



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$ab : 2^4 \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{12}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\sim 1 \rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{51} \cdot 7^{64}, \text{ т.к. } a^2 b^2 c^2 -$$

кв. кат. угла, то все ^{приме} множители входят

в него в четн. степени, но ^{получаем} ~~а~~ т.к. $a^2 b^2 c^2 : 2^{51}$, то

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{52}$$

Тогда $a^2 b^2 c^2 : 2^{52} \cdot 7^{64}$, очев., что $a^2 b^2 c^2 > 2^{52} \cdot 7^{64}$

$$abc > 2^{26} \cdot 7^{32}$$

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^3$

$$b = 2^6 \cdot 7^{10}$$

$$c = 2^{11} \cdot 7$$

Тогда $a^2 b^2 c^2 : 2^{52}$, $abc : 2^{26}$

Т.к. $ac : 7^{37}$, очев., что $abc : 7^{37}$

$$\rightarrow abc : 7^{37} \cdot 2^{26}, \text{ } abc > 7^{37} \cdot 2^{26}$$

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^{10}$

$$b = 2^6$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{27}$$

Ответ: $7^{37} \cdot 2^{26}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

~ 2

Задаем равносильно тому, чтобы найти НОД
($a+b$; $a^2-6ab+b^2$)
Пусть их НОД равен k_m , тогда

$$\begin{cases} a+b \equiv 0 \\ a^2-6ab+b^2 \equiv 0 \end{cases} \begin{matrix} k_m \\ k_m \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a \equiv -b \\ a^2+b^2 \equiv 6ab \end{matrix} \begin{matrix} k_m \\ k_m \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (-b)^2+b^2 \equiv -6b^2 \\ k_m \end{matrix}$$

$$2b^2 \equiv -6b^2$$

k_m

$$8b^2 \equiv 0 \rightarrow 8b^2 : k_m, \text{ аналогично получаем,}$$

что $8a^2 : k_m$ по ум. НОД $(a;b)=1$
откуда $8 : k_m$, $k_m \leq 8$

Пример: $a=1, b=7$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{1-42+49} = \frac{8}{8} = 1$$

Ответ: $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

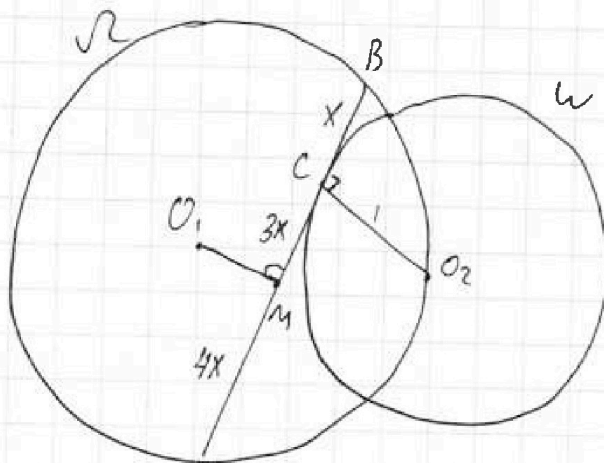
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!

МФТИ



~ 3



- 1) O_1 и O_2 - центры окр. Ω и Ω_2 соотв., M - сер. AB ,
пусть $AC = 9x$, тогда $BC = x$
2) $\triangle AOB$ р-б. ($AO_1 = OB = 5$) $\rightarrow$ мед. $O_1M \perp AB$, $AM = 4x$, $CM = 3x$
 $CO_2 \perp AB$ т.к. CO_2 - кас.

