



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Пусть  $ac = x \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$ ,  $x \in \mathbb{N}$   
Периодом или первые два выражения:

$$ab^2c : 2^{32} \cdot 7^{29}$$

$$x \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot b^2 : 2^{32} \cdot 7^{29}$$

$$x \cdot b^2 : 2^9$$

Нам нужно минимальное значение  $x \cdot b$ . При  $x \cdot b^2 : 2^9$   
минимальное значение  $x \cdot b = 2^5 (2 \cdot (2^4)^2 : 2^9 \text{ или } 1 \cdot (2^5)^2 : 2^9)$ .

Тогда наименьшее произведение  $abc = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot xb =$   
 $= 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot 2^5 = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Пример:  $a = 2^{10} \cdot 7^{21}$ ;  $b = 2^5$ ;  $c = 2^{13} \cdot 7^{18}$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$\frac{a}{b}$  несократимо  $\Rightarrow$   $a$  взаимно  
просто с  $b$

Предположим, что эту дробь можно сократить на  $m$ . Тогда  
 $(a+b):m \Rightarrow (a+b)^2:m$ , а т.к.  $((a+b)^2-9ab):m \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 9ab:m$

Заметим, что если  $u$  или например  $a$  ~~и~~  
есть общий делитель (отличный от 1), тогда, т.к.  $a:q$ ,  
 $m:q$ ,  $(a+b):m \Rightarrow (a+b):q \Rightarrow b:q$ . Тогда  $u$  и  $b$   
есть общий делитель  $q$ , что противоречит условию  
задачи. Тогда  $a$  взаимно просто с  $m$ , а ана-  
логично,  $b$  взаимно просто с  $m$ . Тогда  $9ab:m$   
трансформируется в  $9:m$ . Проверим максимальное  
 $m=9$ .

Пример:  $a=4$ ;  $b=5$ .

$$\frac{4+5}{4^2-7 \cdot 4 \cdot 5+5^2} = \frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \quad | \uparrow 2 \quad \text{OD3:}$$

$$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1-2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1} = 1-18x+81x^2$$

$$-2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1} = 75x^2-15x-2 \quad | \uparrow 2$$

$$4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1) = (75x^2-15x-2)^2$$

$$36x^4 - 36x^3 + 36x^2 - 72x^2 + 8 = 5625x^4 - 2250x^3 + 225x^2 - 300x + 4$$

$$5589x^4 - 2214x^3 - 111x^2 + 60x - 4 = 0$$

Большинство коэф-тов : 3, отсюда и будем искать.

$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}$  не подходят. Будем пробовать  $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$  - не подходит.

$$5589 = 23 \cdot 3^5$$

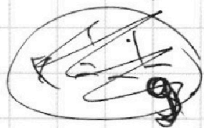
$$2214 = 3^3 \cdot 2 \cdot 41$$

$$111 = 37 \cdot 3$$

$$60 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\frac{23}{3^3} - \frac{2 \cdot 41}{3^6} - \frac{37}{3^5} + \frac{20}{3^2} - \frac{4 \cdot 37}{3^7}$$

будем спраш отрицательные значения.



невозможно

Нет решений:  $\frac{23}{117} = \frac{1}{9}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Нарисовав данный параллелограмм, мы увидим, что он ограничен прямыми  $y+2x=0$ ;  $y+2x=16$ ;  $y=26$ ;  $y=0$ . Наш параллелограмм можно условно разбить на 17 отрезков:

$y+2x=0$ ;  $y+2x=1$ ;  $y+2x=2$ ; ...;  $y+2x=15$ ;  $y+2x=16$ . На каждом таком отрезке 14 целочисленных точек. Рассмотрим условие:

$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$ . Данное условие преводит прямую  $y+2x=0$  в прямую  $y+2x=14$  и так далее (сумма  $y+2x$  увеличивается на 14). Чтобы обе точки лежали внутри параллелограмма, нужно, чтобы  $0 \leq y+2x \leq 16$ .

