 7x + 1} + (2 - 7x) \quad | \cdot 12$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 7x + 1 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 7x + 1} + (2 - 7x)^2 - 28x + 49x^2$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 7x - 1 - 4 + 28x - 49x^2 = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 7x + 1}$$

$$-49x^2 + 21x - 2 = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 7x + 1} \quad | \cdot 12$$

$$-(7x)^2 + 14x + 1 - 7x + 1 = -((7x - 1)^2 - (7x - 1)) = -((7x - 1)(7x - 1 - 1))$$

$$-(7x - 1)(7x - 2) + 2(7x - 2)\sqrt{2x^2 + 7x + 1} = 0$$

$$(7x - 2)(2\sqrt{2x^2 + 7x + 1} - (7x - 1)) = 0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$2\sqrt{2x^2 + 7x + 1} = 7x - 1 \quad | \cdot 12 \quad \wedge \quad 7x - 1 \geq 0 \quad (7x \geq 1)$$

$$4(2x^2 + 7x + 1) = 49x^2 - 14x + 1$$

$$8x^2 + 8x + 4 - 49x^2 + 14x - 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 41 \cdot 3}}{41}$$

$$x_1 = \frac{11 + \sqrt{121 + 123}}{41} = \frac{11 + \sqrt{244}}{41}$$

$$\frac{123}{244}$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{244}}{41}$$

$$\text{ответ: } \frac{11 + \sqrt{244}}{41}; \frac{2}{7}$$

Проверим $x = \frac{2}{7}$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3} - \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{14}{7} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3} = \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{11}{7}}$$

верно

Проверим

$$1(11 + \sqrt{244}) \geq 41 \quad 2(11 - \sqrt{244}) \geq 41$$

$$11 + \sqrt{244} \geq 41 \quad -7\sqrt{244} \geq -36$$

$$11 + \sqrt{244} \geq 41 \quad \frac{11}{7} \geq \frac{36}{7}$$

$$-7.15 \leq -36$$

не верно

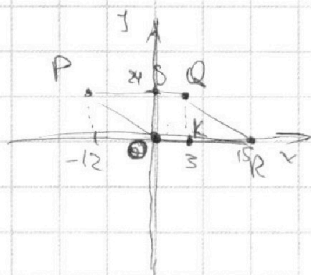
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



55

$$\Rightarrow 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

Согласно т. С и т. К

$$(y_2 - y_1) \in (-24; 24)$$

$$(x_2 - x_1) \in (-15; 15)$$

$$2(x_2 - x_1) \in (-30; 30)$$

$$т.к. x_2, x_1 \in \mathbb{Z}$$

$$то 2(x_2 - x_1) - четное \in (-30; 30)$$

$$2 + 11 = 13, 4 + 4 = 8$$

$$\Rightarrow (y_2 - y_1) - четное \in (-24; 24)$$

$$\Rightarrow y_2, y_1 - одинак. четности$$

$$2(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) = 12$$

$$При (y_2 - y_1) = 24$$

$$2(x_2 - x_1) = -12, 2(x_2 - x_1) \in (-12; 30)$$

$2(x_2 - x_1)$	-12	-10	-8	-6	-4	-2
$x_2 - x_1$	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$y_2 - y_1$	24	22	20	18	16	14
	12	12	12	15	15	15

$y_2 \in PQ$
 $y_1 \in OR$

$x_1 \in OR$

$$Q \in OR \Rightarrow 3 + 6 = 9$$

$$\Rightarrow 9 \text{ пар}$$

При мет. у кон. кар на 1 меньше, чем на чет. риде

А на чет. риде одинаково из-за кар-мет

При смещ. $y_2 - y_1$ на 2 $(x_2 - x_1)$ на 1

это 2 группы старш

$\Rightarrow$ увелич. кол-во на 2

11 и 3

кар-мет риде

$$11 + 10 + 11 = 32 \text{ пар}$$

$2(x_2 - x_1)$	0	2	4	6	8
$x_2 - x_1$	0	1	2	3	4
$y_2 - y_1$	12	10	8	6	4

наим. кол-во чет. риде на 2

$$14 \cdot 15, 14 \cdot 17, 14 \cdot 19, 14 \cdot 21$$

$$13 \cdot 13$$

$2(x_2 - x_1)$	10	12	14
$x_2 - x_1$	5	6	7
$y_2 - y_1$	2	0	-2

только точки x_2 и x_1 на чет. риде



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2(x_2 - x_1)$	18	18	20	22	24	26	28	30
$x_2 - x_1$	9	9	10	11	12	13	14	15
$y_2 - y_1$	-4	-8	-8	-10	-12	-14	-16	-18
	$5u_1$	$3u_1$	$1u_1$					

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



56

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$y = ax + 10b$ — прямая

$y_1, y_2 \leq 0$, где $y_1 = (x+8)^2 + y^2 - 1$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ — окр-ть