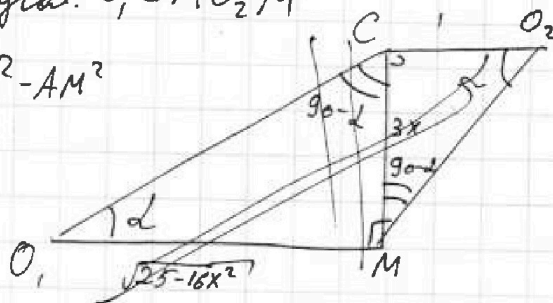
Сделаем вычисл. с помощью четырехугол. O_1CMO_2M

- 3) Из прямоугол. $\triangle O_1MA$ $O_1M^2 = O_1A^2 - AM^2$

$$= 25 - 16x^2$$

$O_1M \perp CM$, $CO_2 \perp CM \rightarrow O_1M \parallel CO_2$

$CO_2 = 1$ (т.к. рад.)



Пусть $\angle CO_1M = \alpha$, тогда $\angle CO_2M = \alpha$

$O_1O_2 = 85$ т.к. радиус Ω

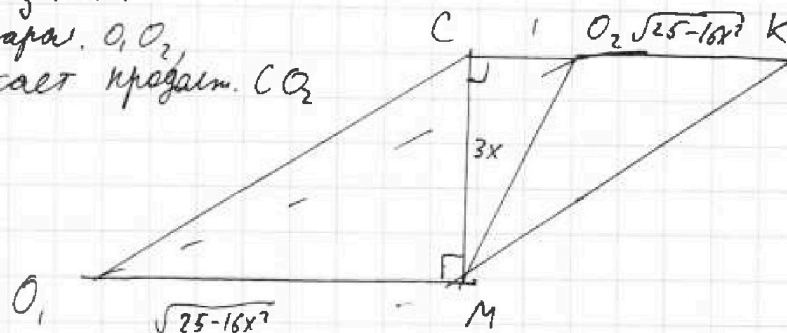
в трап. O_1CO_2M из т. M

проведем прямую, паралл. O_1O_2 ,

пусть она пересекает продолж. CO_2

O_1O_2 в т. K

CO_2





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$O_1 O_2 \perp MK$, $O_1 M \perp O_2 K \rightarrow O_1 O_2 KM$ - парал.

$O_1 O_2 = MK = 5$, Рассмотрим треугольн. $\triangle CMK$

$$O_2 K = O_1 M = \sqrt{25 - 16x^2}$$

Рассмотрим треугольн. $\triangle CMK$; $CM^2 + CK^2 = MK^2$

$$9x^2 + (1 + \sqrt{25 - 16x^2})^2 = 25$$

$$9x^2 + 1 + 2\sqrt{25 - 16x^2} + 25 - 16x^2 = 25$$

$$9x^2 + 1 + 2\sqrt{25 - 16x^2} = 16x^2$$

$$4(25 - 16x^2) = (7x^2 - 1)^2$$

$$100 - 64x^2 = 49x^4 - 14x^2 + 1$$

$$143x^4 - 49x^2 - 99 = 0$$

$$x^2 = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{98}, \text{ т.к. } x^2 > 0, \text{ и } x > 0$$

$$x^2 = \frac{-50 + \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{98} = \frac{-50 + \sqrt{21904}}{98}, \text{ т.к. } x^2 > 0, \text{ то}$$

$$x^2 = \frac{-50 + \sqrt{21904}}{98}, \text{ тогда } x = \sqrt{\frac{\sqrt{21904} - 50}{98}}$$

$$AB = 8x = 8 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{21904} - 50}{98}}$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{\frac{\sqrt{21904} - 50}{98}} \cdot 8\sqrt{\frac{\sqrt{21904} - 50}{98}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \quad N 4$$

Заметим, что $(2x^2-5x+3) - (2x^2+2x+1) = 2-7x$, а т.к.

