



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$$ab : 2^{15} \cdot 7^1$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Пусть } ac = x \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}, x \in \mathbb{N}$$

Первых трех первые два выражения:

$$a b^2 c : 2^{32} \cdot 7^{29}$$

$$x \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot b^2 : 2^{32} \cdot 7^{29}$$

$$x \cdot b^2 : 2^9$$

Нам нужно минимальное значение $x \cdot b$. При $x \cdot b^2 : 2^9$

минимальное значение $x \cdot b = 2^5 (2 \cdot (2^4)^2 : 2^9 \text{ или } 1 \cdot (2^5)^2 : 2^9)$.

Тогда наименьшее произведение $abc = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot x \cdot b =$

$$= 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot 2^5 = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Пример: $a = 2^{10} \cdot 7^{21}; b = 2^5 \cancel{\text{или}}; c = 2^{13} \cdot 7^{18}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$\frac{a}{b}$ неократимо $\Rightarrow a$ взаимно
просто с b

Предположим, что эту дробь можно сократить на m . Тогда

$$(a+b) : m \Rightarrow (a+b)^2 : m, \text{ а т.к. } ((a+b)^2 - 9ab) : m \Rightarrow \\ \Rightarrow 9ab : m$$

Заметим, что если у ~~этих~~ например у ~~одного~~ a есть общий делитель (отличный от 1), тогда, т.к. $a : q$,
 $m : q$, $(a+b) : m \Rightarrow (a+b) : q \Rightarrow b : q$. Тогда у a и b
есть общий делитель q , что противоречит условию

несократимости. Тогда a взаимно просто с m , и, следо-
вательно, b взаимно просто с m . Тогда $9ab : m$
трансформируется в $9 : m$. Делим 9 на максимальное
 $m = 9$.

Пример: $a = 4$; $b = 5$.

$$\frac{4+5}{4^2 - 7 \cdot 4 \cdot 5 + 5^2} = \frac{9}{41 - 140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

-140
99

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} &= 1 - 9x \quad | \uparrow 2 \\ 3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2 \cdot \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} &= 1 - 18x + 81x^2 \\ - 2 \cdot \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} &= 45x^2 - 15x - 2 \quad | \uparrow 2 \\ 9(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1) &= (75x^2 - 15x - 2)^2 \\ 36x^4 - 36x^3 + 36x^2 - 72x^2 + 8 &= 5625x^4 - 2250x^3 + 225x^2 - 300x^2 + \\ 5589x^4 - 2214x^3 - 111x^2 + 60x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Большинство из ор-тоў : 3, оттуда будзе чысцць.

$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ не падвядзяць. будзе прыблізваць $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$ - не падвядзяць.

$$5589 = 23 \cdot 3^5$$

$$2214 = 3^3 \cdot 2 \cdot 41$$

$$111 = 37 \cdot 3$$

$$60 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\frac{23}{3^5} - \frac{2 \cdot 41}{3^6} - \frac{37}{3^5} + \frac{29}{3^2} - \frac{4 \cdot 3^2}{3^7}$$

будзе знатны афрагамент з членамі.



$$23/3^5 - 2 \cdot 41/3^6 - 37/3^5 + 29/3^2 - 4 \cdot 3^2/3^7$$

Нет решения: $\frac{23}{3^5} - \frac{2 \cdot 41}{3^6} - \frac{37}{3^5} + \frac{29}{3^2} - \frac{4 \cdot 3^2}{3^7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Нарисовав данный параллелограмм, мы увидим, что он ограничен прямыми $y+2x=0$; $y+2x=16$; $y=26$; $y=0$.

Наш параллелограмм можно условно разбить на 17 отрезков.

$y+2x=0$; $y+2x=1$; $y+2x=2$; ...; $y+2x=15$; $y+2x=16$. На каждом таком отрезке 14 целочисленных точек. Рассмотрим условие:

$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$. Данное условие переводит прямую $y+2x=0$ в прямую $y+2x=14$ и так далее (сумма $y+2x$ увеличивается на 14). Чтобы обе точки лежали внутри параллелограмма, нужно, чтобы $0 \leq y+2x \leq 16$.

