



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть 7 число a z входит в степени α_1 , 6 число b в степени α_2 и 6 число c в степени α_3 .

Тогда т.к. $ab: 2^{15} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15$ $bc: 2^{17} \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17$
и $ac: 2^{23} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \Rightarrow 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 15 + 17 + 23 = 55$

Тогда $\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5$

Т.к. a, b, c - натуральные числа то $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ должны быть
целыми неотрицательными числами

$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$

Нам нужно найти т.к. нам нужно наименьшее возможное abc
 $\Rightarrow$ мы хотим чтобы $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ было наименьшим из возможных

$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 28$ При $\alpha_1 = 11$ $\alpha_2 = 4$ $\alpha_3 = 13$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 28$ и условия с делимостью выполняется

Пусть 7 входит в число a в степени β_1 ; 6 число b в
степени β_2 и 6 число c в степени β_3

Также как и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ должны быть целыми неотри-
цательными числами и:

$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$; $\beta_2 + \beta_3 \geq 18$ и $\beta_1 + \beta_3 \geq 39 \Rightarrow 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 11 + 18 + 39 = 68$

$\Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$ но заметим, что $\beta_1 + \beta_3 \geq 39$ и $\beta_2 \geq 0 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 39$

Т.к. нам нужно наименьшее возможное abc , то мы хотим
чтобы $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ было наименьшим $\Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 39$
из возможных

При $\beta_1 = 16$ $\beta_2 = 0$ $\beta_3 = 23$ условие выполняется

Т.к. нам нужно наименьшее abc то a, b и c не должны
делиться на какие-то другие числа кроме 2 и 7

$\Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow$ Наименьшее возможное $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

и это достигается при $a = 2^{11} \cdot 7^{16}$ $b = 2^4$ $c = 2^{13} \cdot 7^{23}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$$a^2 - 7ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 9ab = (a+b)^2 - 9ab$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

Если $a+b$ делится на m , то и $(a+b)^2$ делится на m

$\Rightarrow$ Чтобы мы могли сократить на m тогда $(a+b)^2 - 9ab$ делится на $m \Rightarrow$ и $9ab$ делится на m

П.к. нам нужно наибольшее $m \Rightarrow m = \text{НОД}(a+b; 9ab)$

Пусть $a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$ $b = q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdot \dots \cdot q_m^{b_m}$ где p_i и q_i это простые числа

П.к. $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь, то никакое из чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ не равно никакому из чисел $q_1, q_2, \dots, q_m$

Заметим что тогда m не может делиться ни на какое из чисел

$p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m$. Так как:

Пусть m делится на какое-то из этих чисел, без ограничения общности скажем, что на p_1

Тогда п.к. $a+b \div m$ то $a+b \div p_1$ заметим что $a \div p_1$ но тогда и $b \div p_1$ а такого быть не может

$\Rightarrow m$ не делится ни на какое из чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m$

П.к. $9ab \div m$ и $m \nmid p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m \Rightarrow$ наибольшее

возможное $m=9$

Пример чисел a и b когда $m=9$ $a=1$ $b=8$

$\frac{a}{b} = \frac{1}{8}$ - несократимая дробь $\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{9}{9}$ в этом случае $m=9$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

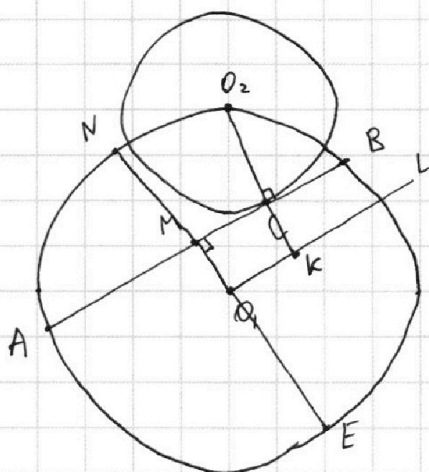
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча OR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3.