у нас оба корня, то оба
Пусть $\sqrt{2x^2-5x+3} = X$, $\sqrt{2x^2+2x+1} = Y$

$$\begin{aligned} \sqrt{X} - \sqrt{Y} &= X^2 - Y^2 \\ X+Y - 2\sqrt{XY} &= X^2 - Y^2 \end{aligned} \quad \text{Пусть } \begin{aligned} 2x^2-5x+3 &= X, \\ 2x^2+2x+1 &= Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{X} - \sqrt{Y} &= X - Y \\ X+Y - 2\sqrt{XY} &= X^2 - 2XY + Y^2, \text{ пусть } X+Y=U, \sqrt{XY}=V \geq 0 \end{aligned}$$

$$U - 2V^2 = U^2 - 4V^2$$

$$U^2 - U - 4V^2 + 2V = 0$$

$$U_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+16V^2-8V}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{(4V-1)^2}}{2} = \frac{2V}{1-2V}$$

1) $U=2V$

$$X+Y = 2\sqrt{XY}$$

$$X^2+2XY+Y^2 = 4XY$$

$$(X-Y)^2 = 0$$

$$X=Y$$

$$2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1$$

$$2 = 7x$$

$$x = \frac{2}{7}$$

2) $X+Y = 1-2\sqrt{XY}$

$$X^2+Y^2+2XY = 1-4\sqrt{XY}+4XY$$

$$(X+Y)^2 = 1-4\sqrt{XY}$$

$$U = 1-2V, \text{ обе функции}$$

монотонны, есть не более
одного решения

$$X+Y = 1-2\sqrt{XY}$$

$$1-X-Y = 2\sqrt{XY}$$

$$1+X^2+Y^2-2X-2Y+2XY = 4XY$$

$$1+X^2+Y^2-2X-2Y-2XY = 0$$

$$X+Y = 1-2\sqrt{XY}$$

$$1-X-Y = 2\sqrt{XY}$$

Заметим, что пара $(1;0)$ и $(0;1)$

явл. р-ми. Данное ур., тожд-во а

также то, что какое ур. не может
иметь более 2 пар р-ми. т.к.

при возвед. в кв. мы получим ур.

$$1+X^2+Y^2-2X-2Y-2XY = 0, \text{ а оно имеет}$$

решать его отнес. X, оно квадрат. и имеет



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Не более 2 реш., кот. я перечислил выше
делаю обратн. зам. найдем

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 1 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x^2 - 5x + x + 3 = 0 \text{ ③} \\ 2x^2 + 5x + 1 = 1 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 2x^2 \text{ ①} \\ & (x+1)^2 + x^2 = 0 \\ & \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases} - \text{реш. нет} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{② } 2x^2 + 2x = 0 \\ & 2x(x+1) = 0 \\ & x = 0 \text{ или } x = -1 \end{aligned}$$

из этих двух реш.
ур. ③ удов. только
 $x = -1$

Сделаем проверку корней:

$$x = \frac{2}{7} : \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{6}{7} + 3} - \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{4}{7} + 1} = 0$$

$$x = -1 : \sqrt{2+5+3} - \sqrt{\frac{-62}{49} + 3} = \sqrt{\frac{36}{49} + 1}$$

$$2 - \frac{62}{49} = \frac{36}{49} - \text{верно}$$

$$x = -1 : \sqrt{2+5+3} - \sqrt{2-2+1} = 9$$

$$\sqrt{10} = 10 - \text{очев., нет}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

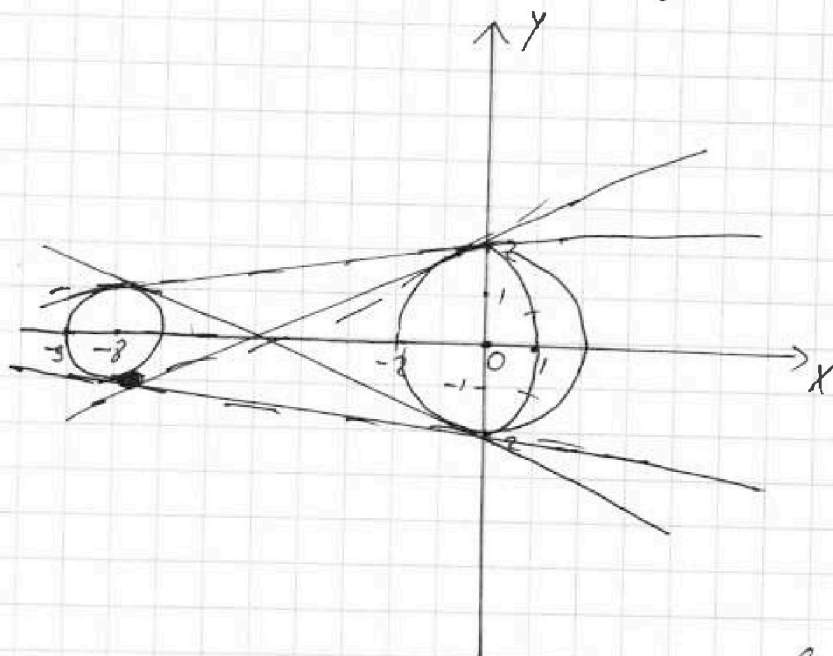
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \quad \sim 6$$

