



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- ✓ 3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{33}$$

$abc : ac \Rightarrow abc : 2^{39} \Rightarrow$  минимальная степень ~~7~~ 7, которая содержится в  $abc$  39

$$abc^2 : (ab \cdot bc \cdot ca) \Rightarrow (abc)^2 : 2^{15+17+23} = 7^{55} \Rightarrow$$

$$abc : 2^{28}$$

$$abc : 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

При

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$$

$$abc = 2^{10+5+13} \cdot 7^{11+18} = 2^{28} \cdot 7^{39} \quad abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow$$

минимальное значение  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: минимальное значение  $abc$   
 $2^{28} \cdot 7^{39}$ .



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача №2

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

Пусть исходную дробь можно сократить на  $m$ , тогда:

$$a+b : m \quad (1)$$

$$a^2 - 7ab + b^2 : m$$

$$(a^2 + 2ab + b^2) - 9ab : m$$

$$(a+b)^2 - 9ab : m$$

Из условия (1)  $(a+b)^2 : m \Rightarrow 9ab : m$

$$a+b : m \Rightarrow 9a^2 + 9ab : m$$

$$9a^2 + 9ab : m \text{ и } 9ab : m \Rightarrow 9a^2 : m$$

Аналогично:

$$9b^2 + 9ab : m \quad 9b^2 : m$$

$$9a^2 : m$$

$$9b^2 : m$$

$a, b \in \mathbb{N}$  и  $p$ -простое или 1

Пусть  $m = p \cdot q$ , где  $p$  такое что  $a : p$ , а  $b \nmid p$

$$9b^2 : m \Rightarrow 9b^2 : p \text{ по усл. выбора } p \nmid p$$

$$\Rightarrow b^2 : p \Rightarrow b : p \text{ (т.к. } p\text{-простое или } p=1)$$

~~также~~  $a : p$  и  $b : p$  то дробь  $\frac{a}{b}$  можно сократить  $\Rightarrow$

$p=1$  это верно для любого простого входящего в разложение  $m \Rightarrow \text{НОД}(a, m) = \text{НОД}(b, m) = 1$ , а значит  $9 : m \Rightarrow m \leq 9$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для  $a=4$   $b=5$

$$\frac{4+5}{4^2 - 7 \cdot 4 \cdot 5 + 5^2} = \frac{9}{25 + 16 - 140} = \frac{9}{-99} - \text{дробь сокращает-} \\ \text{ся на } 9$$

Т.к  $m \leq 9$   $m=9$  - максимальное

Ответ: наибольшее значение  $m=9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача №4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$t = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \quad d = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Проверка:

$$1 - 9x = t^2 - d^2 = 3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = 1 - 9x$$

$$t - d = t^2 - d^2$$

$$(t - d)(t + d) - (t - d) = 0$$

$$(t - d)(t + d - 1) = 0$$

$$t - d = 0$$

$$t + d - 1 = 0$$

$$t - d = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$(3x^2 - 6x + 2) = (3x^2 + 3x + 1)$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$t + d - 1 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$69x^2 = 12x - 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\Delta = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 144 + 1104 = 1248$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \\ x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \\ x = \frac{1}{9} \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{1}{9}, \quad x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}, \quad x_3 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

