



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$ab : 2^{15} \cdot 7''$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Пусть } ac = x \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}, x \in \mathbb{N}$$

Периодичность первых два выражения:

$$ab^2c : 2^{32} \cdot 7^{29}$$

$$x \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot b^2 : 2^{32} \cdot 7^{29}$$

$$x \cdot b^2 : 2^9$$

Нам нужно минимальное значение $x \cdot b$. При $x \cdot b^2 : 2^9$
минимальное значение $x \cdot b = 2^5 (2 \cdot (2^4)^2 : 2^9 \text{ или } 1 \cdot (2^5)^2 : 2^9)$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда наименьшее произведение } abc &= 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot xb = \\ &= 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot 2^5 = 2^{28} \cdot 7^{39} \end{aligned}$$

$$\text{Пример: } a = 2^{10} \cdot 7^{21}; b = 2^5; c = 2^{13} \cdot 7^{18}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b\sqrt{2}}{(a+b)^2-9ab}$$

$\frac{a}{b}$ несократимо $\Rightarrow a$ взаимно
просто с b

Предположим, что эту дробь можно сократить на m . Тогда
 $(a+b):m \Rightarrow (a+b)^2:m$, а т.к. $((a+b)^2-9ab):m \Rightarrow$
 $\Rightarrow 9ab:m$

Заметим, что если у нас например у a ~~и~~ есть общий делитель (отличный от 1), тогда, т.к. $a:q$,
 $m:q$, $(a+b):m \Rightarrow (a+b):q \Rightarrow b:q$. Тогда у a и b
 есть общий делитель q , что противоречит условию
 задачи. Тогда a взаимно просто с m , ана-
 логично, b взаимно просто с m . Тогда $9ab:m$
 трансформируется в $9:m$. Получим, максимальное
 $m=9$.

Пример: $a=4; b=5$.

$$\frac{4+5}{4^2-7 \cdot 4 \cdot 5+5^2} = \frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \quad | \cdot 12$$

$$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1-2 \cdot \sqrt{3x^2-6x+2} \cdot \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-18x+81x^2$$

$$-2 \cdot \sqrt{3x^2-6x+2} \cdot \sqrt{3x^2+3x+1} = 75x^2-15x-2 \quad | \cdot 12$$

$$4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1) = (75x^2-15x-2)^2$$

$$36x^4-36x^3+36x^2-72x^2+8 = 5625x^4-2250x^3+225x^2-300x^2+60x+4$$

$$5589x^4-2214x^3-111x^2+60x-4=0$$

Большинство коэф-тов : 3, отсюда и будем искать.

$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ не подходят. Будем пробовать $\frac{1}{27} - \frac{1}{3}$ - не подходит.

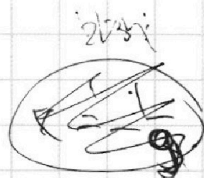
$$5589 = 23 \cdot 3^5$$

$$2214 = 3^3 \cdot 2 \cdot 41$$

$$111 = 3 \cdot 37$$

$$60 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\frac{23}{3^5} - \frac{2 \cdot 41}{3^6} - \frac{37}{3^5} + \frac{20}{3^2} - \frac{4 \cdot 37}{3^7}$$



будем спрашивать отрицательные значения.

$$+23 \cdot 3^4 - 41 \cdot 3^3$$

Нет решений: $\frac{23}{117} - \frac{41}{27}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~5.

Нарисовав данный параллелограмм, мы увидим, что он ограничен прямыми $y+2x=0$; $y+2x=16$; $y=26$; $y=0$.

Наш параллелограмм можно условно разбить на 17 отрезков:

$y+2x=0$; $y+2x=1$; $y+2x=2$; ...; $y+2x=15$; $y+2x=16$. На каждом таком отрезке 14 целочисленных точек. Рассмотрим условие:

$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$. Данное условие преводит прямую $y+2x=0$ в прямую $y+2x=14$ и так далее (сумма $y+2x$ увеличивается на 14). Чтобы обе точки лежали внутри параллелограмма, нужно, чтобы $0 \leq y+2x \leq 16$.

Тогда нам подходят только такие пары прямых:

$$y+2x=0 \rightarrow y+2x=14$$

$$y+2x=1 \rightarrow y+2x=15$$

$$y+2x=2 \rightarrow y+2x=16.$$

Любой точке на ~~данной~~ выбранной нами прямой соответствует любая точка на прямой с номером на 14 больше. Число способов выбрать такие пары:

$$3 \cdot 14^2 = 588$$

три варианта
прямых

Ответ: 588.

$$\begin{array}{r} 42 \\ 44 \\ \hline 168 \\ 42 \\ \hline 588 \end{array}$$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

Будем решать графически. Для начала решим левые неравенства.