$$② \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ - окр. с центром $(-8; 0)$ и рад. = 1

$x^2 + y^2 = 4$ - окр. с центром $(0; 0)$ и рад. = 2



Из ②-й следует, что как и упр. обл., внутри окружностей.

ВД $ax - 10b = y$, чтобы $ax - 10b$ - прямая

чтобы ур. имело ровно 2 реш., нужно, чтобы прямая касалась каждой из окружностей, если она прямая пересекает хотя бы одну окр., то реш. будет беск. много.

Так же заметим, что ось x является осью симметрии, поэтому, если нам подходит a_0 , то и $-a_0$ тоже



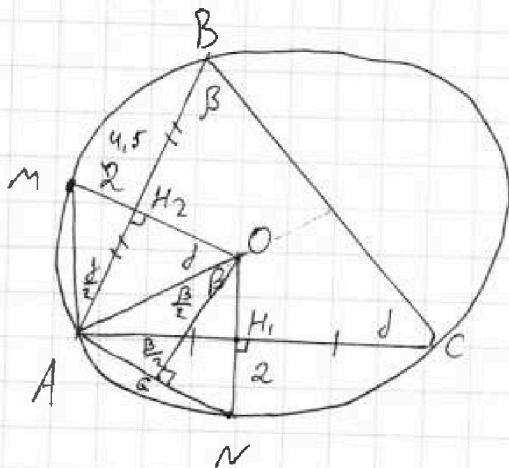
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Т.к. Т. М и N — сер. дуг, то они равноуд. от А и В, N равноуд. от А и С. Т. М лежит на сер. перпенд. к АВ, но Т. О (центр окружности) тоже лежит на сер. перпенд., а аналогично N и О лежат на сер. перпенд., тогда $MO \perp AB$, $MO \perp AB = H_2$, $MH_2 = 4,5$ из укл., аналог. $AC \perp ON$, $NH_1 = 2$

2) Пусть r — радиус окр. с центром О, $\angle ABC = \beta$, тогда

$\angle AON = \beta$ т.к. N — сер. дуги AC и $\angle AON$ центр., аналог.