Тогда нам подходят только такие пары прямых:

$$y+2x=0 \longrightarrow y+2x=14$$

$$y+2x=1 \longrightarrow y+2x=15$$

$$y+2x=2 \longrightarrow y+2x=16.$$

Любой точке на ~~любой~~ выбранной нами прямой соответствует любая точка на прямой с номером на 14 больше. Число способов выбрать такие пары:

$$3 \cdot 14^2 = 588$$

три варианта  
пары прямых

Ответ: 588.

$$\begin{array}{r} 42 \\ 14 \\ \hline 168 \\ 42 \\ \hline 588 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

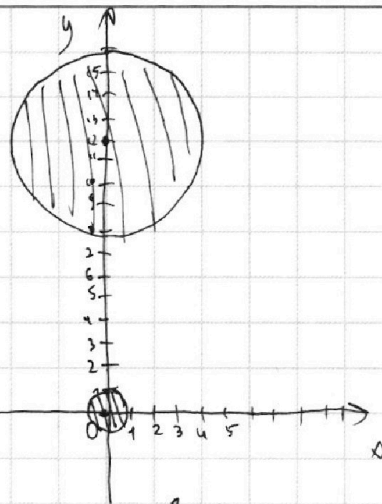
№6.

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

Будем решать графически. Для начала решим левые неравенства.

$x^2+y^2-1=0$  — окружность центром в  $(0,0)$  и радиусом 1.

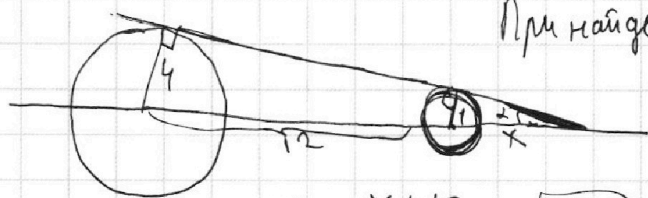
$x^2+(y-12)^2-16=0$  — окружность центром в  $(0,12)$  и радиусом 4.



Внутри окружностей значения  $x^2+y^2-1 < 0$ , а снаружи  $> 0$ .

Тогда решим наше неравенство, т.к. окружности не пересекаются, будут области внутри окружностей и на границах. Теперь нам нужно на этом графике как-то провести прямую, чтобы у нас было два корня. Если прямая пересечет какую-нибудь окружность, то решений будет 0. Единственное, что нам подойдет это общая касательная <sup>внеш</sup> двух окружностей. Найдем ее коэффициент наклона.

1



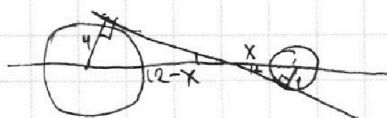
При найденных нами  $a, b$  подобрать возможно. Прямая может быть и  $a < 0$ .

Из подобия:  $\frac{x}{1} = \frac{x+12}{4} \Rightarrow x=4$

$a = \pm \operatorname{ctg} \alpha = \pm \sqrt{15}$

$\sin \alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$   
 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$   
 $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{15}$

2



Из подобия:  $x = \frac{12-x}{4}$   $\sin \alpha = \frac{5}{12}$   
 $\Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$   $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12}$   
 $x = \frac{12}{5}$   $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{119}}{5} \Rightarrow$   
 Ответ:  $\pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$



