



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поня QR-кода недопустима!

~ 1

$$ab: (2^{15} \cdot 4^{11}) \Rightarrow ab = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot x_1; \quad bc: (2^{17} \cdot 4^{18}) \Rightarrow bc = 2^{17} \cdot 4^{18} \cdot x_2;$$

$$ac: (2^{23} \cdot 4^{39}) \Rightarrow ac = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot x_3, \quad (ab: 2^{15} \cdot 4^{11}) = x_1$$

$$\begin{cases} ab: (2^{15} \cdot 4^{11}) \\ ac: (2^{23} \cdot 4^{39}) \\ bc: (2^{17} \cdot 4^{18}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab: (2^{15} \cdot 4^{11}) = x_1 \\ ac: (2^{23} \cdot 4^{39}) = x_2 \\ bc: (2^{17} \cdot 4^{18}) = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot x_1 \\ ac = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot x_2 \\ bc = 2^{17} \cdot 4^{18} \cdot x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (abc)^2 = 2^{(15+23+17)} \cdot 4^{(11+39+18)} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad (x_1, x_2, x_3 - \text{обозначение}$$

четного при делении ab на $2^{15} \cdot 4^{11}$, ac на $2^{23} \cdot 4^{39}$ и bc на

$$2^{17} \cdot 4^{18} \text{ соответственно}) \Rightarrow (abc)^2 = 2^{55} \cdot 4^{68} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \Rightarrow abc =$$

$$= \sqrt{2^{55} \cdot 4^{68} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = 4^{39} \cdot 2^{27} \cdot \sqrt{2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}. \quad abc - \text{натуральное}$$

$$\text{число} \Rightarrow (abc)^2: (2^{55} \cdot 4^{68}) \cdot \text{т.к. } (abc)^2 - \text{квадрат н.ч.}$$

числа, степени всех простых множителей - четны $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (abc)^2: (2^{56} \cdot 4^{68}) \Rightarrow abc: (2^{28} \cdot 4^{39}). \quad \text{Погда мин. } abc = 2^{28} \cdot 4^{39}.$$

Пример: $a = 2^{11} \cdot 4^{11}, b = 2^5, c = 2^{12} \cdot 4^{18}$

$$ab = 2^{16} \cdot 4^{11}, bc = 2^{17} \cdot 4^{18}, ac = 2^{23} \cdot 4^{39}, abc = 2^{28} \cdot 4^{39}$$

Ответ: $abc = 2^{28} \cdot 4^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.2
Пусть ~~дано~~ наймется такое m , что делитель и знаменатель дроби $\frac{a+b}{a^2+4ab+b^2}$ можно сократить на m . Тогда
Тогда $(a+b):m$ и $(a^2+b^2+4ab):m$: $a^2+b^2+4ab = (a+b)^2 - 2ab$.
 $(a+b)^2 - 2ab : m$, $(a+b)^2 : m \Rightarrow 2ab : m$. Пусть $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$
(разложение m на простые множители, где p_i - простой делитель m , а α_i - степень вхождения p_i в m). Пусть
наймется такое p_i ~~тако~~ ~~что~~ $ab : p_i$. П.к.
 $\frac{a}{b}$ - несократима, ~~а b не делит a~~ $\text{НОД}(a,b)=1 \Rightarrow$ только
одно из чисел a и b делится на p_i (иначе $\text{НОД}(a,b) \geq p_i$).
Пусть ~~то~~ $a : p_i$ ~~тогда~~, а $b \not: p_i$ (без ограничения общности)
 $\Rightarrow a+b \not: p_i \Rightarrow a+b \not: m$ (п.к. p_i - простой множитель m),
это противоречит ~~уже принятому~~ условию $\Rightarrow$ не най-
дется такого p_i , что $ab : p_i \Rightarrow \text{НОД}(ab, m) = 1 \Rightarrow 2ab : m$.
Тогда из $2ab : m$ и $\text{НОД}(ab, m) = 1 \Rightarrow 2 : m$. ~~Тогда~~ $m \leq 2 \Rightarrow$
~~возможна $m=2$~~ . Подберем пример для $m=9$: $a=1, b=8, \frac{a}{b} = \frac{1}{8}$,
 $\frac{a+b}{a^2+4ab+b^2} = \frac{1+8}{1+64-4 \cdot 1 \cdot 8} = \frac{9}{9} = 1$ ($\frac{a}{b}$ - несократима, $\frac{a+b}{a^2+4ab+b^2}$ сокращает-
ся на m).