Тогда нам подходит только такие пары прямых:

$$y+2x=0 \rightarrow y+2x=14$$

$$y+2x=1 \rightarrow y+2x=15$$

$$y+2x=2 \rightarrow y+2x=16.$$

Каждой точке на ~~прямой~~ прямой нашей прямой соответствует модуль тогда на прямой с номером на 14 больше. Число способов выбрать такие пары:

$$3 \cdot 14^2 = 588$$

При вычислении
получится

Ответ: 588.

$$\begin{array}{r} 42 \\ 44 \\ \hline 168 \\ 162 \\ \hline 588 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

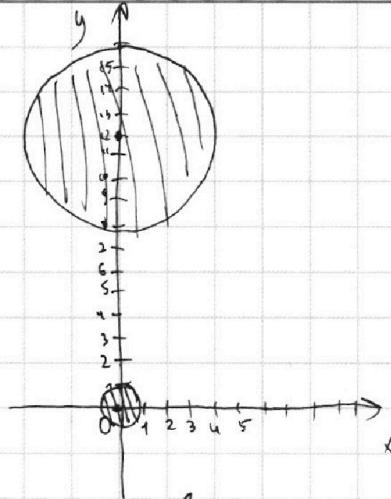
$\sqrt{6}$

будем решать графически. Для
найденного решения касательства.

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ — окружность центром в $(0, 0)$ и
радиусом 1.

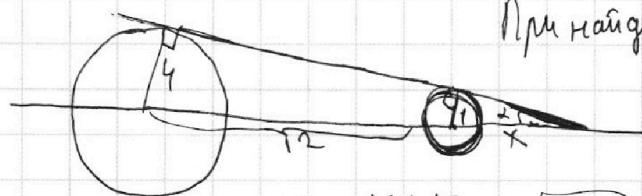
$x^2 + (y-12)^2 - 16 = 0$ — окружность центром в $(0, 12)$
и радиусом 4.

Внутри окружностей значение $x^2 + y^2 - 1 < 0$, а скобки ≤ 0 .



Тогда решением нашего касательства, т.к. окружности не
пересекают, будут области внутри окружностей и на
границах. Теперь нам нужно на этом графике как-то
проверить прямую, чтобы у нас было два корня. Если прямая
пересекает какую-нибудь окружность, то количество решений
будет 0. Единственное, что нам подойдёт это
общий касательный ^{внешних} двух окружностей. Найдем ^{из} касательного.

①



При найденных радиусах a, b подобрать
возможно. Причем a может
быть и < 0 .

$$\text{Из подобия: } \frac{x}{1} = \frac{x+12}{4} \Rightarrow x = 4$$

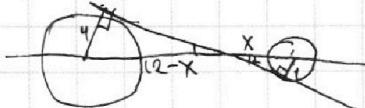
$$a = \pm \operatorname{ctg} \alpha = \pm \sqrt{15}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{15}$$

②



$$\text{Из подобия: } x = \frac{12-x}{4} \quad \sin \alpha = \frac{5}{12}$$
$$\Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12}$$
$$x = \frac{12}{5} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{119}}{5} \Rightarrow$$
$$\text{Ответ: } \pm \frac{\sqrt{119}}{5}; \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 **МФТИ**



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cap \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

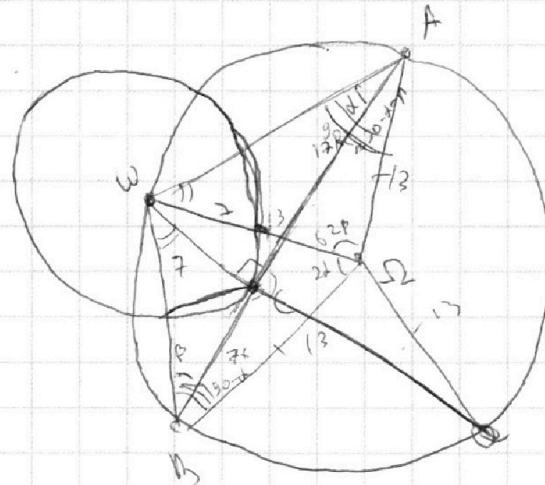
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{7}{17x} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{1}{x} \\ \operatorname{tg} u &= x\end{aligned}$$