пусть $\angle C = \gamma$, $\angle AOM = \gamma$

из ΔAOH_1 : $AO \cdot \cos \beta = OH_1$,
 $r \cdot \cos \beta = r - 2$

из ΔAOH_2 : $AO \cdot \cos \gamma = r - 4,5$

$r \cos \gamma = r - 4,5$

из т. Синусов для ΔABC $AB = 2R \sin \gamma$, $AC = 2R \sin \beta$



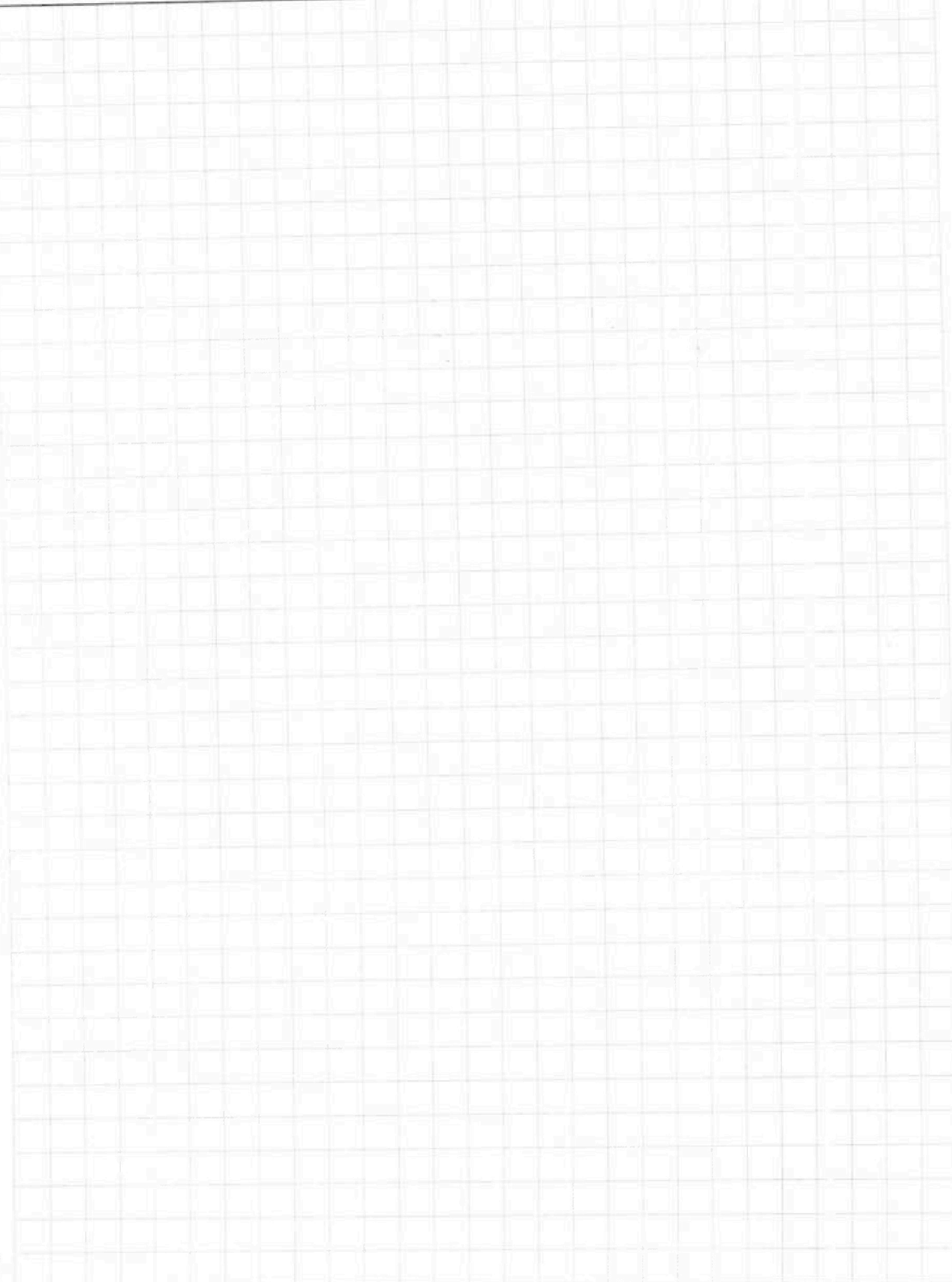
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