Ответ: $m=9$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2+3x+1} > 1$$

$$3x^2+3x+1 > 1$$

$$3x^2+3x > 0$$

$$x^2+x > 0$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$$

Тогда $\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} > 1$ при любых допустимых $x \Rightarrow \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$ не имеет решений.

Тогда существует только 1 возможный корень: $x = \frac{1}{9}$,
если он входит в область определения.

$$3x^2+3x+1 > 0 \xrightarrow{\text{при всех } x} \sqrt{3x^2+3x+1}, \quad 3x^2-6x+2 > 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}, \quad D = 36 - 24 =$$

$$= 12 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$$

$$\frac{1}{9} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{9-3\sqrt{3}}{9} > \frac{9-8}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{9} \text{ не входит}$$

в область определения.

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{9}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

№ 4.

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \quad | \cdot (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} > 0 \text{ на всей области определения,}$$

$$\text{т.к. } \sqrt{3x^2-6x+2} \geq 0, \text{ а } \sqrt{3x^2+3x+1} > 0 \text{ (т.к. } D = 9 - 4 \cdot 3 = -3) \Rightarrow$$

$$= \sqrt{3x^2+3x+1} > 0. \text{ Область определения } \sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} \text{ и}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} \text{ совпадает.}$$

$$(\sqrt{3x^2-6x+2})^2 - (\sqrt{3x^2+3x+1})^2 = (-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = (-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}) \quad | : (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

я раскрыл как $3x^2-6x+2$, ~~потому~~ потому что область опреде-

ления знаменателя уравнения совпадает со областью, на кото-

рой $3x^2-6x+2$ имеет ^{неотрицательное} ~~положительное~~ значение совпадают, и

точки, в которой $3x^2-6x+2$ принимает отрицательное значение не рассматриваются.

$$(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 1-9x=0 \\ \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} > 1 \text{ при } x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$$

$$3x^2-6x+2 > 1$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 24 \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{6-\sqrt{24}}{6} \\ x > \frac{6+\sqrt{24}}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x > 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

Заметим, что ^{только} при $0 \leq z \leq 32$ ~~то~~ прямая пересечет
параллелограмм ^{большее рассматриваются только эти z} . Заметим, что если z - нечетное, то прямая
 $z = 2x + y$. Вд будет иметь ровно 13 точек с целыми координатами.
в параллелограмме (искомые точки), т.к. в каждой
строке y должно быть нечетным (чтобы x было целым),
а нечетных y $0 \leq y \leq 26$ ровно 13. Аналогично при z - четном,
 y - четное $\Rightarrow$ ^{нае} $z = 2x + y = 2x + y$ $\Rightarrow$ z и $z + 14$ ^{и $z + 14 = 2x + y$} 13^2 пар если z - чет. и 14^2 если z - нечет. Если рассматривать пары прямых $z = 2x + y$ при $0 \leq z \leq 18$, то мы рассматриваем все пары прямых $\Rightarrow$ все пары искомым точек.
Тогда общее кол-во пар $k = 10 \cdot 14^2 + 9 \cdot 13^2 = 16960 + (1690 - 169) =$
 $= 1960 + 1521 = \underline{3481}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

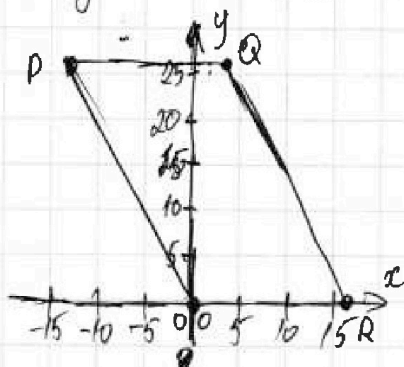
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!



