



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Пусть $ac = x \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$, $x \in \mathbb{N}$
Периодом или первые два выражения:

$$ab^2c : 2^{32} \cdot 7^{29}$$

$$x \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot b^2 : 2^{32} \cdot 7^{29}$$

$$x \cdot b^2 : 2^9$$

Нам нужно минимальное значение $x \cdot b$. При $x \cdot b^2 : 2^9$
минимальное значение $x \cdot b = 2^5 (2 \cdot (2^4)^2 : 2^9 \text{ или } 1 \cdot (2^5)^2 : 2^9)$.

Тогда наименьшее произведение $abc = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot xb =$
 $= 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot 2^5 = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Пример: $a = 2^{10} \cdot 7^{21}$; $b = 2^5$; $c = 2^{13} \cdot 7^{18}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b\sqrt{2}}{(a+b)^2-9ab}$$

$\frac{a}{b}$ несократимо \Rightarrow а взаимно
просто с b

Предположим, что эту дробь можно сократить на m. Тогда
 $(a+b):m \Rightarrow (a+b)^2:m$, а т.к. $((a+b)^2-9ab):m \Rightarrow$
 $\Rightarrow 9ab:m$

Заметим, что если у нас например у a ~~и b~~
есть общий делитель (отличный от 1), тогда, т.к. $a:q$;
 $m:q$; $(a+b):m \Rightarrow (a+b):q \Rightarrow b:q$. Тогда у a и b
есть общий делитель q, что противоречит условию
задачи. Тогда a взаимно просто с m, а ана-
логично, b взаимно просто с m. Тогда $9ab:m$
трансформируется в $9:m$. Проверим, максимальное
 $m=9$.

Пример: $a=4$; $b=5$.

$$\frac{4+5}{4^2-7 \cdot 4 \cdot 5+5^2} = \frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \quad | \uparrow 2 \quad \text{OD 3:}$$

$$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1-2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1} = 1-18x+81x^2$$

$$-2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1} = 75x^2-15x-2 \quad | \uparrow 2$$

$$4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1) = (75x^2-15x-2)^2$$

$$36x^4 - 36x^3 + 36x^2 - 72x^2 + 8 = 5625x^4 - 2250x^3 + 225x^2 - 300x^2 + 60x + 4$$

$$5589x^4 - 2214x^3 - 111x^2 + 60x - 4 = 0$$

Большинство коэф-тов : 3, отсюда и будем искать.

$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ не подходят. Будем пробовать $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$ - не подходит.

$$5589 = 23 \cdot 3^5$$

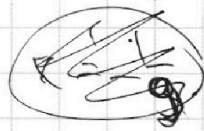
$$2214 = 3^3 \cdot 2 \cdot 41$$

$$111 = 37 \cdot 3$$

$$60 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\frac{23}{3^3} - \frac{2 \cdot 41}{3^6} - \frac{37}{3^5} + \frac{20}{3^2} - \frac{4 \cdot 37}{3^7}$$

будем спраш отрицательные значения.



~~невозможно~~

Нет решений: $\frac{23}{117} = \frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Нарисовав данный параллелограмм, мы увидим, что он ограничен прямыми $y+2x=0$; $y+2x=16$; $y=26$; $y=0$. Наш параллелограмм можно условно разбить на 17 отрезков:

$y+2x=0$; $y+2x=1$; $y+2x=2$; ...; $y+2x=15$; $y+2x=16$. На каждом таком отрезке 14 целочисленных точек. Рассмотрим условие:

$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$. Данное условие преводит прямую $y+2x=0$ в прямую $y+2x=14$ и так далее (сумма $y+2x$ увеличивается на 14). Чтобы обе точки лежали внутри параллелограмма, нужно, чтобы $0 \leq y+2x \leq 16$.