Пусть $AC = 17x$ и $CB = 7x$

Пусть O — центр окружности Ω

O_2 центр окружности ω

$$O, C = 7$$

Опустим из O_1 перпендикуляр на AB

по условию можно М. м.к. O_1 центр
окружности $\Rightarrow AM = BM = \frac{17x + 7x}{2} = 12x$

→ $CM = 5x$

Запишем теорему Тейлора для $\Delta O, MA$

$$AM^2 + O_1M^2 = AO_1^2$$

Требуются из D_1 правую $L \parallel AB$ такую $O_2 C \cap l = K$

$0,1 \text{ к} \parallel 0,1 \text{ м} \Rightarrow 0,1 \text{ м с к} - \text{нормальное}$ $\Rightarrow \text{с к} = 0,1 \text{ м} = y$ $0,1 \text{ к} = \text{с м} = 5 \times$

Занедем неопределенно $\frac{1}{2} \Delta \mathbf{O}_2 \mathbf{k} \quad \mathbf{O}_1 \mathbf{k}^2 + \mathbf{O}_2 \mathbf{k}^2 = \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2^2$

$$O_1 O_2 = O_1 A$$

$$\Rightarrow AM^2 + OM^2 = OK^2 + OM^2 \Rightarrow 144x^2 + y^2 = 25x^2 + 49 + y^2 + 144x$$

$$\Rightarrow 119x^2 - 14y = 49 \Rightarrow 17x^2 - 2y = 7 \quad \begin{matrix} 4 = 17x^2 \\ 2 = 2y \end{matrix} \quad x^2 = \frac{7+2y}{17}$$

$$\Delta NMA \sim \Delta BM^0E$$

$$\Rightarrow \frac{NM}{BM} = \frac{MA}{ME} \Rightarrow \frac{13-y}{12x} = \frac{12x}{13+y} \Rightarrow 144x^2 = 169 - y^2$$

$$\Rightarrow 289x^4 + 338x^2 - 126 = 0$$

$$\Rightarrow 144 \cdot \frac{7+2y}{17} = 169 - y^2 \Rightarrow 1008 + 288y = 2873 - 17y^2$$

$$17y^2 + 288y - 1865 = 0 \quad D = 288^2 + 4 \cdot 17 \cdot 1865 = 209764 = 458^2$$

$$y > 0 \Rightarrow y = \frac{-288 + 458}{2 \cdot 17} = \frac{170}{34} = 5$$

$$x^2 = \frac{7+2.5}{17} = \frac{17}{17} = 1 \quad x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = 1$$

$$AR = 24x = 24$$

Om 6 em: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Заметим что $(3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1) = 1 - 9x$
обозначим $3x^2 - 6x + 2 = a$ $3x^2 + 3x + 1 = b$ ($a, b \geq 0$)

Получим что $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$ $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

Тогда есть 2 случая

1 случай. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

2 случай: $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ возведем обе части в квадрат:

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$ возведем обе части в квадрат:

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 16 \cdot 9 + 16 \cdot 69 = 16 \cdot 78$$

$$x_1 = \frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \quad x_2 = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

или получим 3 корня: $\frac{1}{9}$; $\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$; $\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

Подставим их в выражения $3x^2 - 6x$ проверим будут ли с этими корнями выражения $3x^2 - 6x + 2$ и $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$$3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{1 - 18 + 54}{27} = \frac{37}{27} > 0$$

$$3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 > 0 \text{ т.к. все слагаемые больше } 0$$

$$3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 - 6 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 2 > 0 \text{ т.к. } 3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 > 0 \quad \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0$$

$$\Rightarrow -6 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} > 0$$

$$3 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{21} > -1 \Rightarrow 3 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 1 > 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 + 3 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 1 > 0$$

корни уравнения $3x^2 - 6x + 2$ будут числа $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ и $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$

Заметим что $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} < \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} < \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ т.к. $3x^2 - 6x + 2$ возраст. функция
 $\Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}\right) - 6 \cdot \left(\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}\right) + 2 < 0 \Rightarrow \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$ не подходит

Ответ: $\frac{1}{9}$; $\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

Найдем функцию для прямой OP и прямой QR
 ~~$y_{OP} = kx + b$~~ $y_{OP} = kx + b$ в точке O $0 \cdot k + b = 0 \Rightarrow b = 0$
 в точке P $-13 \cdot k = 26 \Rightarrow k = -2$

$$y_{OP} = -2x$$

т.к. $OPQR$ - параллелограмм $\Rightarrow OP \parallel QR \Rightarrow k_{OP} = k_{QR} = -2$