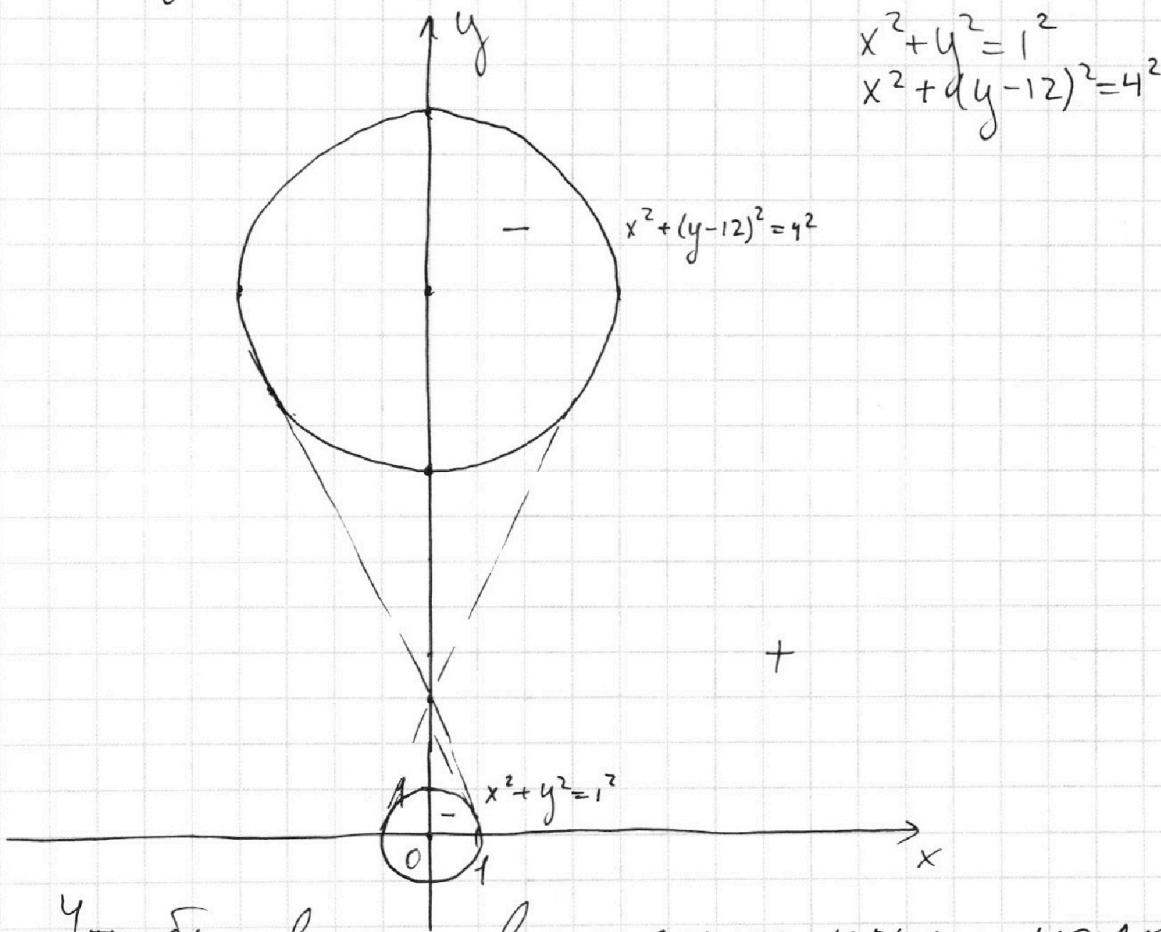
- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача №6

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$



Чтобы второе выражение принимало значение ~~меньшее~~  $\leq 0$  точка с координатами  $(x; y)$  должна находиться внутри ~~или~~  $\Rightarrow$  одного из окружностей или на них (т.к. все окружности ~~пересекаются~~ которое задаёт её большие 0.)

$ax + y - 8b = 0$  – задаёт прямую  
Если прямая ~~пересекает~~  $\Rightarrow$  окружность  $b$  двух точках, то ~~вногти~~ будет отрезок как две точки которого будет являться решением  
 $\Rightarrow$  решений будет бесконечно много

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



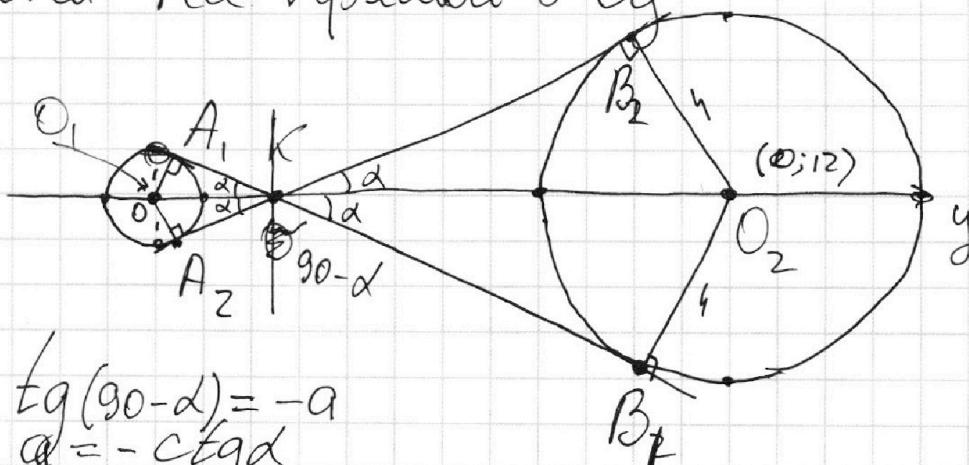
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Знамит прямая может иметь с окружностью  
только одну общую точку (или 0). А так-  
как необходимо чтобы система имела два  
решения прямая должна иметь на  
одной общей точке с ~~окр~~ каждой из  
окружностей. Если прямая с окружно-  
стью имеют общую точку, то пря-  
мая касается окружности.