25

Пусть $2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 14$

Пусть $2x_1 + y_1 = z$. Тогда $2x_2 + y_2 = 14 + z$



Найдем уравнение прямой PQ:

Пусть оно $ax + y = b$

$$\begin{cases} a \cdot (-13) + 26 = b \\ a \cdot 0 + 0 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13a + 26 = b \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13a + 26 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$$

Тогда $2x + y = 0$ - уравнение прямой PQ.

Уравнение прямой QR: $ax + y = b$:

$$\begin{cases} 3a + 26 = b \\ 16a + 0 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 26 = 16a \\ 16a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13a = 26 \\ b = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 32 \end{cases} \Rightarrow QR: 2x + y = 32$$

PQ: $y = 26$, QR: $y = 0$. Тогда все точки в параллелограмме удовлетворяют условию: $\begin{cases} 0 \leq 2x + y \leq 32 \\ 0 \leq y \leq 26 \end{cases}$

Возьмем произвольную точку $Z = 2x + y$ и $Z + 14 = 2x + y$. Тогда любая точка принадлежит параллелограмму. Если взять такую же точку на прямой $Z + 14 = 2x + y$ (удовлетворяющую тем же условиям), то она также принадлежит параллелограмму.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

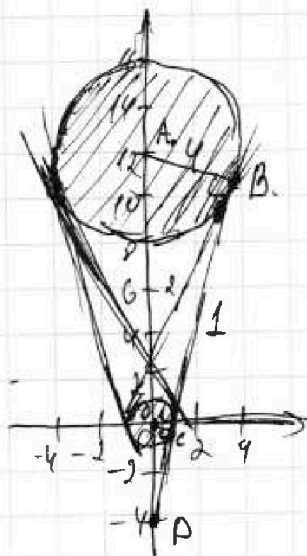
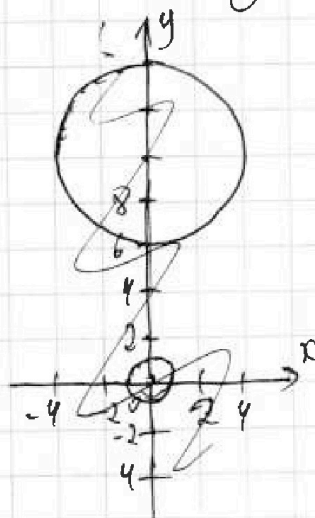
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порядок QR-кода непустым!



Заметим, что $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 16) \leq 0$ только если один из множителей ≥ 0 , а второй ≤ 0 .



П.к. оба графика
обих множителей - круги
- окружности, то множе-
ство всех решений
этого ~~уравн~~ неравенства
все точки внутри каж-
дого круга (т.к. круги не пересе-

каются, ^{точка} внутри ~~круга~~ круга делает значение одного из множи-
телей положительным, а второго - отрицательным.

П.к. $ax + y - 8b = 0$ - прямая, то система имеет
всего два решения, то эта прямая касательная к ~~обеим~~ ^{одной}
окружностям (иначе она либо не ^{имет} общих точек с
кругами, либо касается одной окружности (1 решение), либо
пересекает хотя бы одну окружность (бесконечное кол-во
решений)). По условию нужно найти а всех прямых,
касательных обеим окружностям. Возьмем прямую 1.
уже только одна П.к. $AB = 4$, $AO = 4$ Тогда $a = 4, -4$