$\Rightarrow y_{QR} = -2x + b$ в точке R $-2 \cdot 16 + b = 0 \Rightarrow b = 32$

$$y_{QR} = -2x + 32$$

Пусть мы выбрали x_1, y_1 тогда выразим $y_2 = -2x_2 + (14 + 2x_1 + y_1)$

$14 + 2x_1 + y_1$ это какое-то число $\Rightarrow$ ~~выразим~~ т.к. коэффициенты
 при $x_2 = -2$ то прямая на которой будут лежать точки
 x_2, y_2 с заданными x_1, y_1 будет параллельна OP и QR

$\Rightarrow$ т.к. точки лежат внутри параллелограмма или на границе

$$\Rightarrow 0 \leq 14 + 2x_1 + y_1 \leq 32 \Rightarrow -14 \leq 2x_1 + y_1 \leq 18$$

Пусть $y_1 + 2x_1 = a$ ~~тогда~~ ^{тогда} $y_1 = -2x_1 + a$
 $-14 \leq a \leq 18$

Тогда прямая на которой лежат точки x_1, y_1
 также параллельна OP и QR т.к. коэффициент при $x_1 = -2$
 $\Rightarrow 0 \leq a \leq 32$ и $-14 \leq a \leq 18 \Rightarrow 0 \leq a \leq 18$

$$\Rightarrow 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18$$

$$y_2 + 2x_2 = 14 + 2x_1 + y_1 \Rightarrow 14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32$$

$$26 \geq y_1 \geq 0 \Rightarrow \text{т.к.} \quad -\frac{13}{2} \leq x_1 \leq 9 \quad 0 \leq y_2 \leq 26 \Rightarrow -6 \leq x_2 \leq 16$$



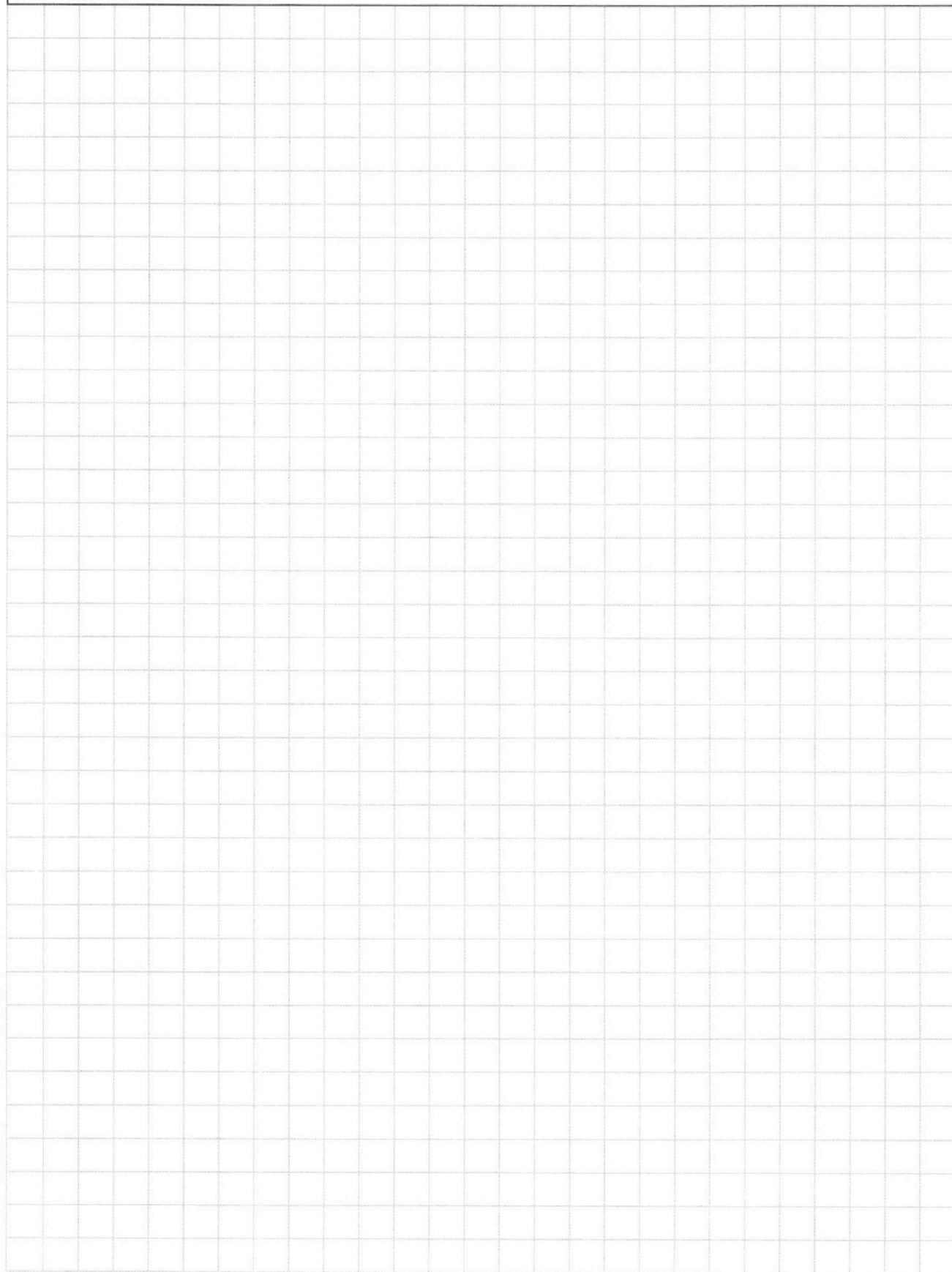
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