Знамит прямые ~~имеют~~ касающиеся  
условию это ~~касательные~~ две ~~ок~~ общие  
касающиеся к окружностям.

$$y = 8b - ax$$

III. к окружности симметричны относи-  
тельно прямой  $Oy$ , касательные пересека-  
ющиеся на прямой  $Oy$



$$\operatorname{tg}(90-\alpha) = -a$$

$$a = -\operatorname{ctg}\alpha$$

(для прямой  $A_1B_1$ )

(для прямой  $A_2B_2$ )

$$a = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\frac{O_1K}{O_2K} = \frac{O_1A_1}{O_2B_2} \quad (\text{получено из подобия } \triangle O_1A_1K \text{ и } \triangle O_2B_2K)$$

$$\frac{O_1K}{O_2K} = \frac{1}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{O_1K}{O_2K} = \frac{1}{4} \\ O_1K + O_2K = O_1O_2 = 12 \end{array} \right.$$

$$\frac{O_1K}{O_2K} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{O_1O_2}{O_2K} = \frac{5}{4}$$

$$O_2K = 9,6$$

$$O_1K = 12 - 9,6 = 4,4$$

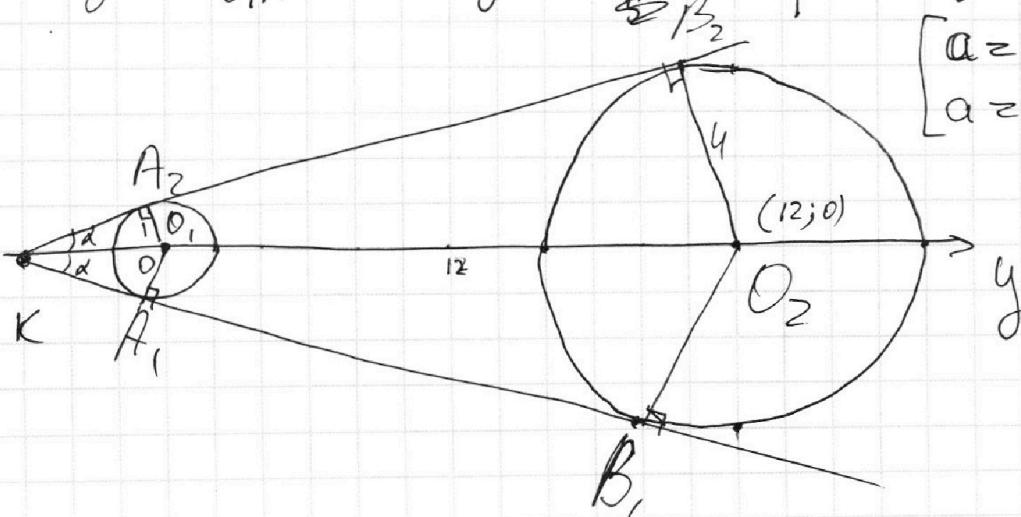
$$A_1K = \sqrt{O_1K^2 - O_1A_1^2}$$

$$A_1K = \sqrt{4,4^2 - 4^2} = \sqrt{0,4 \cdot 8,4} = \sqrt{3,36} = \sqrt{4 \cdot 0,01 \cdot 4 \cdot 21} =$$
$$= \frac{4}{10} \sqrt{21} = \frac{2}{5} \sqrt{21}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{A_1K}{O_1A_1}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\frac{2}{5} \sqrt{21}}{1} = \frac{2}{5} \sqrt{21}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{5} \sqrt{21} \\ a = -\frac{2}{5} \sqrt{21} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{KO_1}{KO_2} = \frac{O_1 A_1}{O_2 B_1} = \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{KO_1}{KO_2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{KO_2 - KO_1}{KO_2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{O_1 O_2}{KO_2} = \frac{3}{4}$$

$$KO_2 = \frac{12 \cdot 4}{3} = 16$$

$$KO_2 = 16$$

$$KO_1 = 4$$

$$A_1 K = \sqrt{KO_1^2 - O_1 A_1^2} \quad A_1 K = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{A_1 K}{O_1 A_1}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{1} = \sqrt{15}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{15} \\ a = -\sqrt{15} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{2}{5}\sqrt{21} \quad a = \sqrt{15}$$

$$a = \frac{2}{5}\sqrt{21} \quad a = -\sqrt{15}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