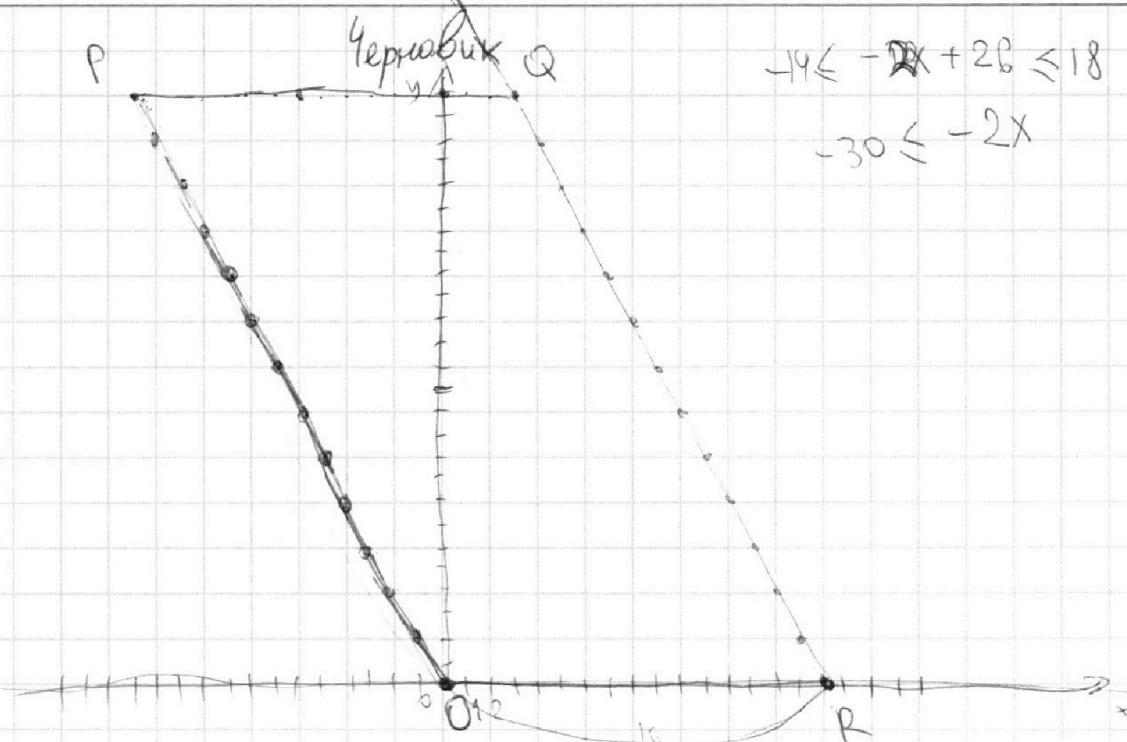
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-4x - 2y + 26 \leq 18$$

$$-30 \leq -2x$$

$$A \cdot Q \quad x=3, y=26$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2x_2 - 6 + y_2 - 26 = 14 \quad \dots \dots \dots$$