Тогда нам подходят только такие пары прямых:

$$y+2x=0 \longrightarrow y+2x=14$$

$$y+2x=1 \longrightarrow y+2x=15$$

$$y+2x=2 \longrightarrow y+2x=16.$$

Любой точке на ~~любой~~ выбранной нами прямой соответствует любая точка на прямой с номером на 14 больше. Число способов выбрать такие пары:

$$3 \cdot 14^2 = 588$$

три варианта
пары

Ответ: 588.

$$\begin{array}{r} 42 \\ 44 \\ \hline 168 \\ 42 \\ \hline 588 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

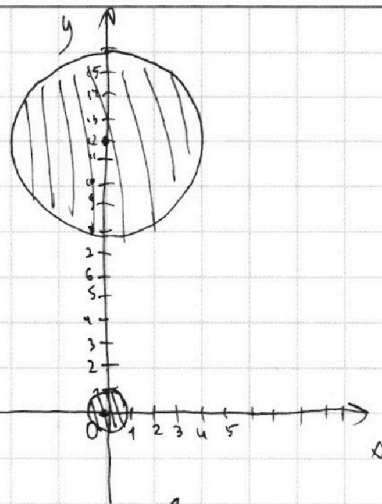
№6.

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

Будем решать графически. Для начала решим левые неравенства.

$x^2+y^2-1=0$ — окружность центром в $(0,0)$ и радиусом 1.

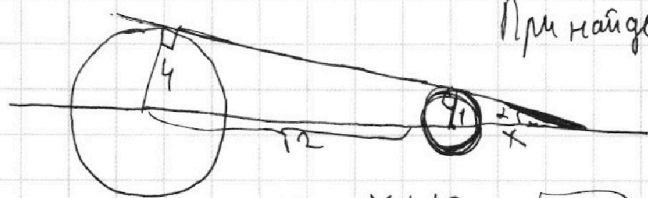
$x^2+(y-12)^2-16=0$ — окружность центром в $(0,12)$ и радиусом 4.



Внутри окружностей значения $x^2+y^2-1 < 0$, а снаружи > 0 .

Тогда решим наше неравенство, т.к. окружности не пересекаются, будут области внутри окружностей и на границах. Теперь нам нужно на этом графике как-то провести прямую, чтобы у нас было два корня. Если прямая пересечет какую-нибудь окружность, то решений будет 0. Единственное, что нам подойдет это общая касательная ^{внеш} двух окружностей. Найдем ее коэф. наклона.

①



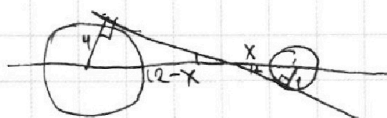
При найденных нами a, b подобрать возможно. Прямая может быть и $a < 0$.

Из подобия: $\frac{x}{1} = \frac{x+12}{4} \Rightarrow x=4$

$a = \pm \operatorname{ctg} \alpha = \pm \sqrt{15}$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \sqrt{15} \end{aligned}$$

②



Из подобия: $x = \frac{12-x}{4} \Rightarrow x = \frac{12}{5}$

$\Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$

Ответ: $\pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{5}{12} \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\sqrt{119}}{5} \end{aligned}$$