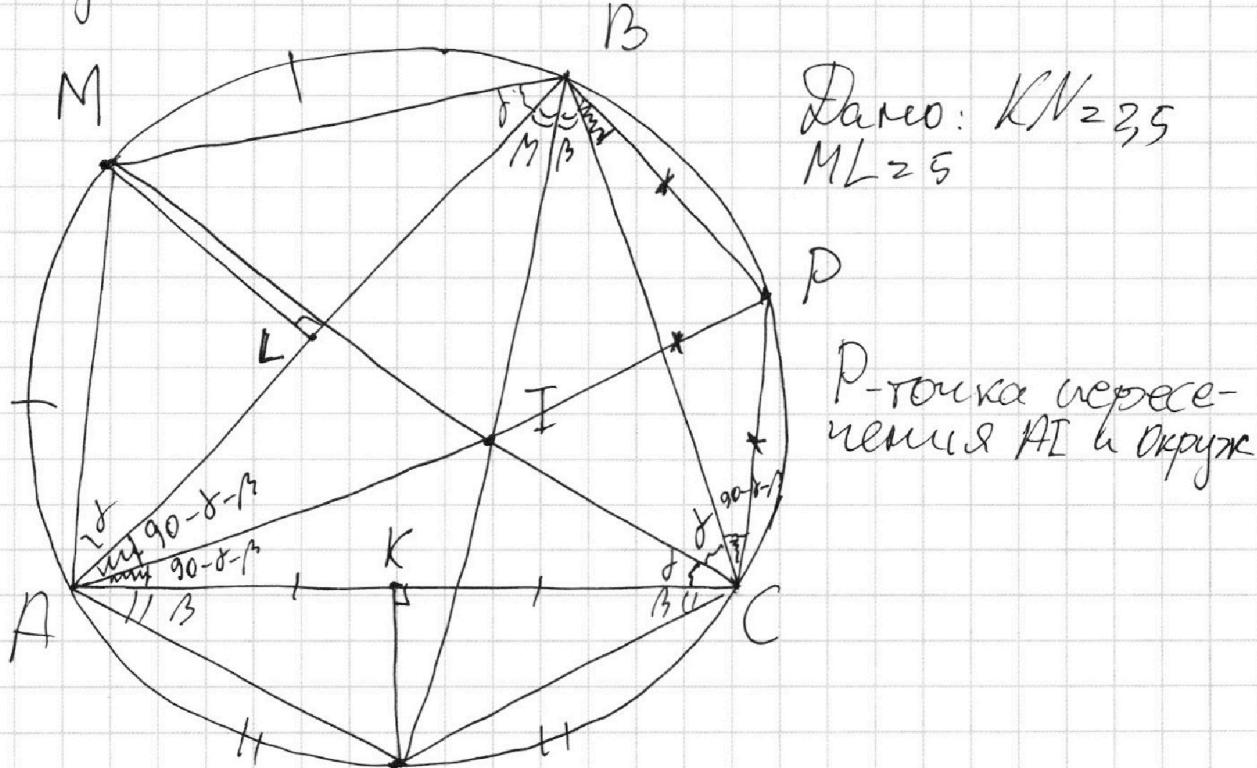
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7



Дано:  $KN = 3,5$   
 $ML = 5$

P - точка пересечения BI и окружности

T - точка пересечения биссектрис (центр вписанной)  
M, K, M - является серединой дуги AB - она лежит  
на прямой содержащей биссектрису из C  
Аналогично  $N \in BT$

$$\angle ABT = \angle IBC = \beta$$

$$\angle ACI = \angle ICB = \gamma$$

$ANCB$  - вписан. четырехугл  $\Rightarrow \angle ACN = \angle CAN = \beta$

$AMBC$  - вписан. четырехугл  $\Rightarrow \angle MBA = \angle MAB = \beta$

$$AB = 2 \cdot 5 \cdot \operatorname{ctg} \beta = 10 \operatorname{ctg} \beta$$

$$AC = 2 \cdot 2,5 \cdot \operatorname{ctg} \beta = 5 \operatorname{ctg} \beta$$

$$BC = 10 \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos 2\beta + 5 \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos 2\beta$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По лемме о перегибке  
 $PB = PC$

$$\angle PBC = \angle PCB = 90^\circ - \beta - \gamma$$

$$PC = PB = \frac{BC}{\sin(90^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{BC}{\sin(\beta + \gamma)} = PT$$

По теореме синусов

$$\frac{PC}{\sin(\angle A(90^\circ - \gamma - \beta))} = \frac{AP}{\sin(\angle ACP)}$$

$$AP = \frac{PC \cdot \sin(90^\circ - \gamma - \beta)}{\sin(90^\circ - \gamma - \beta)} =$$

$$AT = AP - PT$$

$$PT = \frac{10 \operatorname{ctg} \gamma \cos 2\beta + 5 \operatorname{ctg} \beta \cos 2\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)} = PC$$

$$PT = \frac{10 \operatorname{ctg} \gamma \cos 2\beta + 5 \operatorname{ctg} \beta \cos 2\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)} \cdot \left( \frac{\sin(90^\circ - \beta) - 1}{\sin(90^\circ - \gamma - \beta)} \right) =$$

$$= \frac{(10 \operatorname{ctg} \gamma \cos 2\beta + 5 \operatorname{ctg} \beta \cos 2\gamma)(\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma))}{2 \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma)}$$

$$= \frac{(10 \operatorname{ctg} \gamma (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) + 5 \operatorname{ctg} \beta (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)) \cdot (\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma))}{2 \sin(2\beta - 2\gamma)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