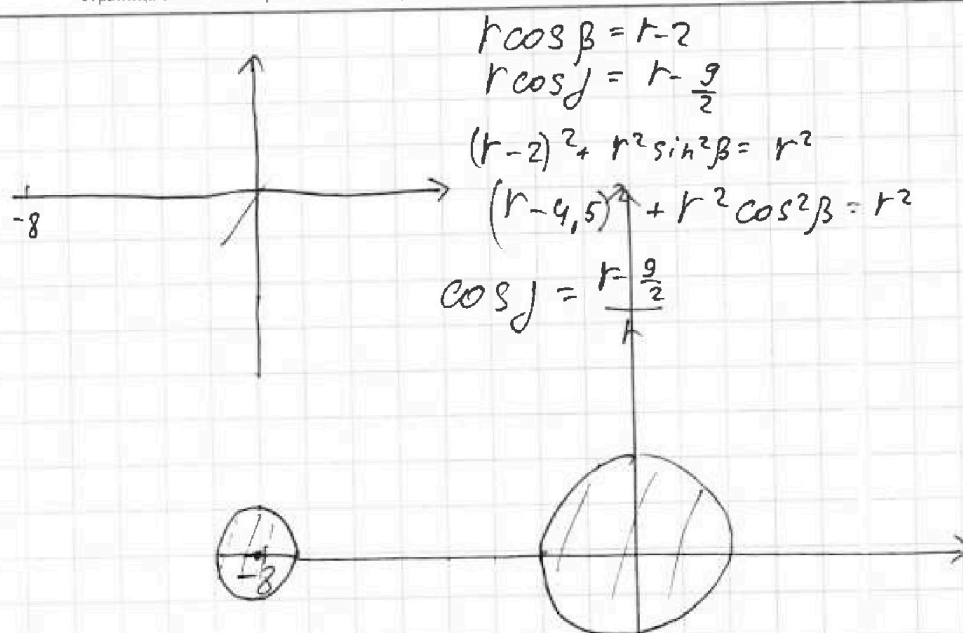
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$r \cos \beta = r - 2$$

$$r \cos \beta = r - \frac{9}{2}$$

$$(r-2)^2 + r^2 \sin^2 \beta = r^2$$

$$(r-4,5)^2 + r^2 \cos^2 \beta = r^2$$

$$\cos \beta = \frac{r - \frac{9}{2}}{r}$$

$$ax - 10b = y$$

$$(a+b; a^2 - 6ab + b^2)$$

$$a = \frac{1}{k} - b$$

$$49 - 42 + 1$$

$$5 \quad 2$$

$$\sqrt{25 + 4}$$

$$169 - 6 \cdot 13 \cdot 3 + 9$$

$$(r-2)^2 + \frac{AC^2}{4} = r^2 \quad 2r \cdot \sin \beta$$

$$r \cos \beta = r - 2$$

$$r \cos \beta = r - 4,5$$

$$\frac{AC^2}{4} = \frac{(r^2 - (r-2)^2) \cdot 4}{\sqrt{2 \cdot (2+r) \cdot 4}} = AC$$

$$(r-2)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

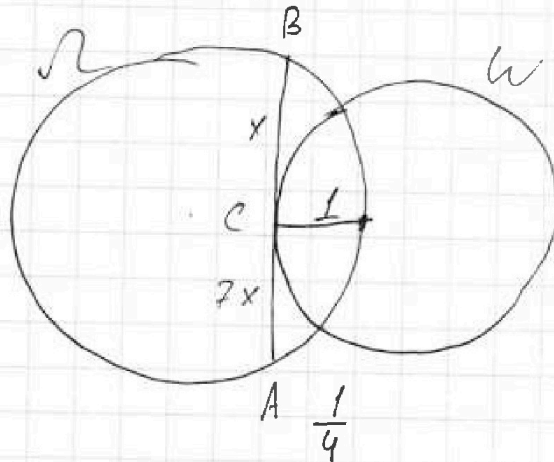
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 2^{10} \quad a &= 2^{10} \\ b &= 2^4 \\ c &= 2^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^8 \\ b &= 2^6 \\ c &= 2^{10} \end{aligned}$$

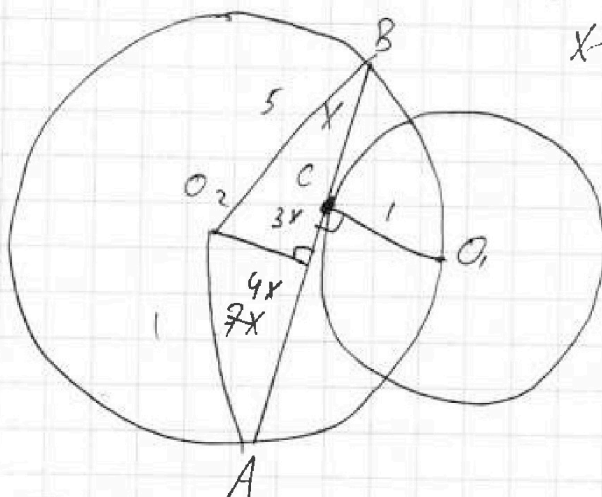
$$\begin{aligned} 4 \quad 37 \quad a &= 2^9 \\ + 14 \quad b &= 2^{10} \\ \hline 51 \quad c &= 2^{11} \end{aligned}$$