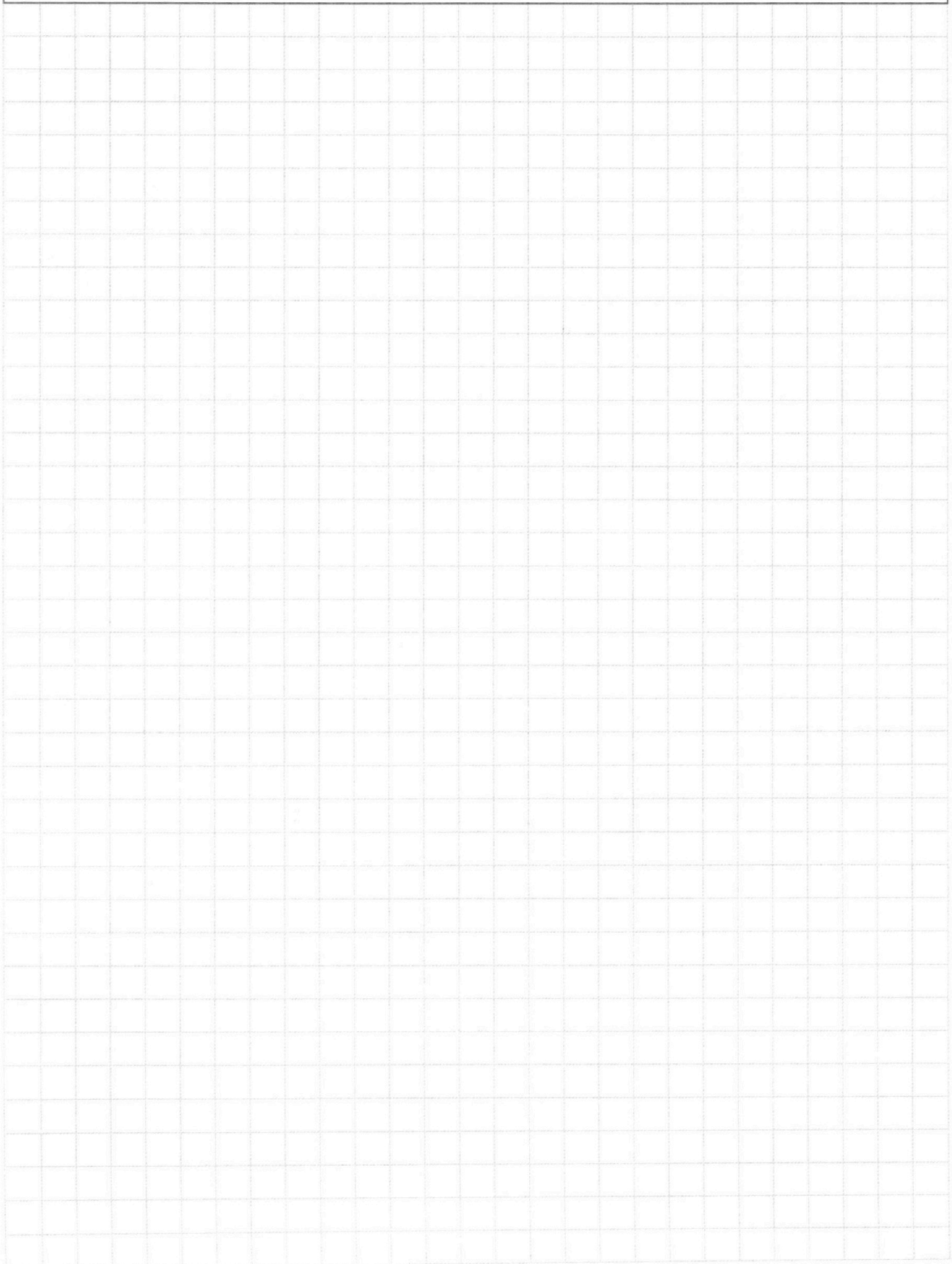
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$x \in \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cap \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

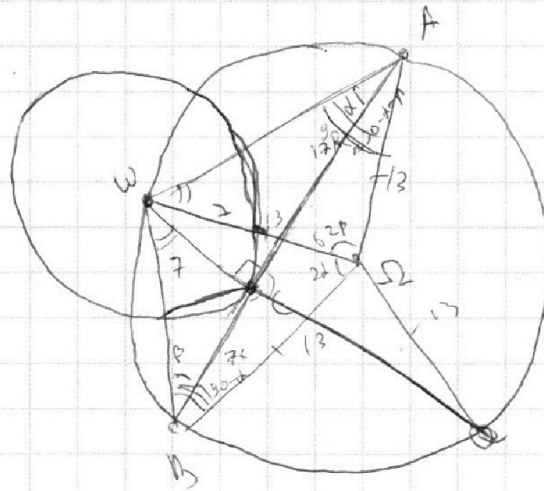
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновики.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{7}{17x} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{1}{x} \\ \operatorname{tg} \mu &= x \end{aligned}$$