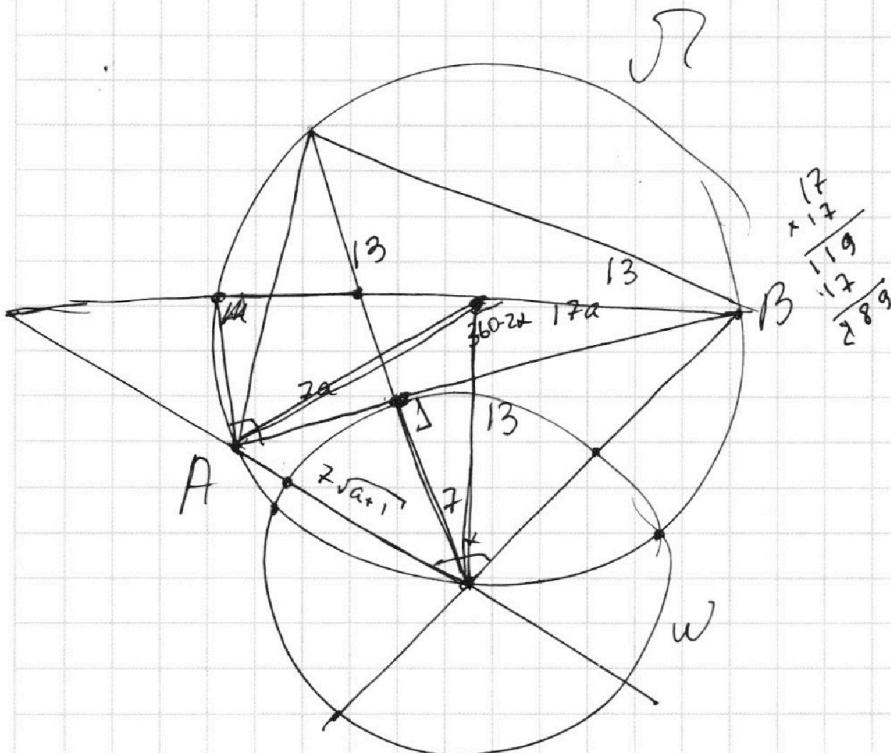
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |

МФТИ

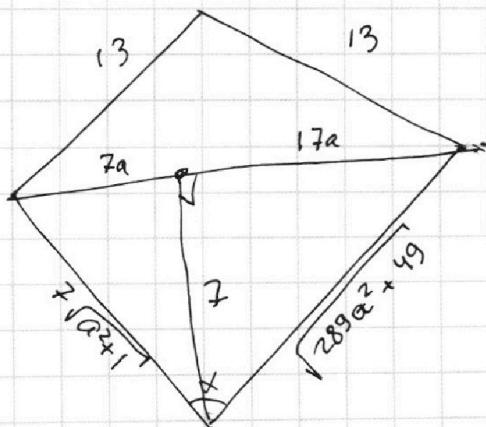
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



B

$$13^2 + 13^2 - 2 \cos \alpha \cdot 13^2 =$$

=



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

~~Задача~~

~~3^2 \cdot 4 \cdot 4~~

$$t = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$d = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

~~Задача~~

$$t - d = t^2 - d^2$$

$$(t-d)(t+d) = (t-d)$$

~~$\sqrt{86} + \sqrt{312}$~~

$$-\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$(t-d)(t+d-1) = 0$$

~~69~~

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1$$

$$276 \cdot 4$$

~~6+18~~

$$\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{1}{27} + \frac{4}{3} = \frac{37}{27}$$

$$\frac{2}{23} \pm \frac{39 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 13 + 6}$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$6^2 = 36$$

$$\cancel{6^2} \quad \cancel{36}$$

$$\frac{6}{69^2} \cdot 3 -$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

$$\times \frac{6}{2\sqrt{3}} \quad 1 \quad 6$$

$$144 + 4 \cdot 4 \cdot 69$$

$$2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$\frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{1}{13} \begin{array}{r} 4 \\ 6 \\ \hline 9 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ \hline 0 \\ 4 \end{array}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 1 + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$36 - 8 \cdot 3$$

$$9x - 2 = -2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$1 \ 2 \ 4 \ 8 \quad \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{81}{4}x^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$\frac{312}{4} \quad 78 = 3 \cdot 26$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$\times \frac{6}{1} \quad 4$$

$$\frac{6+9}{69} = \frac{5}{23}$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\times \frac{1}{6} \quad 4$$