dit.

$$\frac{5 \pm 1}{24} = \frac{3}{2}$$

$$25 - 21$$



$$x^2 + 2 + (x-1)^2$$

$$2(x-1)^2 + 1 - x$$

$$\begin{aligned} a &= 7^{10} \\ b &= 7^8 \\ c &= 7^{30} \end{aligned}$$

$$L + B + J = 32$$

$$L + B = 10$$

$$B + J = 17$$

$$L + J = 37$$

$$10 \quad 20$$

$$3y(4-y)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{(x - \frac{3}{2})(x-1)} - \sqrt{(x+1)^2 + x^2} = 2 - 7x$$

$$(x - \frac{3}{2})(x-1) = (2 - 7x + \sqrt{(x+1)^2 + x^2})^2$$

$$x^2 + x(-2-y) - 2y + 1 + y^2 = 0$$

$$\frac{2+y \pm \sqrt{4+4y+y^2+8y-4-4y^2}}{2} = \frac{2+y \pm \sqrt{12y-3y^2}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

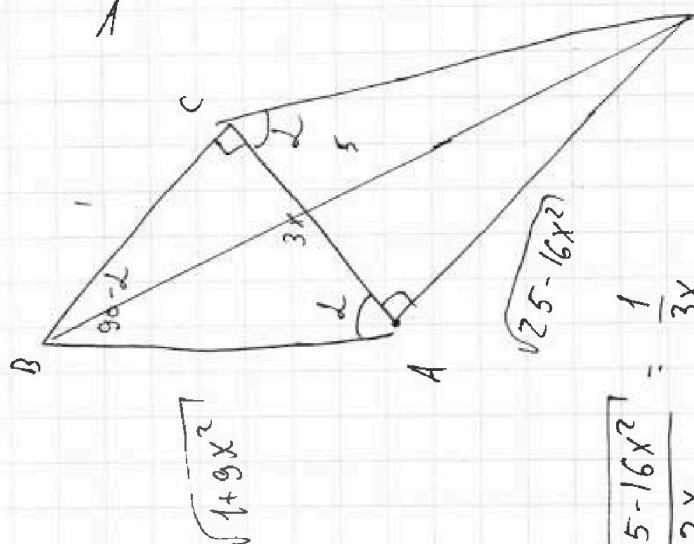
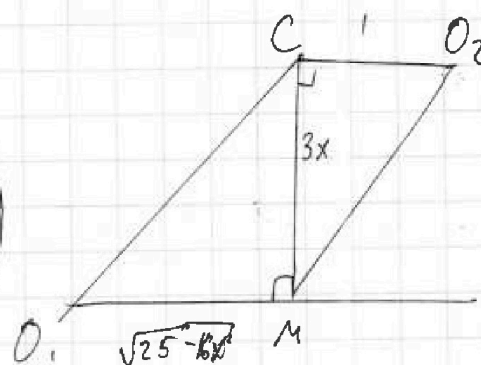
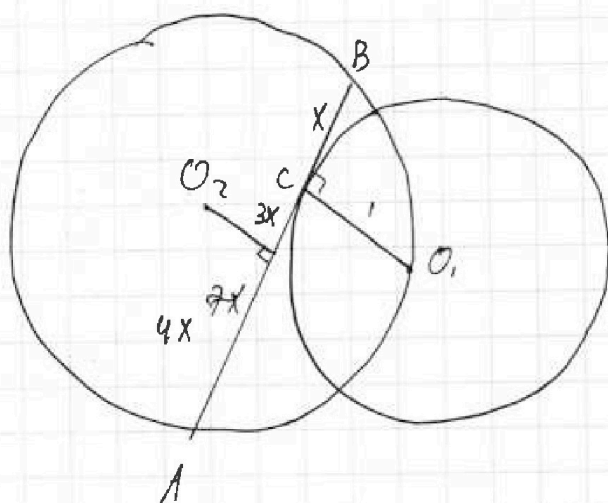
$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} \stackrel{N4}{=} 2-7x \quad | \quad OQ3: 2x^2-5x+3 \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{(x+1)^2+x^2} = 2-7x$$