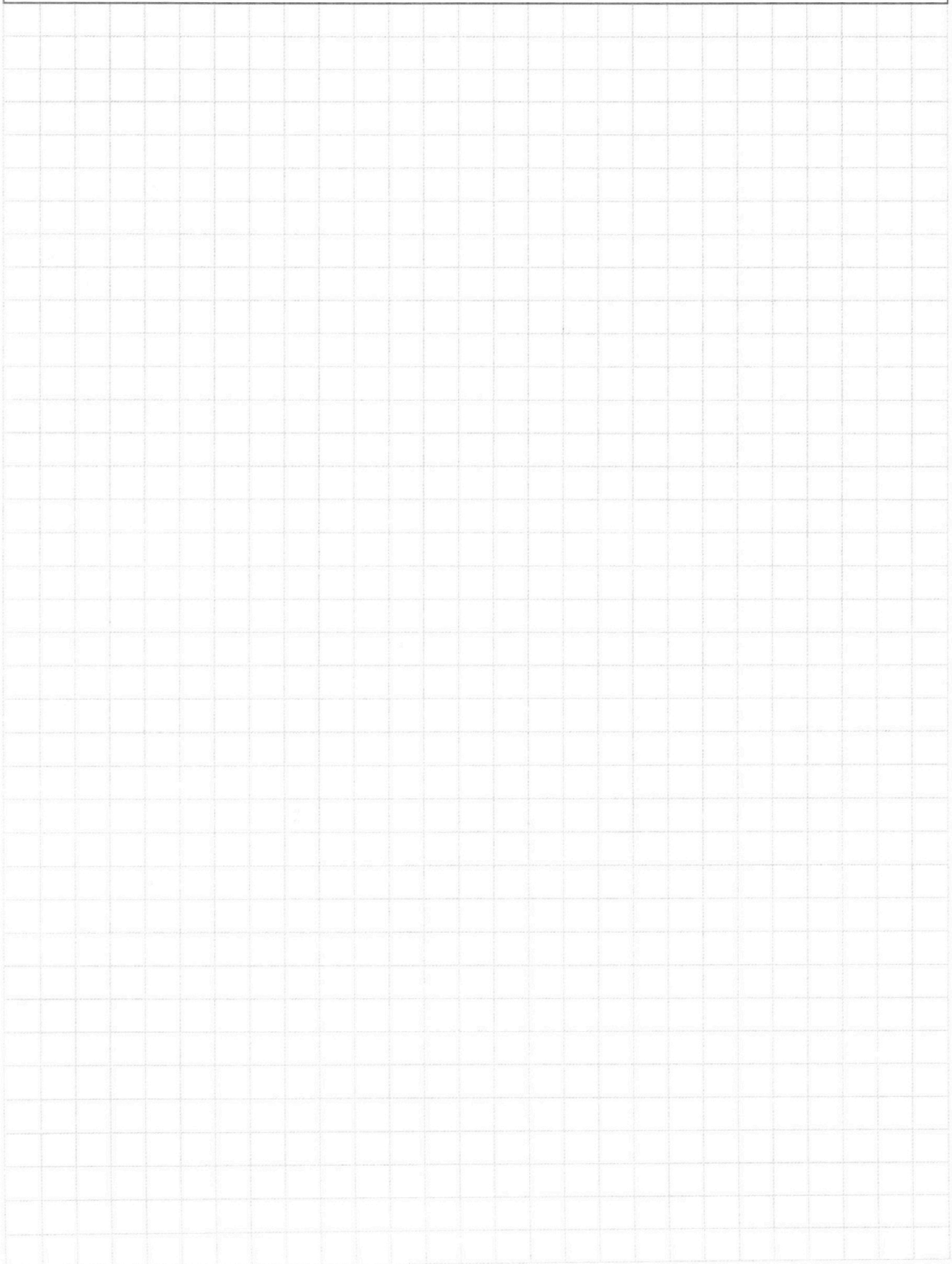
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$x \in \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cap \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

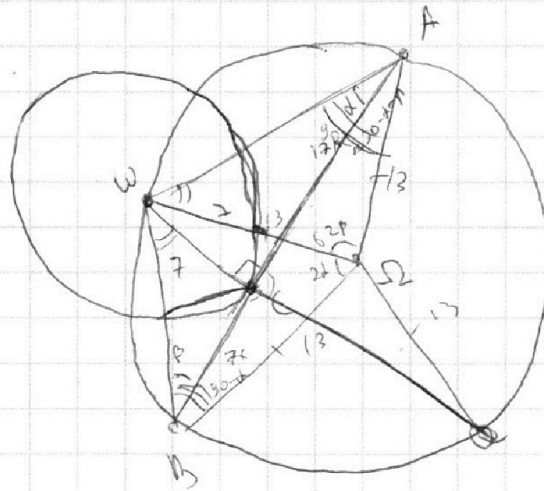
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{7}{17x} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{1}{x} \\ \operatorname{tg} \mu &= x \end{aligned}$$



