МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\boxed{№1}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot k_1$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot k_2$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot k_3$, показатели 2 и 7 $\in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$

$ab = 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2} k_1 \cdot k_2 = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot t_1,\ t_1 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \alpha_1+\beta_1 \geq 15$
$\alpha_2+\beta_2 \geq 11$, Аналогично с остальными

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 15 & (1) \\ \alpha_2+\beta_2 \geq 11 & (2) \\ \alpha_1+\gamma_1 \geq 23 & (3) \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 39 & (4) \\ \beta_1+\gamma_1 \geq 17 & (5) \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 18 & (6) \end{cases}$$

~~(1) + (3)~~
~~$2\alpha_1 + (\beta_1+\gamma_1) \geq 38$~~

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \geq 55 \\ 2(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) \geq 68 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq \frac{55}{2} > 27 \\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq 34 \end{cases}.$$

$\Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$, осталось привести пример a, b, c. Т.к. $ac \vdots 7^{39} \Rightarrow abc \vdots 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

$$\begin{cases} a = 2^{11} \cdot 7^{16} \\ b = 2^{4} \cdot 7^{0} \\ c = 2^{13} \cdot 7^{23} \end{cases}$$

пример a, b, c.

Значит ответ: $\boxed{2^{28} \cdot 7^{39}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(a, b) = 1$ $\qquad m \geqslant 1$

$НОД(a,b) = (a,b)$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

$НОД(a+b,\ a^2-7ab+b^2) = m \to max - ?$

Св-во НОД(a,b): $НОД(a,b) = НОД(a, \cancel{a+kb}\ b+ka)$, при $\forall k \in \mathbb{Z}$.

$a^2-7ab+b^2 = (a-b)^2-5ab = (a+b)^2-9ab$

$(a+b,\ (a+b)^2-9ab) = (a+b,\ (a+b)^2-9ab-(a+b)^2) =$

т.к. $-(a+b) \in \mathbb{Z}$

$= (a+b,\ -9ab) = (a+b,\ 9ab)$. $\quad m \geqslant 3$ (при $a=1$, $b=2$, $m=3$)

Пусть $a \underset{7}{\equiv} a_1$, $b \underset{7}{\equiv} b_1$

$a_1 \not\equiv b_1$

~~$a+b = m$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$ $R = 13$ $r = 7$

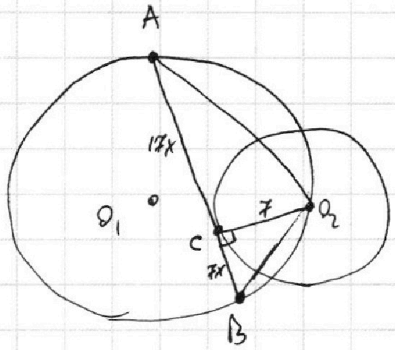
~~$S_{\Delta AO_2B} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x$~~

$\Omega(O_1, R)$

$\omega(O_2, r)$

$AC = 17x$

$AB = 7x$



$S_{\Delta AO_2B} = \frac{1}{2} 7 \cdot 24x = \frac{1}{2} AO_2 \cdot O_2B \cdot \sin\angle AO_2B = p \cdot R$ (полупериметр)

$\angle O_2CA = 90$ (т.к. O_2C - радиус в точку касания)

$\Rightarrow \Delta AO_2C$ и ΔO_2CB - прямоугольные

$\Rightarrow$ По т. Пифаг: ~~$AO_2 = \sqrt{49}$~~ $AO_2^2 = (17x)^2 + 7^2$

$O_2B^2 = (7x)^2 + 7^2$

$$S_{\Delta AO_2B} = \frac{1}{2} \cdot O_2C \cdot AB = \frac{AO_2 \cdot O_2B \cdot AB}{4R}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{AO_2 \cdot O_2B}{4R}$$

$$7 \cdot 2 \cdot 13 = AO_2 \cdot O_2B \quad |^2$$

$$(14 \cdot 13)^2 = ((17x)^2 + 7^2)((7x)^2 + 7^2)$$

$$7^2 \cdot 2^2 \cdot 13^2 \cancel{182^2} = 7^4 + 49(289+49)x^2 + 289 \cdot 49x^4 \quad | : 7^2$$

$$26^2 = 7^2 + 338x^2 + 289x^4$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$x = 1$: $289 + 338 - 627 = 0$ V