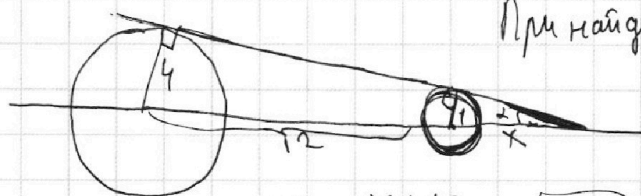
$x^2+y^2-1=0$ — окружность центром в $(0;0)$ и радиусом 1.

$x^2+(y-12)^2-16=0$ — окружность центром в $(0;12)$ и радиусом 4.

Внутри окружностей значения $x^2+y^2-1 < 0$, а снаружи > 0 .

Тогда решим наше неравенство, т.к. окружности не пересекаются, будут области внутри окружностей и на границах. Теперь нам нужно на этом графике как-то провести прямую, чтобы у нас было два корня. Если прямая пересечет какую-нибудь окружность, то количество решений будет 0. Единственное, что нам подойдет это общая касательная ^{внеш} двух окружностей. Найдем коэф. тангенса.

①



При найденных нами a, b подобрать возможно. Прямая может быть и $y < 0$.

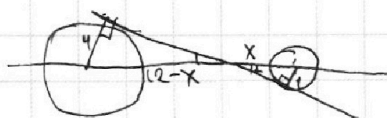
Из подобия:

$$\frac{x}{1} = \frac{x+12}{4} \Rightarrow x=4$$

$$a = \pm \operatorname{ctg} \alpha = \pm \sqrt{15}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \sqrt{15} \end{aligned}$$

②



Из подобия:

$$\begin{aligned} x &= \frac{12-x}{4} \Rightarrow x = \frac{12}{5} \\ \sin \alpha &= \frac{5}{12} \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\sqrt{119}}{5} \end{aligned}$$

Ответ: $\pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$



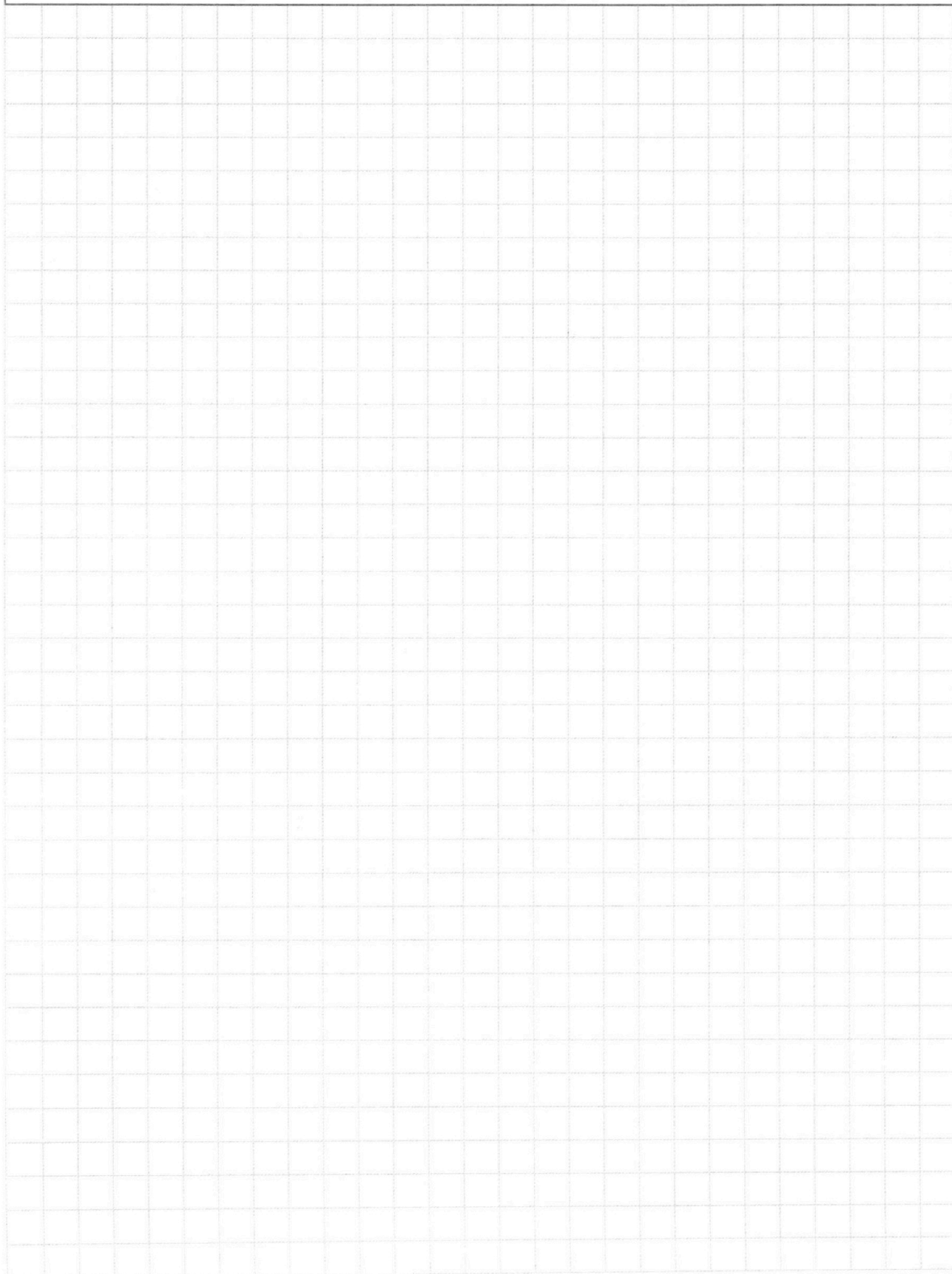
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$x \in \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cap \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