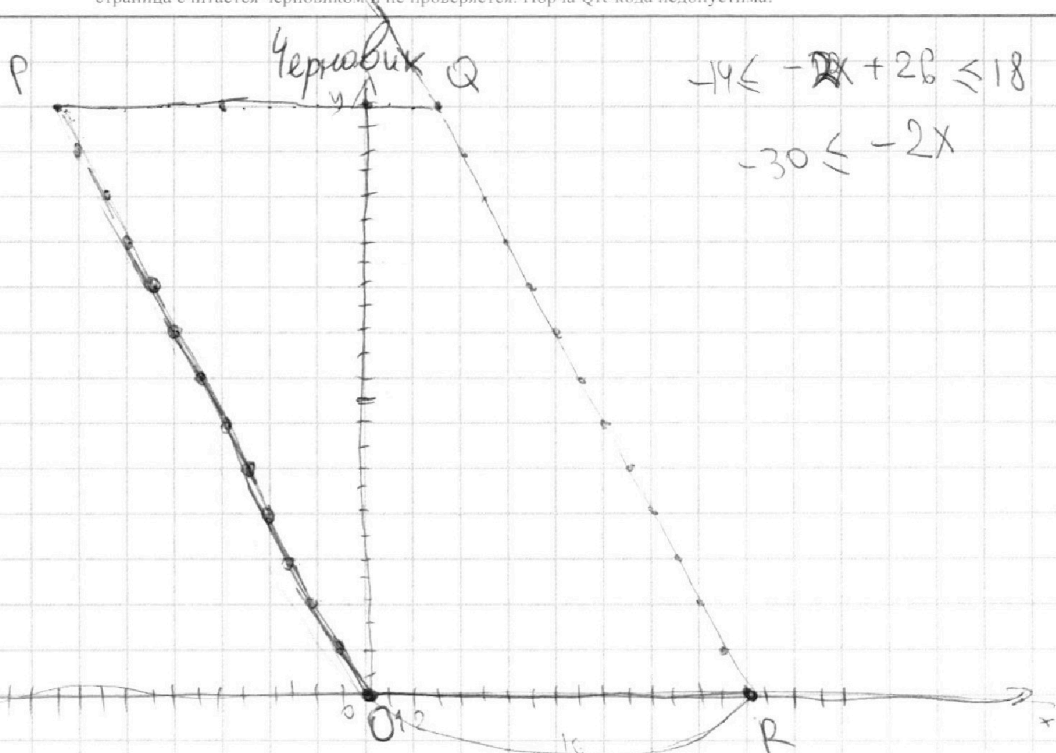
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



A-Q  $x=3, y=26$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2x_2 - 6 + y_2 - 26 = 14 \implies \dots = 6$$

$$y_2 = (2x_1 + y_1 + 14) - 2x_2$$

$$2x_2 + y_2 = 46$$

$$\frac{x}{3} = \frac{x+26}{18}$$



$$y_2 = 46 - 2x_2 \quad 0 \leq 2x_1 + y_1 + 14 \leq 32$$

$$16x = 3x + 26 \cdot 3$$

$$\implies x = 26 \cdot 3$$

$$\boxed{x=6}$$

$$\implies 2$$

$$-4 \leq 2x_1 + y_1 \leq 18$$

O, 1, 2.

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$$

$$14 \cdot 3 = \boxed{42}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

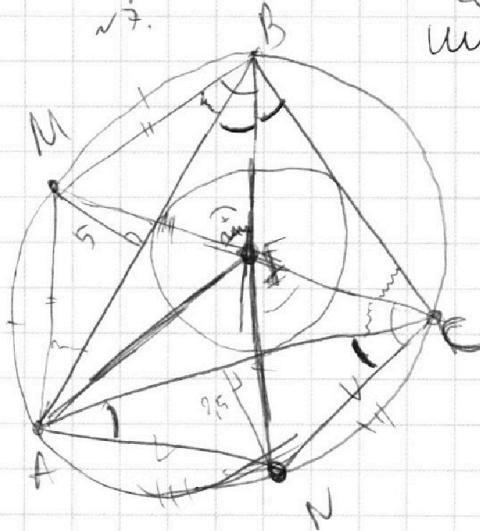
 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

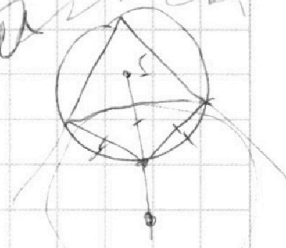


Черновик.

№ 7.



*Handwritten scribbles and lines.*



$$1,31 : 3,95 = \dots$$

$$\frac{BI}{CI} = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$   
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$   
 $ac := 2^{23} \cdot 7^{39}$

Черновик.

$\frac{672}{168} = 4$   
 $\frac{790}{48} = 16 \frac{23}{12}$   
 $\frac{928}{96} = 9 \frac{2}{3}$

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

$$\begin{array}{r} 55 \ 89 \ 9 \\ 621 \ 9 \\ 3 \\ 23 \ 23 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ +36 \\ \hline 111 \end{array}$$

$ac \cdot b^2 : 2^{32} \cdot 7^{29}$

$2^{23} \cdot 7^{39} \cdot b^2 : 2^{32} \cdot 7^{29}$

$b^2 : 2^9 \cdot 7^9$

$b : 2^5 \cdot 7^4$

$$\frac{a}{b} = \frac{256 \cdot 22}{7 \cdot 68} = \frac{512}{5888}$$

$3x^2 + 3x + 1 = 0$   
 $a+b$   
 $a^2 - 7ab + b^2$

$3x^2 - 6x + 2 = 0$   
 $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$   
 $x_1 + x_2 = 2$