$$2x_2 + y_2 = 46$$

$$\frac{x}{3} = x + 26$$

$$y_2 = 46 - 2x_2 \quad 0 \leq 2x_1 + y_1 + 14 \leq 32$$

$$16x = 3x + 26 \cdot 3$$

$$13x = 26 \cdot 3$$

$$\boxed{x = 6}$$

$$\boxed{2x_2 = 42}$$

$$-4x - 2y + 14 \leq 18$$

O, 1, 2,

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$$

$$14 \cdot 3 = \boxed{42}$$



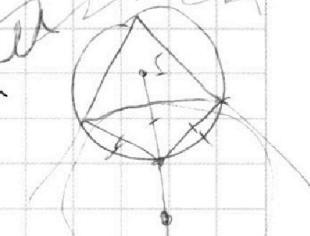
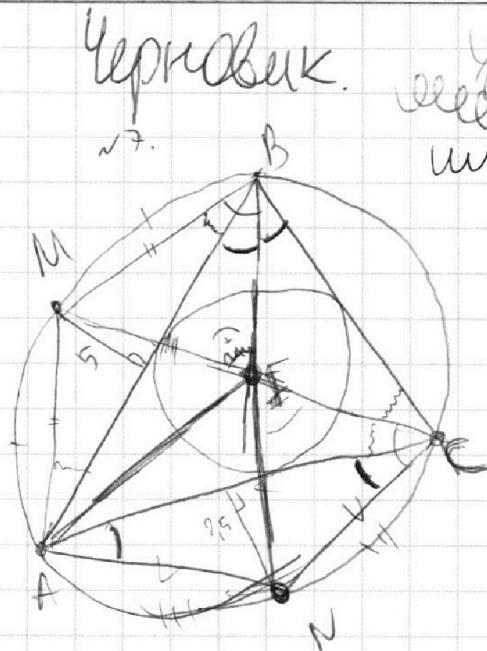
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1:1:3=95,$$

$$\frac{BE}{CE} = \frac{n}{V}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

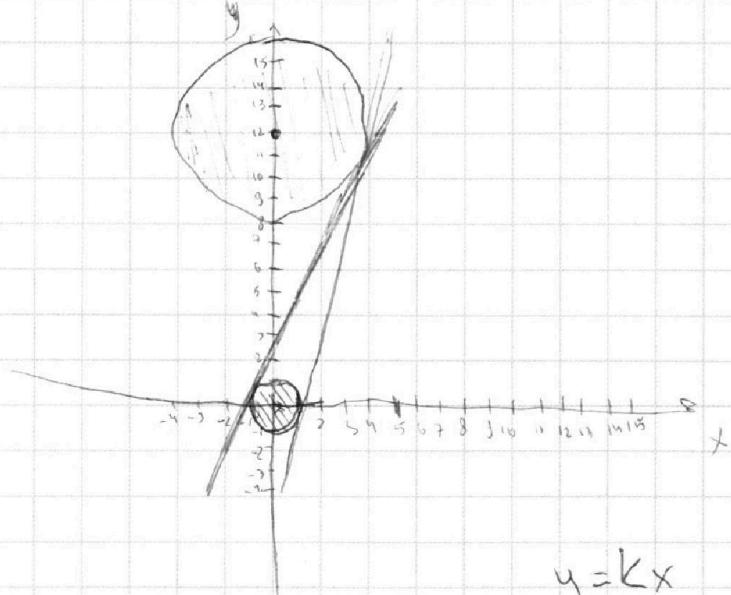
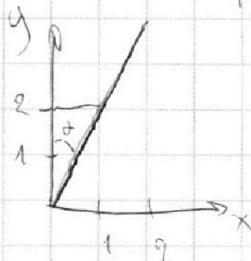
Черновик

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$k = 2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$



$$y = kx$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{k}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

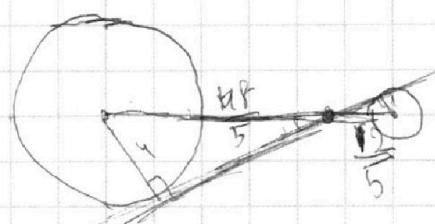
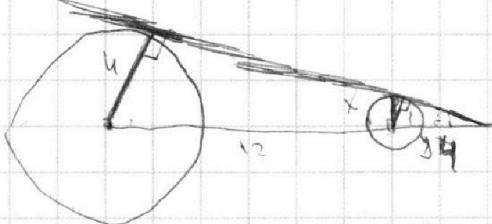
$$(k = \sqrt{15})$$

$$x = \frac{y+12}{4}$$

$$4x = y + 12$$

$$x = y$$

$$a = \pm \sqrt{15}$$



$$r = 4\sqrt{5}$$

$$12 = 5s \Rightarrow s = 2.4 = \frac{12}{5}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{5}{12}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12}$$

$$\frac{12}{\sqrt{119}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{\sqrt{119}}$$

$$v = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$