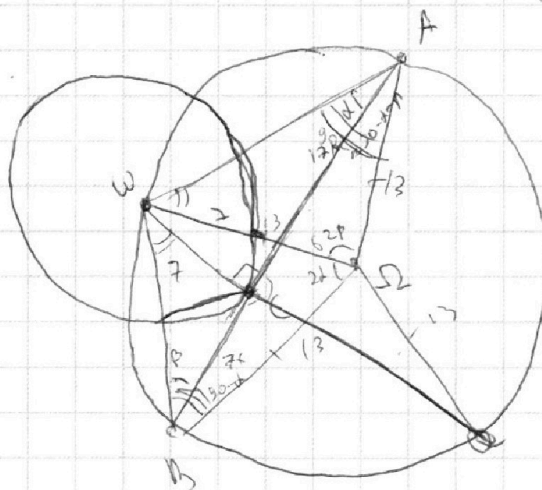
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновики.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{7}{17x} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{1}{x} \\ \operatorname{tg} \mu &= x\end{aligned}$$



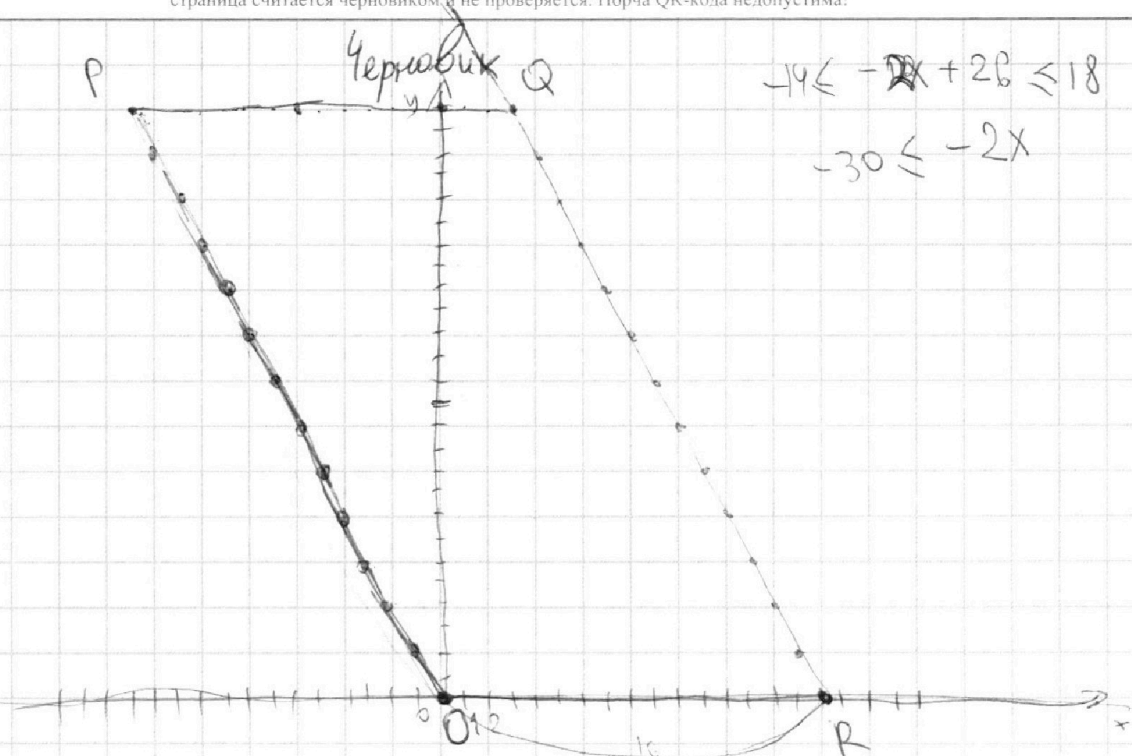
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