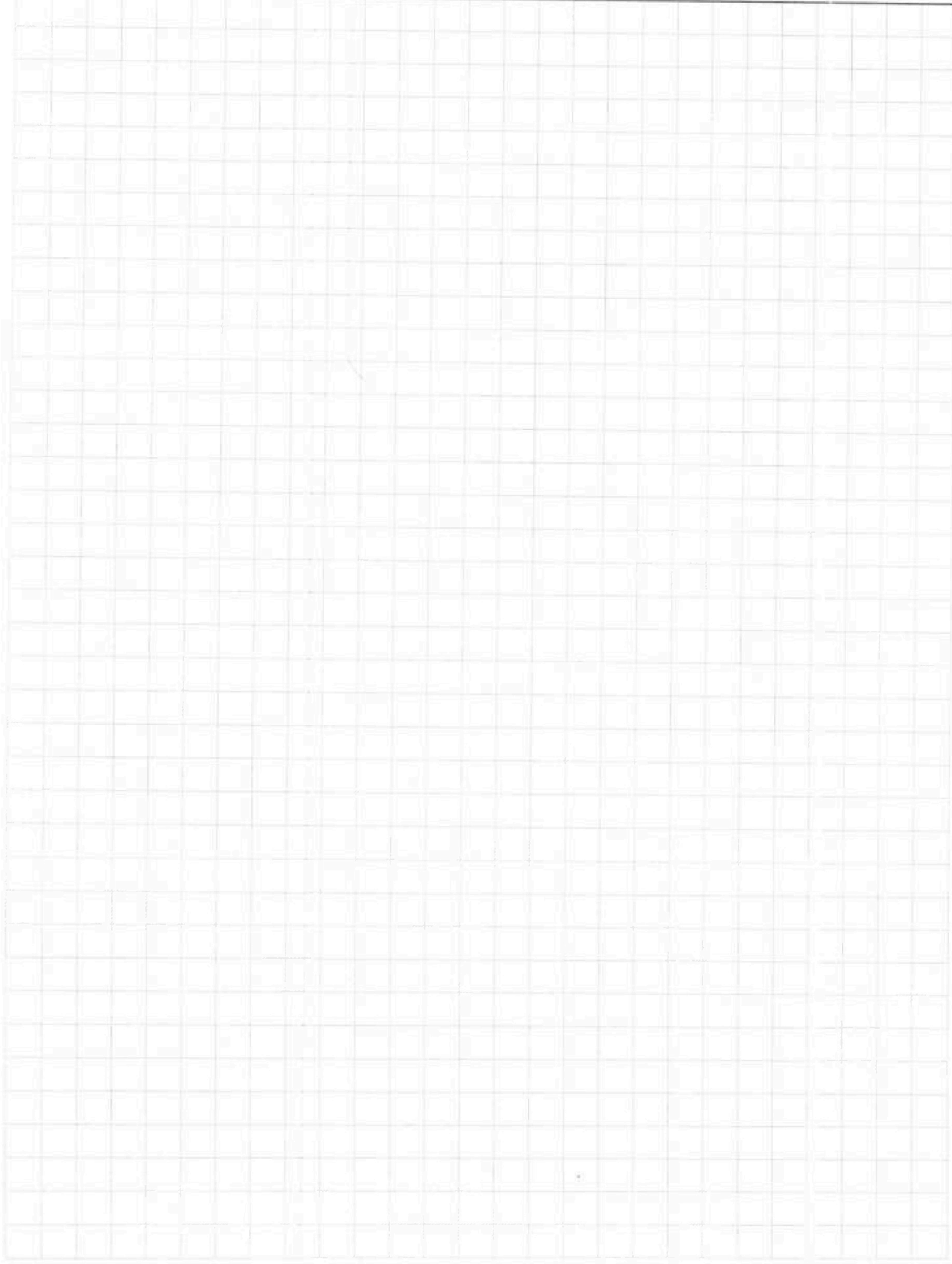
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!

$$4(120^2 + 221^2) = 4(120^2 - 2 \cdot 120 \cdot 221 + 221^2) + 8 \cdot 120 \cdot 221 = 4(221 - 120)^2 +$$

$$\begin{array}{r} \times 221 \\ 120 \\ \hline 442 \\ 2210 \\ \hline 26520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 221 \\ 12 \\ \hline 442 \\ 2210 \\ \hline 26520 \end{array}$$

$$= 4(10201 +$$

$$8 \cdot 26520 \quad \begin{array}{r} 14^2 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 221 \\ 26520 \\ \hline 2210 \\ \hline 26520 \end{array}$$