3

$$\begin{array}{r} 4 \\ 1 \\ \hline 4 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ \hline 0 \\ 4 \end{array}$$

$$3 + \frac{1}{3} - \frac{3}{13} - 6 + \frac{6}{13}$$

$$\frac{6}{1} \begin{array}{r} 9 \\ 6 \\ \hline 0 \\ 4 \end{array}$$

$$\cancel{4} \sqrt{38}$$

4

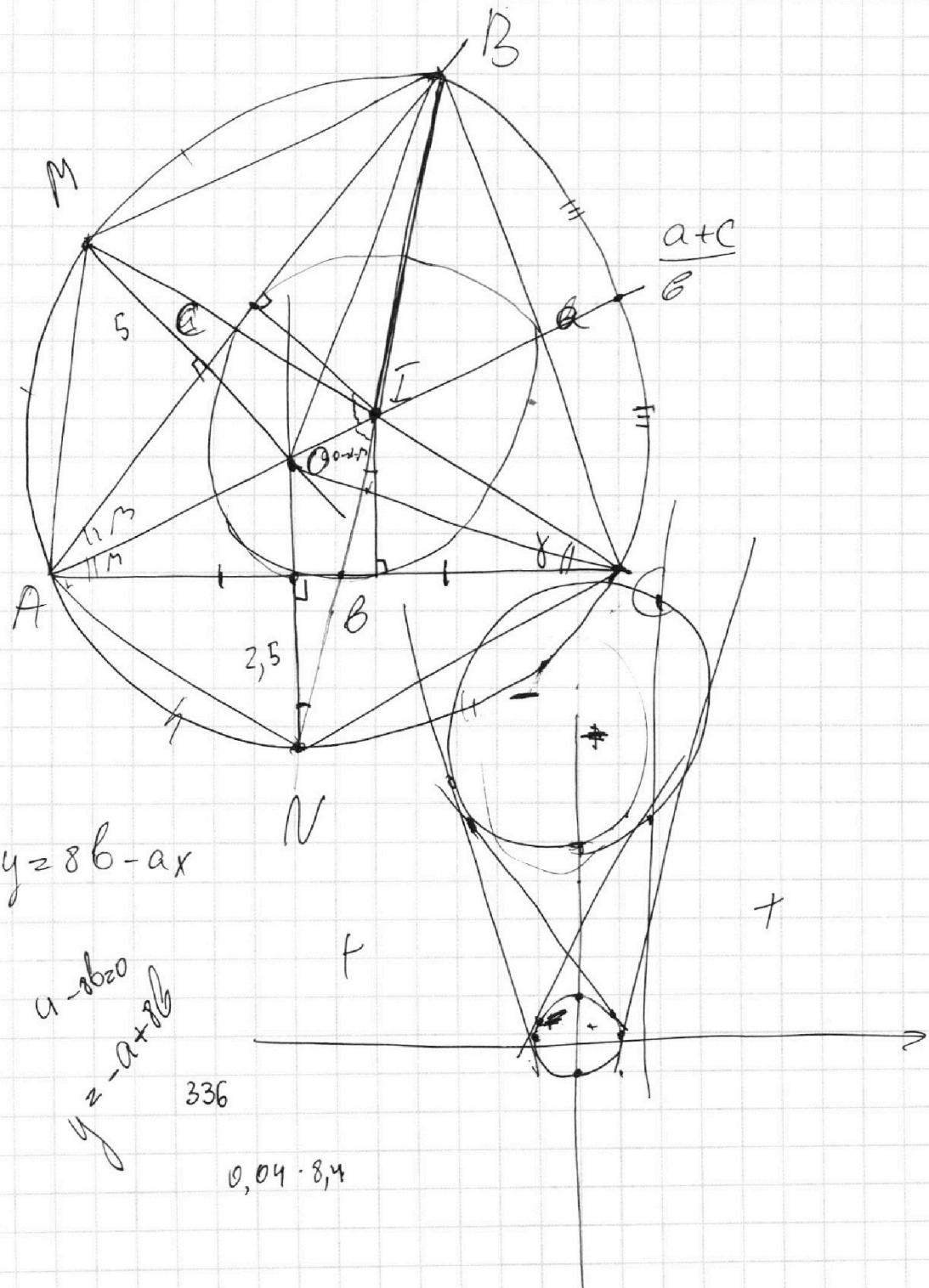
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