$\Rightarrow x = -1$ V (т.к. чётная функция) ~~(см. след. стр.)~~

(см. другой бланк)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0 \quad (*)$ (уравнение)

Схема Горнера:

1)

	289	0	338	0	−627
$x=1$		289	289	627	627
	289	289	627	627	0

2)

	289	289	627	627
$x=-1$		−289	0	−627
	289	0	627	0

$\Rightarrow \quad (*) = (x^2-1)\underbrace{(289x^2+627)}_{>0} = 0$

$\Rightarrow$ $x=1$ единственный подходящий корень

$\Rightarrow AB = 24x = 24$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$ №4

$$\ominus \begin{array}{l} 3x^2-6x+2 = a \\ 3x^2+3x+1 = b \\ \hline 1-9x = a-b \end{array}$$

$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b$

$\sqrt{a}-\sqrt{b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(1-\sqrt{a}+\sqrt{b}) = 0$

$\Rightarrow$ (1) $\sqrt{a} = \sqrt{b}$

(2) $1 = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

(1) $\sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1} \quad |^2$

$3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1$

$1 = 9x$

$\boxed{x = \frac{1}{9}}$

Проверка: $\sqrt{3\cdot\frac{1}{81} - 6\cdot\frac{1}{9}+2} - \sqrt{3\cdot\frac{1}{81}+3\cdot\frac{1}{9}+1} = \underbrace{1-\frac{1}{9}\cdot 9}_{=0}$

$\sqrt{\frac{1}{27}\underbrace{-\frac{2}{3}+2}_{\frac{4}{3}}} - \sqrt{\frac{1}{27}+\underbrace{\frac{1}{3}+1}_{\frac{4}{3}}} = 0$ ✓

(2) $1 = \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} \quad |^2$ верно при $3x^2-6x+2 \geq 0$

$1 = 6x^2-3x+3 + 2\sqrt{(3x^2+3x+1)(3x^2-6x+2)}$

$0 = \underbrace{(6x^2-3x+2)}_{f(x)} + \underbrace{2\sqrt{(3x^2+3x+1)(3x^2-6x+2)}}_{g(x)}$

$f(x) = 6x^2-3x+2$, $D = 9-4\cdot 6\cdot 2 < 0 \Rightarrow f(x) > 0$, при $\forall x$

$g(x) > 0$, т.к. под корнем

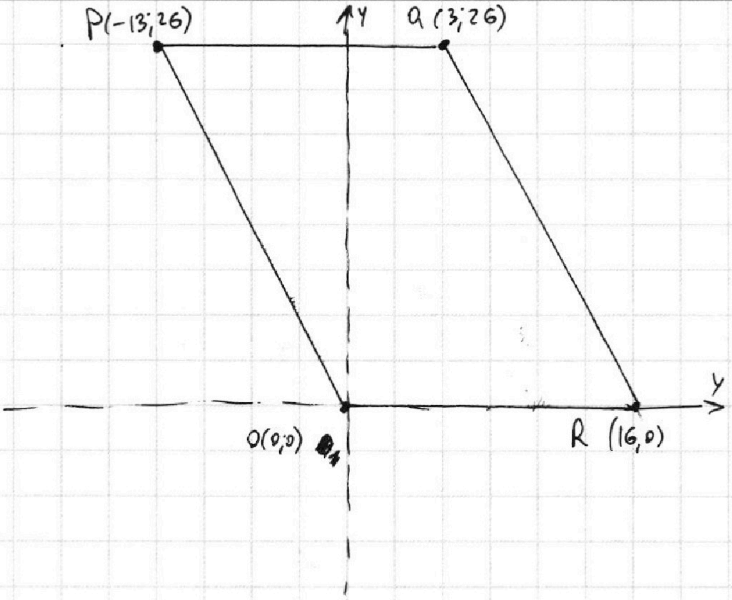
$\Rightarrow$ (2) $\varnothing$

Ответ: $\boxed{\frac{1}{9}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$A(x_1; y_1)$ $B(x_2; y_2)$

$\{x_1, y_1, x_2, y_2\} \in \mathbb{Z}$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

Пусть $B = P$

$\Rightarrow 2\cdot(-13) - 2\cdot(x_1) + 26 - y_1 = 14$

$2x_1 + y_1 = -14$

$y_1 = -2x_1 - 14 = f(x_1)$

$y = f(x_1)$ – прямая параллельная PO проходящая через т. $(0, -14)$ $\Rightarrow \notin$ парал.-му.