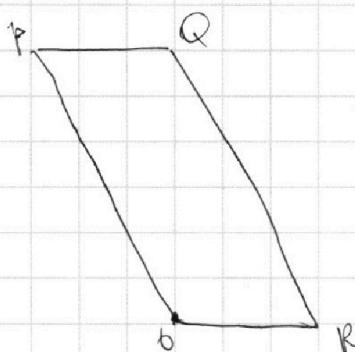
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 458 \\ \times 458 \\ \hline 3664 \\ + 2290 \\ 1832 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\sin^2 x = \frac{25}{50+10x} = \frac{5}{10+2x} = \frac{5}{5+x}$$



$$\begin{array}{r} \times 17 \\ \times 16 \\ \hline 68 \\ 238 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 16 \\ \times 13 \\ \hline 48 \\ 208 \\ \hline \end{array} = \boxed{446}$$

$$x_1 = 0 \quad y_1 = 0$$

$$y_2 = 14 - 2x_2$$

$$y_2 = \underbrace{(14 + y_1 + 2x_1)}_b - 2x_2 = b - 2x_2$$

0	14
1	12
2	10
...	...
7	0

$$\begin{array}{cc} -2x_2 & -2x_2 + 32 \\ 0 \leq b \leq 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0 \leq 14 + y_1 + 2x_1 \leq 32 \\ -14 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18 \end{array}$$



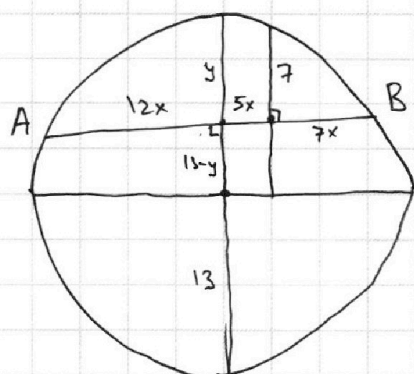
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{y}{12x} = \frac{12x}{25-y} \quad 144x^2 = 26y - y^2$$

$$144x^2 + 169 + y^2 - 26y = 25x^2 + 400 + y^2 - 40y$$

$$119x^2 + 14y = 231$$

$$17x^2 + 2y = 33$$

$$y = \frac{33 - 17x^2}{2} \quad 144x^2 = 429 - 221x^2 - y^2$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{17} \\ 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 33 \\ 13 \\ \hline 99 \\ + 33 \\ \hline 429 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{17} \\ 13 \\ \hline 51 \\ + 17 \\ \hline 221 \end{array}$$

$$365x^2 - 4$$

$$429 - 365x^2 = y^2$$

$$1089 + 289x^2 - 1122x^2 = 858 - 730x^2$$

$$289x^4 - 392x^2 + 231 = 0$$

$$x = t$$

$$\begin{array}{r} \times 33 \\ 17 \\ \hline 231 \\ 33 \\ \hline 561 \\ 2 \\ \hline 1122 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 33 \\ 33 \\ \hline 99 \\ + 99 \\ \hline 1989 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{392} \\ 392 \\ \hline 784 \\ + 3528 \\ \hline 1176 \\ 153664 \end{array}$$

$$153664 -$$

$$\begin{array}{r} \times 288 \\ 288 \\ \hline 2304 \\ + 2304 \\ \hline 576 \\ 82944 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 289 \\ 231 \\ \hline 289 \\ 867 \\ \hline 66759 \\ 4 \\ \hline 267036 \end{array}$$