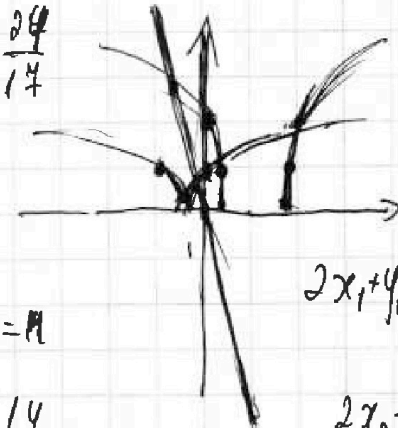
$$\begin{array}{r} \times 251 \\ 251 \\ \hline 251 \\ 1255 \\ 502 \\ \hline 63001 \end{array}$$

$$D = 4 \cdot (2514 \cdot 240) - 538$$

$$a^2 = \sqrt{\frac{2514 \cdot 240}{281} - 538}$$

$$AB = 24a = 24 \cdot \frac{24}{14}$$

$$10 \cdot 14 \cdot 14 + 13 \cdot 13 \cdot 9$$



$$(x+1) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x} = 0$$

$$2x_2 + y_2 = (2x_1 + y_1) = 11$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$$

$$2x_1 + y_1 = 2 \quad D = 36 - 28 = 8$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$2x_2 + y_2 = 24x = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3 \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 - 6 - 2\sqrt{3}$$