A – целые коорд-ты $\overset{\Leftrightarrow \text{ решения } \exists}{\Rightarrow}$ $a_1 x_1 + b_1 y_1 = c_1$, $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

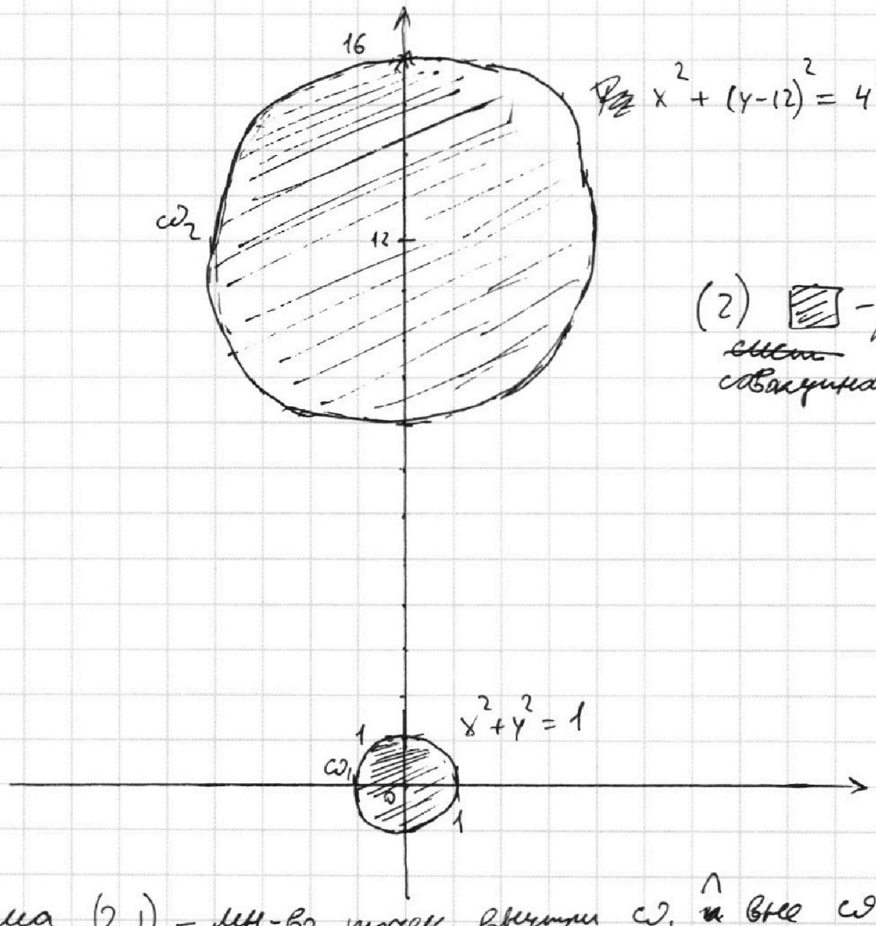
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\boxed{№6}$
$$\begin{cases} ax+y-8b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-1\le 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\ge 0 \end{cases} \leftarrow (2.1) \\ \begin{cases} x^2+y^2-1\ge 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\le 0 \end{cases} \leftarrow (2.2) \end{array}\right.$$

~~окр (0,0) r=1~~ ~~окр~~

~~Пров~~ левые части $-$ ~~ур~~ окружности ω_1 с центром $(0,0)$ и $r_1=1$
ω_2 с ц. $(0,12)$ и $r_2=4$



(2) [штриховка] – решения ~~сист~~ совокупности

система (2.1) – мн-во точек внутри ω_1 и вне ω_2
сис. (2.2) – мн-во т. внутри ω_2 и вне ω_1

~~(2.1) вся плоскость кроме внутр круга ω_2~~
~~(2.2) вся плоскость~~ (2.1) – мн-во т. внутри ω_1
(2.2) – мн-во т. внутри ω_2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\boxed{№6}$ (продолжение № 1)

~~$ax+y-8b$ прямая $=0$~~

~~$y=-ax+8b=f(x)$ – прямая с коэф. наклона $-a$~~

~~и $y\cap Oy=8b$.~~

~~1) $f(x)$ пересекает ω_1 и не пересекает ω_2~~

~~2) $f(x)$ наоборот п. 1~~

~~3) $f(x)$ касается внешне ω_1 и ω_2~~

~~4) $f(x)$ касается внутренне ω_1 и ω_2~~

$ax+y-8b=0$

$y=-ax+8b=f(x)$ – прямая коэф наклона и $-a$

и $y\cap Oy=8b$.