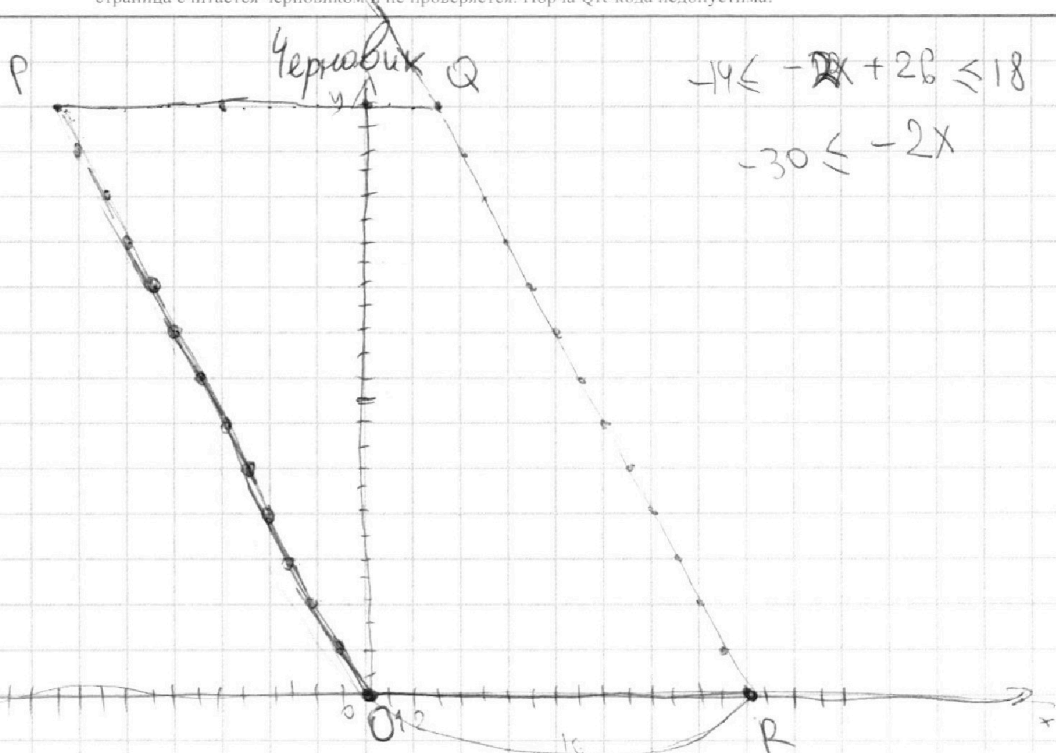
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-14 \leq -2x + 26 \leq 18$$

$$-30 \leq -2x$$

A-Q $x=3, y=26$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2x_2 - 6 + y_2 - 26 = 14 \implies \dots = 16$$

$$y_2 = \underbrace{2x_1 + y_1 + 14}_{14} - 2x_2$$

$$2x_2 + y_2 = 16$$

$$\frac{x}{3} = \frac{x+26}{18}$$



$$y_2 = 16 - 2x_2 \quad 0 \leq 2x_1 + y_1 + 14 \leq 32$$

$$16x = 3x + 26 \cdot 3$$

$$\implies x = 26 \cdot 3$$

$$\boxed{x=6}$$



$$-14 \leq 2x_1 + y_1 \leq 18$$

O, 1, 2.

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$$

$$14 \cdot 3 = \boxed{42}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

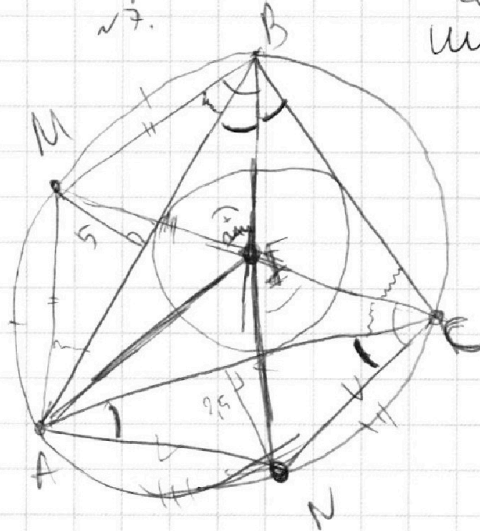
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

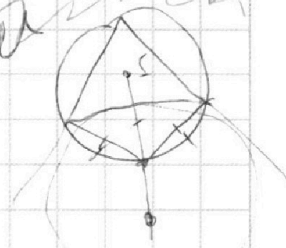


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.



[Handwritten scribbles]



$$1,31 : 3,95 = \frac{131}{395}$$

$$\frac{131}{395} = \frac{1}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab : 2^{15} 7^{11}$
 $bc : 2^{17} 7^{18}$
 $ac := 2^{23} 7^{39}$

Черновик.