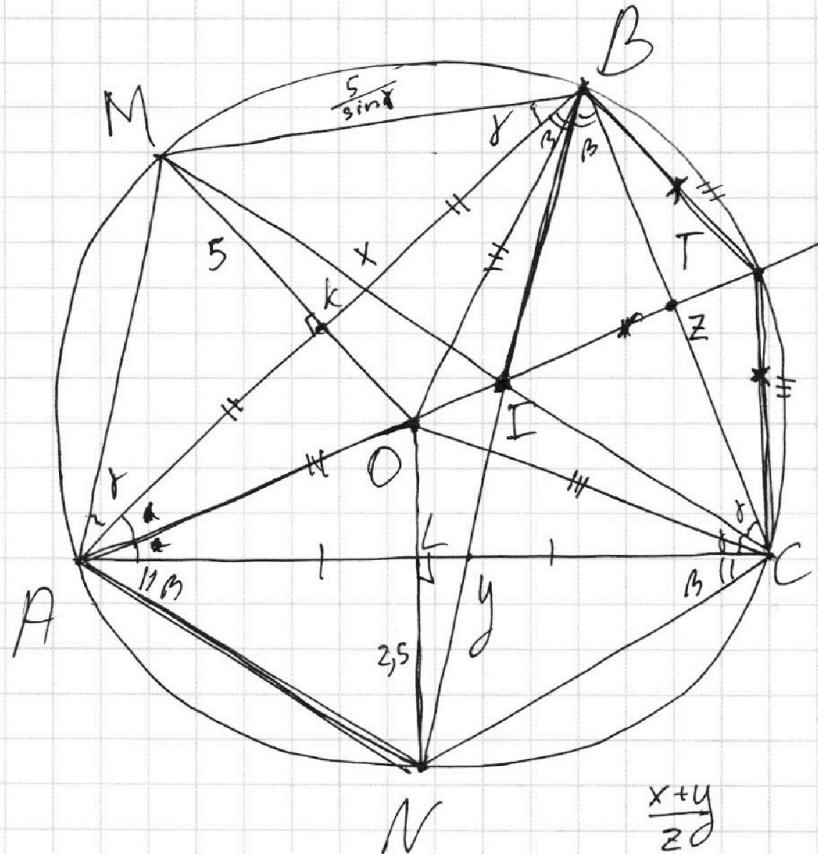
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5 \operatorname{ctg} \beta + 10 \operatorname{ctg} \delta}{5 \operatorname{ctg} \beta}$$

$$AC = 5 \operatorname{ctg} \beta \quad AB = 10 \operatorname{ctg} \delta$$

$$BC = \cancel{5 \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos 2\delta + 10 \operatorname{ctg} \delta \cdot \cos 2\beta} =$$

$$= 5 \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos 2\delta + 10 \operatorname{ctg} \delta \cdot \cos 2\beta$$

$$= \frac{5 \operatorname{ctg} \beta \cdot \sin \delta}{10 \operatorname{ctg} \delta} \left( \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos 2\delta + \operatorname{ctg} \delta \cdot \cos 2\beta \right)$$

$$\frac{BT}{TC} = \frac{x}{y}$$

$$\left(\frac{x}{y} + 1\right) \cdot z$$

$$5 \operatorname{ctg} \beta$$

$$xy - \left(\frac{x}{y} + 1\right) \cdot z \cdot \left(\frac{y}{x} + 1\right) \cdot z$$

$$(xy - \left(z + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)) \cdot z^2 \cdot \frac{x+y}{z}$$

$$xy(x+y) - 2x - 2y + \cancel{(x)}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \cdot (x+y) = \\ & = \frac{x^2}{y} + y + x + \frac{y^2}{x} \end{aligned}$$