Если прямая пересекает 2 раза какую-то окружность $\Rightarrow$ решений >2

$\Rightarrow$ прямая должна быть касательной к двум окружностям. Т.к. окр. $\omega_1 \cap \omega_2 \Rightarrow \exists$ внешняя и внутренняя ~~касат.~~ общ. касат.

$\Rightarrow y=-ax+8b$

$x^2+y^2=1$ при y имеет 1 решение

$x^2+(-ax+8b)^2=1$ (т.к. картинка симметрична отн-но Oy $\Rightarrow$ если a_0 – решение, то $a=-a_0$ – решение)

$x^2+a^2x^2-16abx+64b^2=1$

$(1+a^2)x^2-16abx+64b^2-1=0$

$D=256a^2b^2-4(1+a^2)(64b^2-1)=0$ (т.к. 1 корень)

$256a^2b^2-(4+4a^2)(64b^2-1)=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 [X] 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\boxed{№6}$ (продолжение 2)

$$256a^2b^2 - (256b^2 + 256a^2b^2 - 4 - 4a^2) = 0$$

$$4a^2+4 = 256b^2 \quad |:4$$

$$a^2+1 = 64b^2.$$

$16 \cdot 9 = 144 \qquad 16 \cdot 6 = 96$

С другой стороны

$x^2+(y-12)^2=16$ при $y=-ax+8b$ — 1 реш.

$$x^2+(-ax+8b-12)^2=16$$

$$x^2+(8b-ax-12)^2=16$$

$$x^2+64b^2+a^2x^2+144-16abx-192b+24ax=16$$

$144-16=128$

$12 \cdot 8 = 96 \qquad 96 \cdot 2 = 192$

$$(1+a^2)x^2+(24a-16ab)x+(64b^2-192b+128)=0$$

$$D=(8a(3-2b))^2-4(1+a^2)(64b^2-192b+128)=0$$

$$64a^2(9-6b+4b^2)-4(64b^2-192b+128+128a^2-192a^2b+64a^2b^2)=0 \quad /:4$$

$$64a^2b^2+144-96ba^2-64b^2-192b+128+128a^2-192a^2b+64a^2b^2=0$$

(Не успел. далее получаем систему из двух уравнений на (a,b), решаем, получаем 2 значения a, которые дают ещё два решения при домножении на -1, т.к. симметрия отн-но OY)

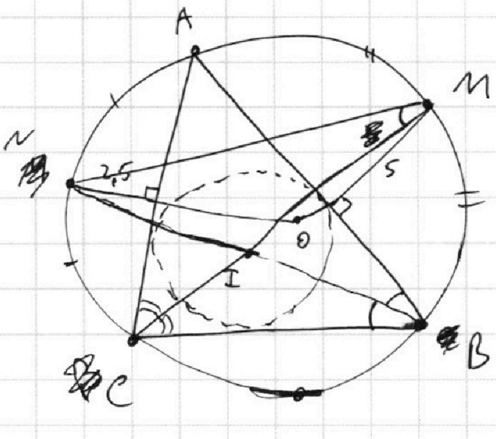
Ответ: $\pm a_1, \pm a_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

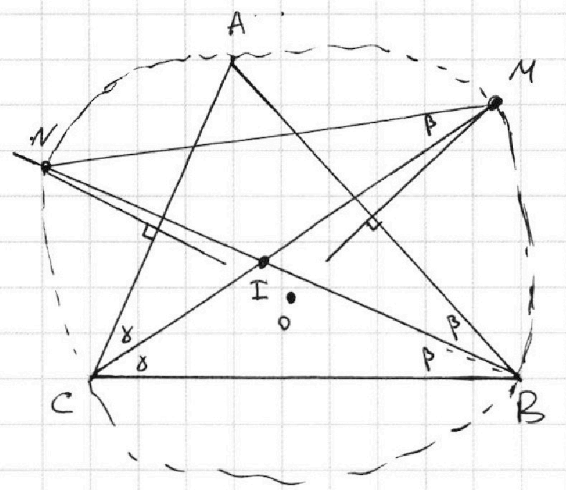
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



AI – ?