$$6 \cdot \frac{24}{69} =$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 3 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 9x$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 4 + 81x^2 - 36x$$

$$\begin{array}{r} \times 441 \\ 3 \end{array}$$

$$3x(x-6)$$

$$\frac{24}{21} \cdot \left(\frac{24}{69} - 6 \right) + 2$$

$$\frac{6-2\sqrt{3}}{3} : \frac{3-\sqrt{3}}{3} \quad \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{420} \\ 420 \\ \hline 84 \\ 168 \\ \hline 176400 \\ \times 1865 \\ 68 \\ \hline 14920 \\ + 11190 \\ \hline 126820 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{17} \\ 7 \\ \hline 119 \\ 2 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 78 \\ 4 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 440 \\ 440 \\ \hline 176 \\ 176 \\ \hline 450 \\ 450 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \quad \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 4 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$2\sqrt{78} + 21\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{312} - \sqrt{576} \\ \hline 576 \\ - 576 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 7 \\ \hline 1008 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82944 + 126820 \\ 82944 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$209764$$

$$\begin{array}{r} \times 2873 \\ 1008 \\ \hline 1865 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 400 \\ 400 \\ \hline 160000 \\ \times 458 \\ 458 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 576 \\ 238 \\ \hline 338 \\ - 458 \\ \hline 288 \\ 170 \end{array}$$



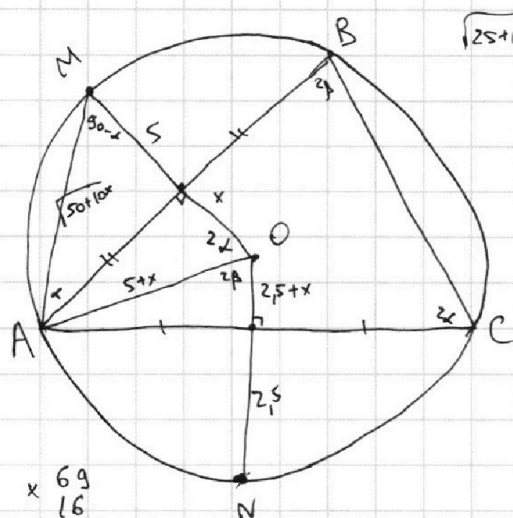
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 16 \\ \hline 414 \\ \times 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

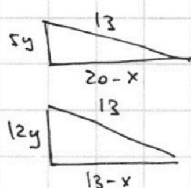
$$2 \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$16(9 + 69) = 16 \cdot 78$$



$$x + y \geq 15$$

$$y + z \geq 17$$

$$x + z \geq 23$$

$$x + y + z \geq \frac{55}{2} = 27.5$$

$$kx - 13k = 26$$

$$k = -2$$

$$16k + b = 0$$

$$3k + b = 26$$

$$k = -2$$

$$b = 32$$

$$0,0; -1; 2$$

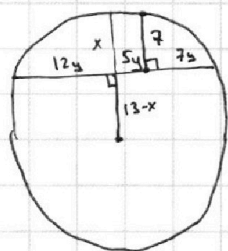
$$169 - 144y^2 = 169 + x^2 - 26x$$

$$x^2 + 144y^2 = 26x$$

$$y = \frac{\sqrt{x(26-x)}}{12}$$

$$25y^2 + 400 + x^2 - 40y = 144y^2 + 169 + x^2 - 26x$$

$$14x + 119y^2 = 231$$



$$50 + 2x^2 + 20x - 2$$

$$(50 + 2x^2 + 20x)(1 - \cos \alpha) = 50 + 10x$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{25 + 5x}{25 + x^2 + 10x} = \frac{5(5 + x)}{(5 + x)^2} = \frac{5}{5 + x}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{5 + x}$$

$$a, b \geq 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = 1 - 9x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$a - \sqrt{a} = b - \sqrt{b}$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = a^2 + b^2 -$$

$$a^2 + a - 2\sqrt{ab}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14,5$$