x

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

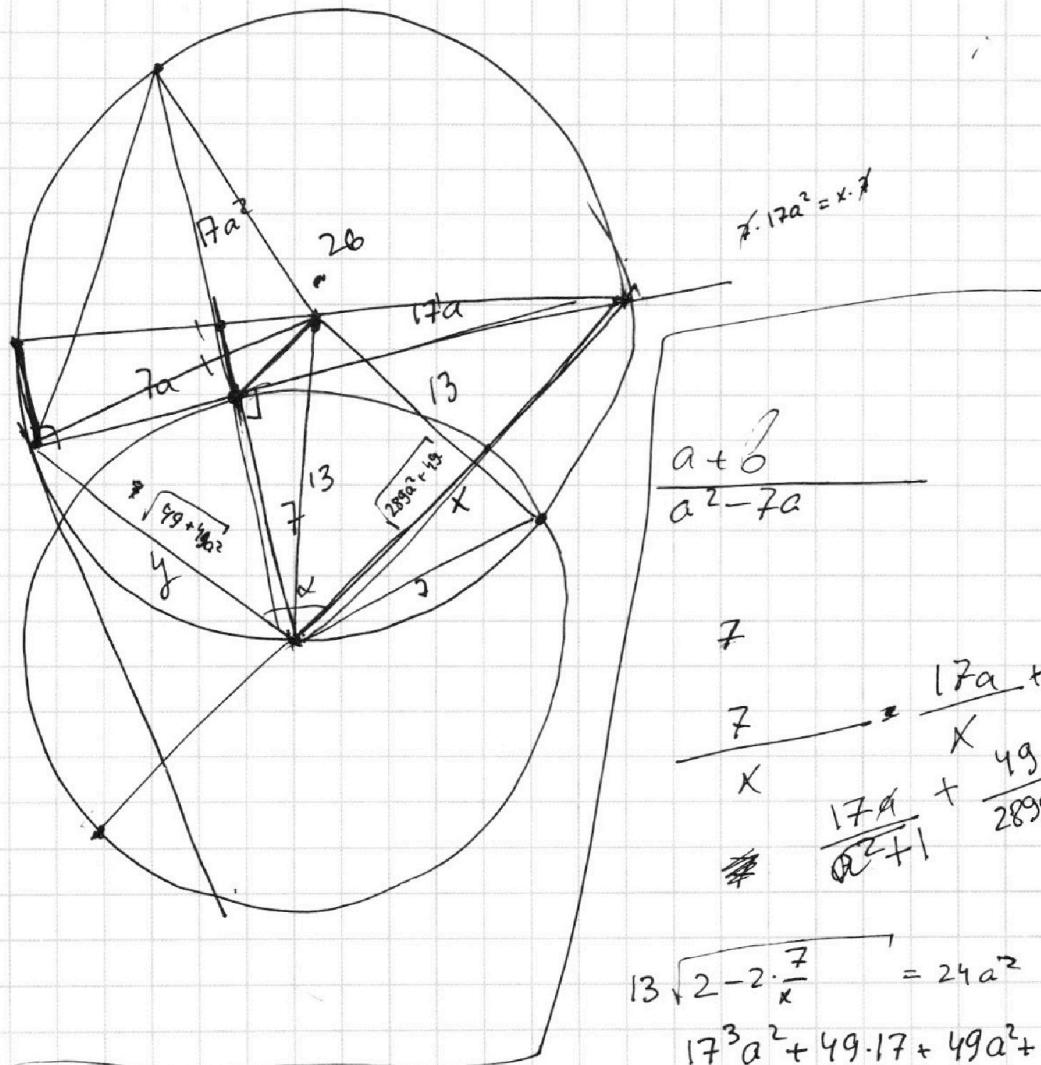
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x \cdot 17a^2 = x^2$$

$$\frac{a+7}{a^2-7a}$$

$$\begin{aligned} & 7 \\ & 7 \\ & x \\ & \cancel{\frac{17a}{a^2+1}} + \frac{17a + \frac{7}{y} \cdot \frac{7a}{y}}{\frac{49a^2+49}{289a^2+49}} = \frac{(24)^2}{289} \end{aligned}$$

$$13 \sqrt{2 - 2 \cdot \frac{7}{x}} = 24a^2$$

$$\frac{17^3 a^2 + 49 \cdot 17 + 49 a^2 + 49}{(a^2 + 1)(289a^2 + 49)} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 a$$

$$4962a^2 + 4918$$

$$\frac{10822}{289}$$

$$\begin{array}{r} 66 \\ \times 289 \\ \hline 2023 \\ 289 \\ \hline 4913 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{2}{5}$$
  
$$5$$

$$\frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} - 7}^{-42}$$

$$9 \\ 16 + 25 - 7 \cdot 20$$

$$ab : m$$

$$a^2 - 7ab + b^2 : m$$

$$9ab : m$$

$$\begin{cases} 9ab : m \\ a+b : m \end{cases}$$

$$9 \cdot 4 \cdot 6 \\ 9 \cdot 6 \cdot 7 = 49$$

$$9ab + 9b^2 : m \Rightarrow \cancel{b^2} : m$$

$$9ab : m$$

$$9b^2 : m \cancel{=}$$

$$9a^2 : m$$

$$9 : m$$

$$b^2 : m$$

$$m = pq \quad p \text{ и } q \text{ такие, что}$$
  
~~b<sup>2</sup>~~  
~~p~~  
~~q~~

$$9a^2 - 9b^2$$

$$9(a^2 - b^2) = 9(a-b)(a+b) : p$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{38}$$

$$abc : ac \Rightarrow abc : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc : 2^{28}$$

$$a \cdot 2^{29}$$

$$55$$

$$a = 7^{11}$$

$$c = 7^{18} \cdot b = 1$$

$$abc^2 : ab \cdot bc \cdot ac$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{28}$$

$$x+y+z = 28$$

$$x+y = 23$$

$$y+z = 17$$

$$z+x = 15$$

$$x = 10$$

$$x = 15$$

$$y = 18$$

$$y = 10$$