$$2x^2-5x+3 = 2-7x + \sqrt{(x+1)^2+x^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$\text{НОД}(a+b; a^2-6ab+b^2) = ?$$



2x2

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{3x} = \frac{1}{3x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

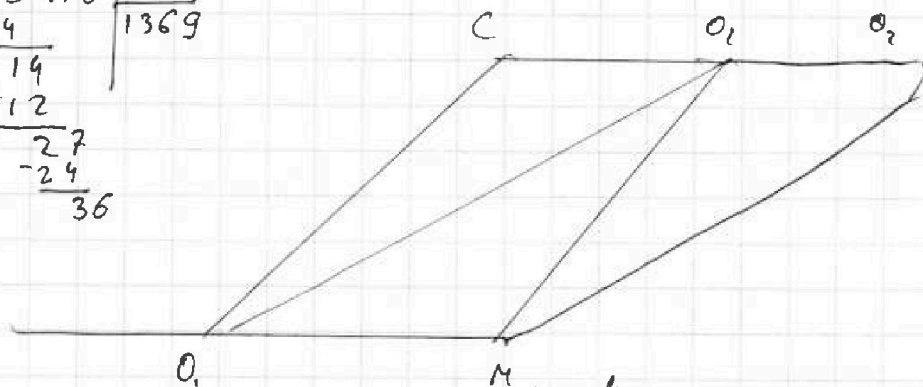
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 19404 \\ + 2500 \\ \hline 21904 \end{array}$$

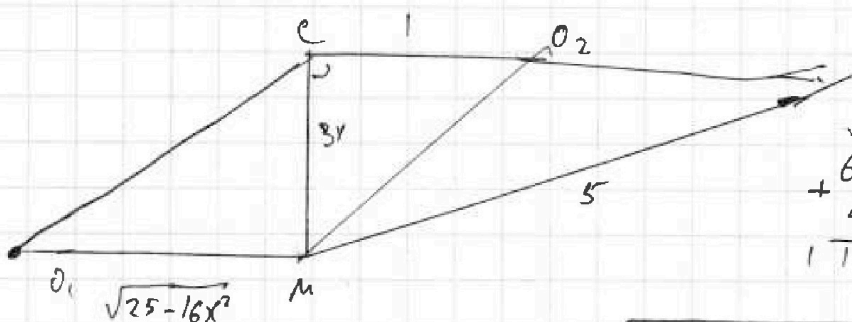
$$\begin{array}{r} 5476 \overline{) 4} \\ \underline{4} \\ 14 \\ \underline{12} \\ 27 \\ \underline{24} \\ 36 \end{array}$$

1369



$$\begin{array}{r} 21904 \overline{) 4} \\ -20 \\ \hline 19 \\ \underline{16} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 43 \\ \times 43 \\ \hline 129 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 69 \\ + 49 \\ \hline 113 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline 113 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -50 \pm \sqrt{} \\ 35^2 \\ 396 \\ + 149 \\ \hline 3564 \\ 1584 \\ \hline 19404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19404 \overline{) 4} \\ \underline{16} \\ 34 \\ \underline{32} \\ 204 \\ \underline{204} \\ 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 4851 \overline{) 9} \\ -45 \\ \hline 35 \\ \underline{27} \\ 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19404 \\ + 2500 \\ \hline \end{array}$$