I – центр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [X] 3 [X] 4 [X] 5 [X] 6 [X] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot k_1$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot k_2$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot k_3$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2\}$ – степень вхождения двойки и семёрки в числа $\in \mathbb{N} \Rightarrow \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{k_1, k_2, k_3\}$ – ~~[illegible]~~ другие мн-ли $\Rightarrow \{k_1, k_2, k_3\} \in \mathbb{N}$.

$ab \vdots 2^{15} 7^{11} \Rightarrow 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \vdots (2^{15} \cdot 7^{11})$

Аналогично с остальными $\Rightarrow$ система:

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 = 15 \\ \alpha_2+\beta_2 = 11 \\ \alpha_1+\gamma_1 = 23 \\ \alpha_2+\gamma_2 = 39 \\ \beta_1+\gamma_1 = 17 \\ \beta_2+\gamma_2 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{21}{2} \\ \beta_1 = \frac{9}{2} \\ \gamma_1 = \frac{25}{2} \\ \alpha_2 = 16 \\ \beta_2 = -5 \\ \gamma_2 = 23 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{21}{2} \\ \alpha_2 = 16 \\ \beta_1 = \frac{9}{2} \\ \beta_2 = -5 \\ \gamma_1 = \frac{25}{2} \\ \gamma_2 = 23 \end{cases}$$

Такие решения системы обусловлены тем, что я считаю, что $k_1, k_2, k_3 \not\vdots 2$ и $\not\vdots 7$, ~~хотя это [illegible]~~ значит $k_1, k_2, k_3 \vdots 2$ и $\vdots 7$, там, где решения <0 или $\notin \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow k_1 \vdots$ (хотя бы 2) $\Rightarrow k_1 \geq 2$

$k_2 \vdots$ (хотя бы 2 и хотя бы 7^5) $\Rightarrow k_2 \geq 2 \cdot 7^5$

$k_3 \vdots$ (хотя бы 2) $\Rightarrow k_3 \geq 2$

$y - f(x) = (x - x_k)$

a, b

$\Rightarrow$ Новая система $\Bigg\{$

$b = ka + r$

$r = b - ka$

$(a, b) = (a, r) = a, b - ka$

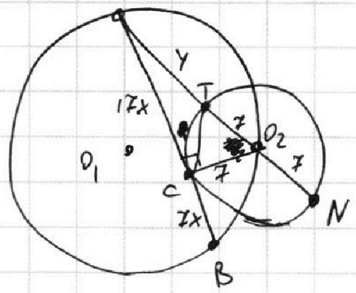
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X			

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3



$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$ $\Omega(O_1, R)$ $\omega(O_2, r)$

$R = 13$
$r = 7$

$AB - ?$

Пусть $AC = 17x \Rightarrow BC = 7x$

$AO_2 \cap \omega = T$, $AT = Y$

O_2C - радиус к т. касания $\Rightarrow \angle O_2CA = 90$

(1) По т. о касат. и сек. для ω и т. A:
(пусть $AT \cap \omega$ вторично в т. N)

$AT \cdot AN = AC^2$

$\Rightarrow Y \cdot (14+Y) = 17x^2$

$S_{\triangle AO_2B} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x = \frac{AO_2 \cdot O_2B \cdot AB}{4R}$, т.к. $AB = 24x \neq 0$

$\Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{AO_2 \cdot O_2B}{4R}$, $AO_2 = \sqrt{49 + (17x)^2}$, (т. Пиф в $\triangle ACO_2$)

$O_2B = \sqrt{49 + (7x)^2}$, (т. Пиф. в $\triangle O_2CB$)

$\Rightarrow \frac{7}{2} \cdot 4 \cdot 13 = \sqrt{49 + (7x)^2} \cdot \sqrt{49 + (7x)^2}$

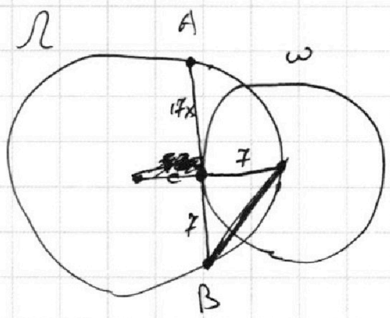
$14 \cdot 13 = \sqrt{(49 + 289x^2)(49 + 49x^2)}$ $|\,\wedge 2$

$(182)^2 = (49)^2 + (49 \cdot 289 + 49 \cdot 49)x^2 + 289 \cdot 49 x^4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