$y_2 = x^2 + y^2 - 4$ — центр $(-8, 0)$

$x^2 + y^2 = 2^2$ — окр-ть

центр $(0, 0)$

радиус 2

≤ 0 если y_1 и y_2 — разных знаков

т.к. y_1 и y_2 — окр-ти

у которых внутри < 0 ,

окр-ть $= 0$

снаруж > 0

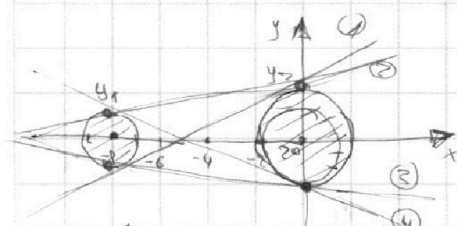
Заметим, что окр-ти

не пересекаются

$\Rightarrow$ нужны ~~окр-ти~~ —

внутри одной и снаружи

(там или $y_1 > 0$ $y_2 \leq 0$
 $y_2 \leq 0$ $y_1 > 0$)



т.к. нам нужны только 2 реш.

то это возможно, только если прямая

y — касат. к обоим окр-тям

есть всего 4 таких прямых (см. на чертеже)

для пр. y , а — tg угла наклона пр. y к x

Заметим, что углы α_1 и α_2 равны

также

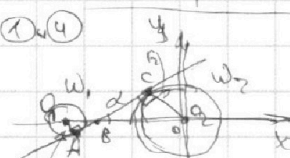
углы α_1 и α_2 равны

$$\alpha_1 = -\alpha_2$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1$$

$\Rightarrow$ Рассмотрим оба случая:

(1) и (4)



нужно найти

$$\tan \alpha = \alpha_1 = -\alpha_2$$

Обозначим точки касания на чертеже.

$\Rightarrow AC$ — касат. к W_1 и W_2

$\Rightarrow \triangle O_1AB \sim \triangle O_2CB$ (пр/уг и $\angle O_1BA = \angle O_2CB$)

$$\Rightarrow \frac{O_1B}{O_2B} = \frac{O_1A}{O_2C} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2} \quad (\text{как сход. тр. изод.})$$

$$2O_1B = O_2B$$

$$O_1O_2 = 8 = O_1B + O_2B = 3O_1B$$

$$\Rightarrow O_1B = \frac{8}{3}$$

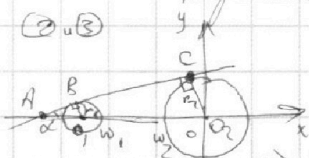
$\Rightarrow$ из $\triangle O_1AB$ — пр/уг по т. Вилларона

$$AB = \sqrt{O_1B^2 - O_1A^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$\tan \alpha = \tan \angle O_1BA = \frac{O_1A}{AB} = \frac{1}{\frac{\sqrt{55}}{3}} = \frac{3\sqrt{55}}{55} = \alpha_1 = -\alpha_2$$

Второй случай

(2) и (3)



$$\tan \alpha = \alpha_2 = -\alpha_1$$

Обозн. точки, как на первом чертеже

$\Rightarrow \triangle ABO \sim \triangle ACO_2$ (пр/уг)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AO_2} = \frac{BO_2}{AO_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2} \quad \text{т.к. } AO_2 \text{ — касат. к } W_2$$

$$2AO_2 = AO_1 + BO_2$$

$$AO_2 = O_1O_2 = 8$$

(продолж.)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6 (продолжение)

из $\triangle ABO_1$ - из $\triangle O_1$ (или было сказано)
по т. Пифагора:

$$AB = \sqrt{AO_1^2 - O_1B^2} = \sqrt{64 - 1} = \sqrt{63}$$

$$\tan \angle BAO_1 = \frac{BO_1}{AB} = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{\sqrt{63}}{63} = \frac{3\sqrt{7}}{63} = \frac{\sqrt{7}}{21} = \alpha_2 = -\alpha_3$$

$\Rightarrow$ При данных a можно будет подобрать $10b$ так, что

прямоугольник xy будет касат. к обеим окружностям,
в частности это будет касат. по Oy и Ox пересек.

1) 2) 3) 4) и Oy (на это совсем другая история)

$$\text{Ответ: } -\frac{3\sqrt{55}}{55}; -\frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{3\sqrt{55}}{55}.$$