A-Q $x=3, y=26$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2x_2 - 6 + y_2 - 26 = 14 \Rightarrow y_2 = 14 + 26 - 2x_2 = 40 - 2x_2$$

$$y_2 = 2x_1 + y_1 + 14 - 2x_2$$

$$2x_2 + y_2 = 46$$

$$\frac{x}{3} = \frac{x+26}{18}$$

$$y_2 = 46 - 2x_2 \quad 0 \leq 2x_1 + y_1 + 14 \leq 32$$

$$16x = 3x + 26 \cdot 3$$

$$13x = 26 \cdot 3$$

$$x = 6$$

$$y_2 = 2$$

$$-14 \leq 2x_1 + y_1 \leq 18$$

$$0, 1, 2$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$$

$$14 \cdot 3 = 42$$



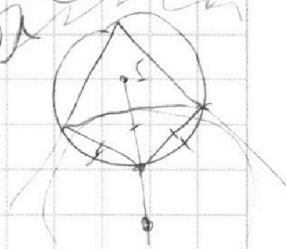
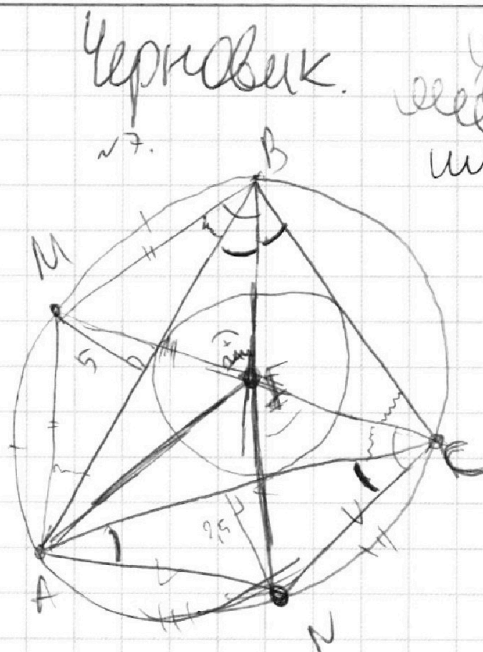
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$1,11 : 3 \approx 0,37$

$\frac{BI}{CI} = \frac{1}{1}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.

N1.

$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} 7^{18}$$

$$ac := 2^{23} 7^{39}$$

$$\begin{array}{r} 672 \\ + 168 \\ \hline 790 \\ + 48 \\ \hline 828 \end{array}$$

$$abc = 2^{28} 7^{39}$$

$$\begin{array}{r} 55 \overline{) 89} \quad 9 \\ 62 \quad 1 \quad 9 \\ \hline 23 \quad 3 \\ \hline 23 \quad 1 \end{array}$$

$$ac \cdot b^2 : 2^{32} 7^{29}$$

$$2^{23} \cdot 7^{39} \cdot b^2 : 2^{32} 7^{29}$$

$$b^2 : 2^9$$

$$b : 2^5$$

$$N2. \quad 2^3 \cdot 7^{16}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ + 36 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$\frac{a}{b} - \text{несокр.}$$

$$\begin{array}{r} + 256. \\ 22 \\ \hline 768 \\ \hline 5888 \end{array}$$

$$a+b$$

$$a^2 - 7ab + b^2$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a+b : 9$$

$$\frac{a+b}{m} : m$$

$$(a+b)^2 - 7ab$$

$$a+b : m$$

$$7ab : m$$

$$a, b, n.p.c.m$$

$$180 - 2\alpha - 2\beta$$

$$28 \cdot 21 + 28 \cdot 10 + 28 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ + 336 \\ \hline 473 \end{array}$$

$$a, b, n.p.c.m$$

$$180 - 2\alpha - 2\beta$$

$$\begin{array}{r} 184 \\ + 64 \\ \hline 248 \\ + 336 \\ \hline 584 \\ + 5376 \\ \hline 5934 \end{array}$$