$$y_2 = 14 + 2x_1$$

$$0,0 \quad 0,14$$

$$0,0 \quad 1,16$$

$$x + y + z = 34 \quad z = 23$$

$$x = 16$$

$$y = 0$$

$$x + y = 15$$

$$y + z = 17$$

$$z + x = 23$$

$$ab: 2^{15} 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} 7^{39}$$

$$2^{23} 7^{39}$$

$$2^{23} 7^{39}$$

$$2^{23} 7^{39}$$

$$2^{23} 7^{39}$$

$$z - x = 2$$

$$x - y = 6$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

$$z - y = 8$$

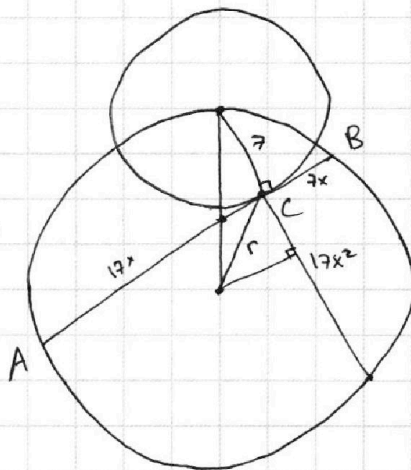
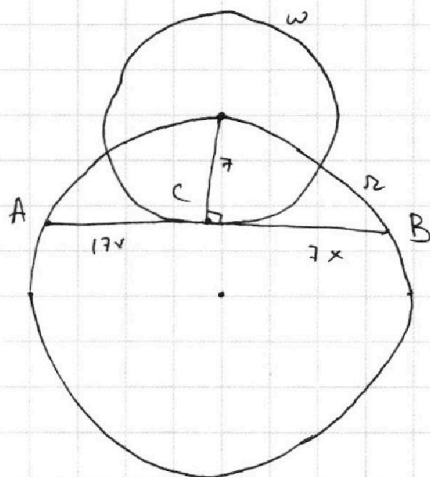
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$17x \cdot 7x = 13^2 - r^2$$

$$r = \sqrt{169 - 119x^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\text{НОД}(a,b) = 1$$

$$17x \sin \alpha = 7x \sin \alpha$$

$$\frac{17x - \frac{7}{\tan \alpha}}{26 - \frac{7}{\sin \alpha}} = \frac{(17x - \frac{7}{\tan \alpha}) \sin \alpha}{(26 \sin \alpha - 7) \tan \alpha} =$$

$$\frac{7}{\sin \alpha} : (7x + \frac{7}{\tan \alpha}) = \frac{1}{x \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\frac{17x \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{26 \sin \alpha - 7} = \frac{\cos \alpha + x \sin \alpha}{x \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{17x \tan \alpha - 7}{26 \sin \alpha - 7} \cdot \cos \alpha = \frac{17x \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{26 \sin \alpha - 7} = \frac{1}{x \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$$

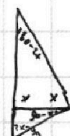
$$\frac{\sqrt{49 + 49x^2}}{\sqrt{17x^2 + 17^2x^4}} = \frac{7}{17x}$$

$$\frac{7}{17x} = \frac{7x}{y}$$

$$y = 17x^2$$



$$\frac{1 + 17x^2}{x^2 + 17x^4} = \frac{1}{x^2}$$



$$90 - x = 180 - 2x \quad x = 90$$

$$\frac{7 \cdot 2}{7 + 17x^2} = \frac{y}{13}$$

$$y = \frac{182}{7 + 17x^2}$$

$$7^2 + r^2 - 2 \cdot 7r \cdot \cos \alpha = 13^2$$

$$7^2 - 119x^2 - 2 \cdot 14 \cdot r \cdot \cos \alpha = 0$$

$$7 - 17x^2 - 2r \cos \alpha = 0$$

$$2r \cos \alpha = 7 - 17x^2$$

$$\cos \alpha = \frac{7 - 17x^2}{2 \sqrt{13^2 - 119x^2}}$$

$$r^2 + 17^2x^4 + 2 \cdot 17x^2 \cdot \cos \alpha = 13^2$$

$$r^2 + 17^2x^4 + 2 \cdot 17x^2 \cdot \cos \alpha = 13^2$$

$$7^2 - 14r \cos \alpha = 17^2x^4 + 2 \cdot 34x^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{14}{13} \cdot \frac{42}{182}$$

$$7(7 - 2r \cos \alpha) = 17x^2(17x^2 + 2r \cos \alpha)$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{9}{65 - \frac{72}{56}}$$

$$\frac{9}{5} = 1 \frac{4}{5}$$

$$a+b \quad 9ab \quad a+b : 9$$

$$a^2 + b^2 - 7ab = a^2 + b^2 + 2ab - 9ab = (a+b)^2 - 9ab$$