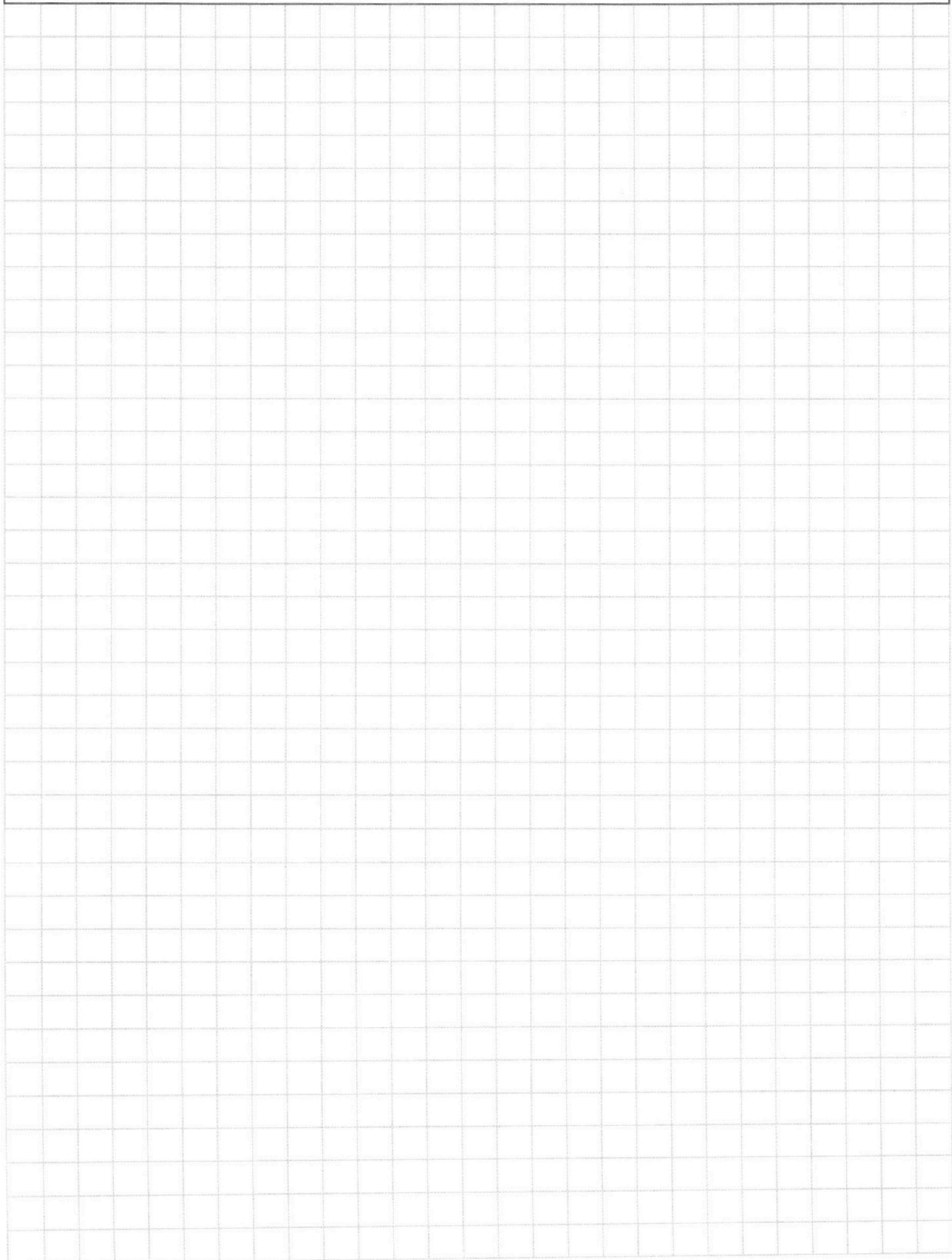
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



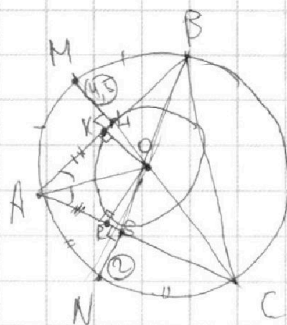
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

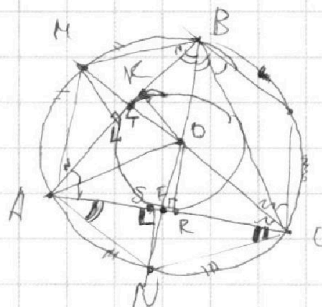


AD - ?

$$AS = SC$$

$$AL = LB$$

~~$$AK = TL$$~~
~~$$KR = TS$$~~



$$AO^2 = AR^2 + OR^2 = AR^2 + \left(\frac{FR}{SF} \cdot NS\right)^2 =$$

$$= AR^2 + \left(\frac{KT}{TL}\right)^2 \cdot ML^2$$

$$\frac{KT}{TL} \cdot ML = \frac{FR}{SF} \cdot NS$$

$$\frac{OT}{TH} \cdot ML = \frac{FO}{FN} \cdot NC$$

$$\triangle AML \sim \triangle COR$$

$$\Rightarrow \frac{ML}{OR} = \frac{AL}{RC}$$

$$\triangle MBT \sim \triangle OKT$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{OK} = \frac{BT}{TK}$$

$$\frac{MB}{OR} = \frac{LT + TK + KB}{RC}$$

$$\triangle KOB \sim \triangle SNA$$

$$\Rightarrow \frac{SN}{OK} = \frac{AS}{KB}$$

$$\triangle NSF \sim \triangle ORF$$

$$\Rightarrow \frac{NS}{OR} = \frac{SF}{FR}$$

$$\therefore N \in \text{бисс. } \angle ABC \text{ т.к. } AN = NC \Rightarrow \angle ABN = \angle NBC$$

$$\therefore M \in \text{бисс. } \angle ACB \text{ т.к. } AM = MB \Rightarrow \angle ACM = \angle MCB$$