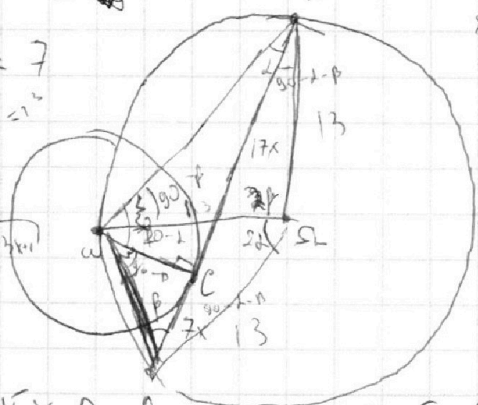
$$2250$$

$$180 - 2\alpha - 2\beta = 90 - \alpha + \beta$$

$$x = 90 - \alpha$$

$$r_w = 7$$

$$r_{\Omega} = 1$$



$$75x^2 - 15x - 2 \leq 0$$

$$-2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 75x^2 - 15x - 2$$

$$4(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1) = (75x^2 - 15x - 2)^2$$

$$36x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 8 = 5625x^4 - 2250x^3 - 300x^2 + 26x + 4$$

$$5589x^4 - 2214x^3 - 39x^2 + 60x - 4 = 0$$

$$69 - 84 - 1 + 20 - 4 = 0$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ - 36 \\ \hline 39 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2250 \\ - 36 \\ \hline 2214 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ + 25 \\ \hline 100 \\ + 375 \\ \hline 475 \\ + 584 \\ \hline 1059 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

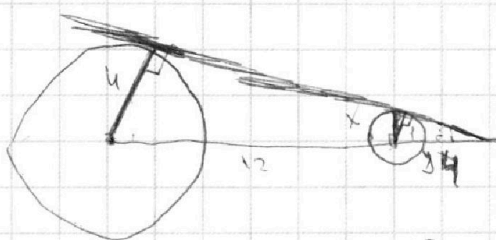
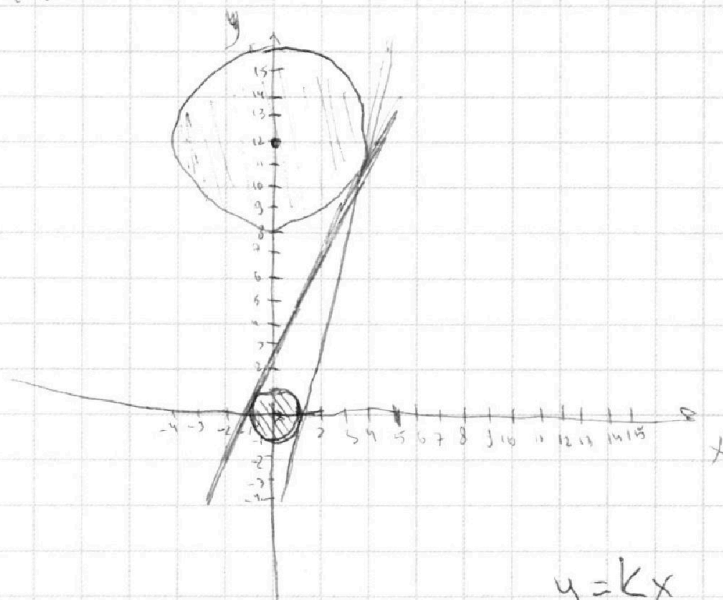
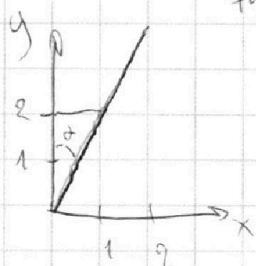
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$k=2 \\ \text{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$



$$\sin \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

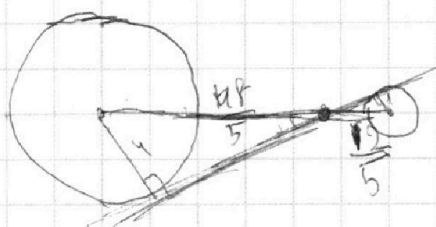
$$a = \pm \sqrt{15}$$

$$x = \frac{x+12}{4} \\ 4x = x+12 \\ x = 4$$

$$y = kx$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{k}$$

$$k = \sqrt{15}$$



$$r = 4.5$$

$$12 = 5.5 \Rightarrow S = 24 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{5}{\sqrt{119}}$$

$$k = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\frac{4.5}{4.8} = \frac{5}{12} \\ \frac{144}{25} = \frac{119}{9}$$