$D = 36 - 24 = 12$   
 $x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

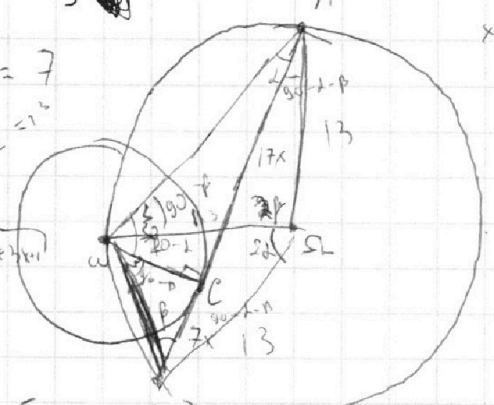
$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$   
 $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$

$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 18x + 81x^2$

$-2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 75x^2 - 15x - 2$

$4(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1) = (75x^2 - 15x - 2)^2$   
 $36x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 8 = 5625x^4 - 2250x^3 - 300x^2 + 26x + 4$

$5589x^4 - 2214x^3 - 399x^2 + 60x - 4 = 0$   
 $89 - 84 - 1 + 20 - 4 = 0$



$$\begin{array}{r} 184 \\ 64 \\ +336 \\ \hline 504 \\ +5376 \\ \hline 5880 \\ +5484 \\ \hline 11364 \end{array}$$

$180 - 2 - 2 = 176$   
 $x = 90 - p$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



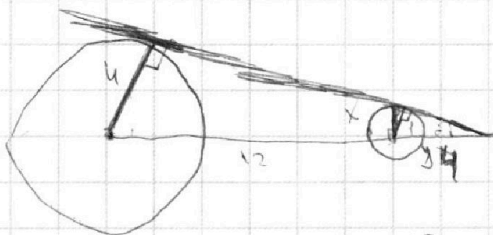
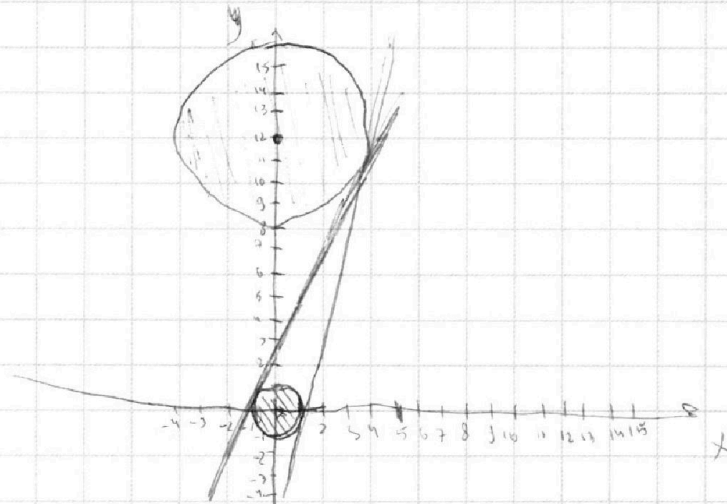
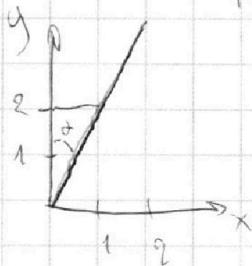
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$k=2 \\ \text{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$



$$\sin \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

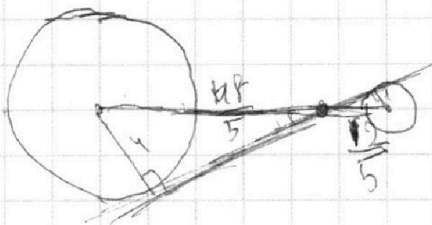
$$a = \pm \sqrt{15}$$

$$y = kx$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{k}$$

$$k = \sqrt{15}$$

$$x = \frac{x+12}{4} \\ 4x = x+12 \\ x = 4$$



$$r = 4s$$

$$12 = 5s \Rightarrow s = 2.4 = \frac{12}{5}$$

$$\cos = \sqrt{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12}$$

$$\text{tg} = \frac{5}{\sqrt{119}}$$

$$k = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\frac{4.5}{4.8} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{144}{25} = \frac{119}{9}$$