$$+ 2 = 8 + 1 + 2\sqrt{3} -$$

$$2a + b = 14 = 2x_1 + y_1$$

$$y_1 = -2x_1 + 2a + b - 14$$

$$0 = 16 + b$$

$$26 = a \cdot 3 + b$$

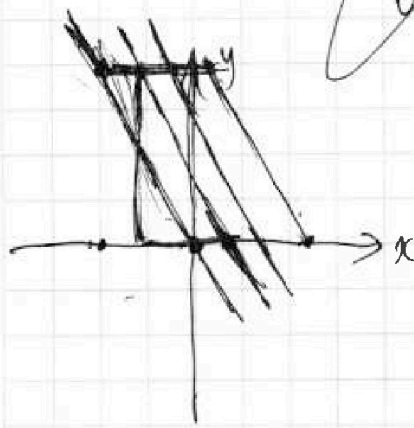
$$26 = -13a \Rightarrow a = -2$$

$$y = -2a^2 + 32$$

$$0 \leq y \leq 16$$

$$-2x \leq y \leq -2x + 32$$

$$0 \leq y + 2x \leq 32 \quad 0 \leq y \leq 16$$



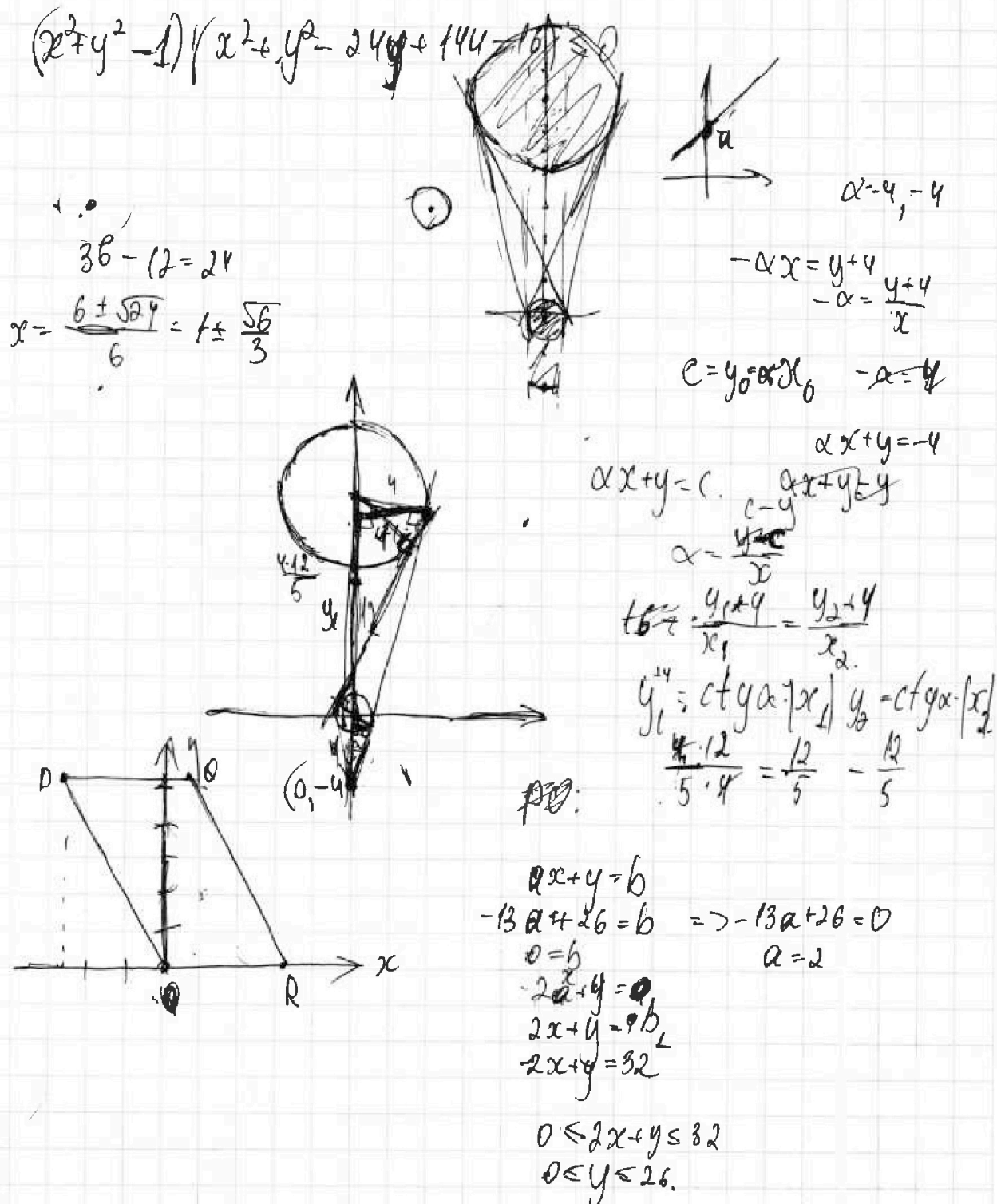
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 251 \\ \times 251 \\ \hline 251 \\ 1255 \\ \hline 500 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 + 3x - 1 = -9x + 1$$

$$1 - 9x = (1 - 9x) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right)$$

$$(1 - 9x) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 \right) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - 9x = 0 \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \end{cases} \quad x = \frac{1}{9}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \quad D = 36 - 24 = 12$$

$$3t^2 - 6t + 3 - 6t + 6 + 2 = 3t^2 - 12t + 11$$

$$3t^2 - 6t + 3 - 6t + 6 + 2 = 3t^2 - 12t + 11$$

$$3t^2 - 6t + 3 + 3t + 3 + 1 = 3t^2 - 9t + 7$$

$$3t^2 - 6t + 3 + 3t - 3 + 1 = 3t^2 - 3t + 1$$

$$3(t^2 + 3t + 3) = 3(t^2 + 3t + 3)$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \dots$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{(a+b)^2 - 9ab} = 1 \Rightarrow 1 + \frac{9ab}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ (a+b)^2 - 9ab &: m \\ 9ab &: m \end{aligned}$$

$$\frac{5+4}{25+16-4 \cdot 2}$$

$$a+b : p, p \quad (a, b) = 1$$

$$\frac{1+8}{1+64-4 \cdot 8} = \frac{9}{65-32} = \frac{9}{33} = \frac{3}{11}$$