$\frac{672}{168}$
 $\frac{790}{48}$
 $\frac{928}{928}$

$abc = 2^{28} 7^{39}$
 720

$55 \ 89 \ 9$
 $621 \ 9$
 $3 \ 3$
 $23 \ 23$

$\frac{75}{111}$
 $\frac{+36}{111}$

$ac \cdot b^2 : 2^{32} 7^{29}$

$2^{23} \cdot 7^{39} \cdot b^2 : 2^{32} 7^{29}$
 $b^2 : 2^9 7^9$
 $b : 2^5 7^4$

$\frac{a}{b} - \text{несокр.}$
 $\frac{256}{5888}$

$3x^2 + 3x + 1 = 0$
 $a^2 - 7ab + b^2$

$3x^2 - 6x + 2 = 0$
 $D = 36 - 24 = 12$
 $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$
 $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$

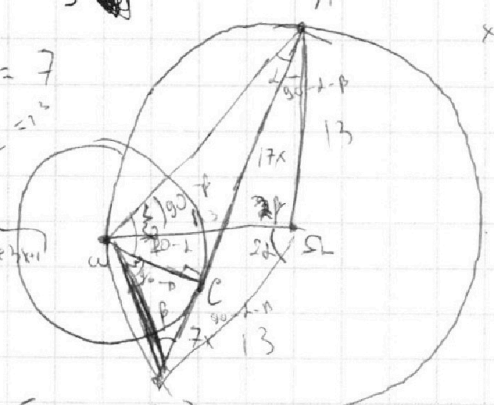
$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$
 $= 1 - 18x + 81x^2$

$-2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 75x^2 - 15x - 2$

$4(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1) = (75x^2 - 15x - 2)^2$

$36x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 8 = 5625x^4 - 2250x^3 - 300x^2 + 26x + 4$

$5589x^4 - 2214x^3 - 39x^2 + 60x - 4 = 0$



$\frac{84}{64}$
 $\frac{336}{504}$
 $\frac{5484}{3826}$

$180 - 2p = 90 - p + x$
 $x = 90 - p$

$75x^2 - 15x - 2 \leq 0$

$\frac{75}{375}$
 $\frac{525}{5589}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



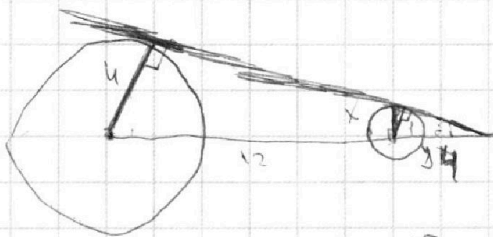
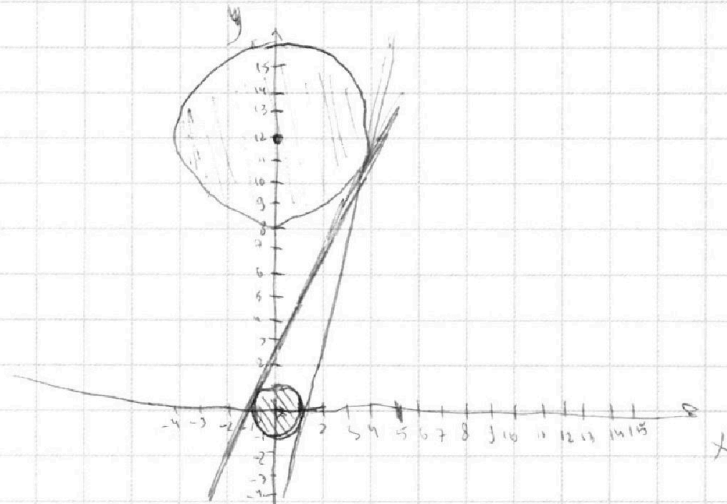
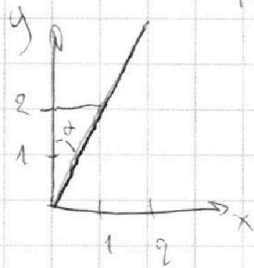
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$k=2 \\ \text{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$



$$\sin \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

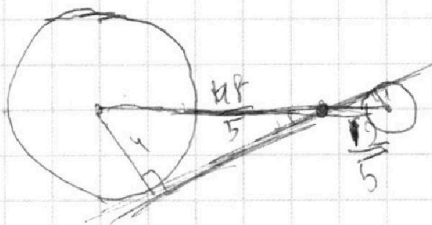
$$a = \pm \sqrt{15}$$

$$y = kx$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{k}$$

$$k = \sqrt{15}$$

$$x = \frac{x+12}{4} \\ 4x = x+12 \\ x = 4$$



$$r = 4s$$

$$12 = 5s \Rightarrow s = 2.4 = \frac{12}{5}$$

$$\cos = \sqrt{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12}$$

$$\text{tg} = \frac{5}{\sqrt{119}}$$

$$k = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\frac{4.5}{4.8} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{144}{25} = \frac{119}{9}$$