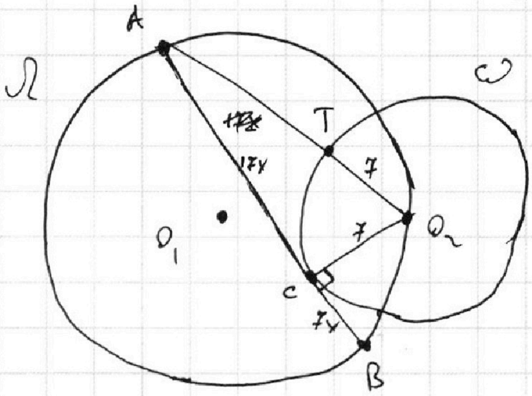
$AB - ?$



$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$

$r = 7$

$R = 13$



~~AT~~

$(17x)^2 = AT\cdot(AT+7)$

$(17x)^2 + 7^2 = (AT+7)^2$

$ab \,\vdots\, 2^{15}\,7^{11}$

$bc \,\vdots\, 2^{17}\,7^{18}$

$ac \,\vdots\, 2^{23}\,7^{39}$

$(abc)\min - ?$

~~НОД~~ $(ab, bc) =$

$a = 2^{\alpha_1}\,7^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1}\,7^{\beta_2}$

$c = 2^{\gamma_1}\,7^{\gamma_2}$

~~$a\cdot b \,\vdots$~~ $ab = k\cdot 2^{15}\cdot 7^{11}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 15 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 11 \end{cases}$

$ab \equiv 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

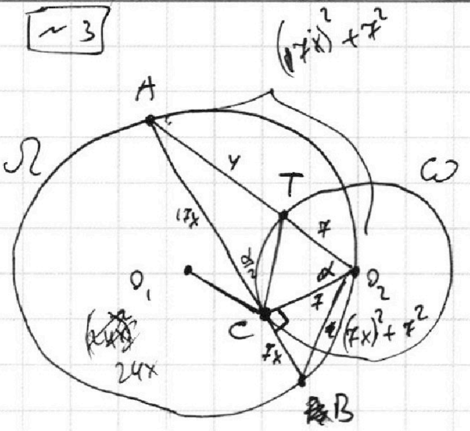
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 3



~~Пусть~~

$\frac{AC}{CB}=\frac{17}{7}$, O_1 – центр Ω
O_2 – центр ω
r – радиус ω
R – радиус Ω
AB – ?

$(a,b)=1$

Решение.

$a+b$

Пусть $AC=17x \Rightarrow BC=7x$.
Пусть $AO_2\cap\omega=T$. Пусть $AT=y$.

(1) По т. о касательной и секущей для ω в т. A:
$AO_2\cdot AT=AC^2$, т.к. AC – касат.
$(7+y)y=(17x)^2$ (1)

(2) Проведём радиус ω O_2C, $\angle O_2CA$ – прямой.
$\Rightarrow$ По т. Пиф. в $\triangle ACO_2$: $AC^2+CO_2^2=AO_2^2$
(2) $(17x)^2+7^2=(7+y)^2$

(1) в (2): $(\overset{14}{\cancel{7}}+y)y+7^2=(7+y)^2$

$\overset{14}{\cancel{7}}y+y^2+49=49+14y+y^2$

$0=7y$

~~$\sin\alpha=17x$~~
$\cos\alpha=\frac{7}{7+y}$
$\sin\alpha=\frac{17x}{7+y}$

$\frac{49+(17x)^2}{(7+y)^2}=1$

$49+(17x)^2=(7+y)^2$

$(49+289x^2)(49+49x^2)$

49^2+

$\frac{abc}{4R}$

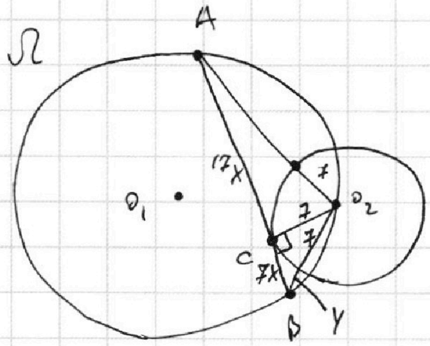
$49+$

$\begin{array}{r} 14\\ \cdot 13\\ \hline 42\\ 14\\ \hline 182\end{array}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$

$AB - ?$ $\quad r = 7$

$R = 13$

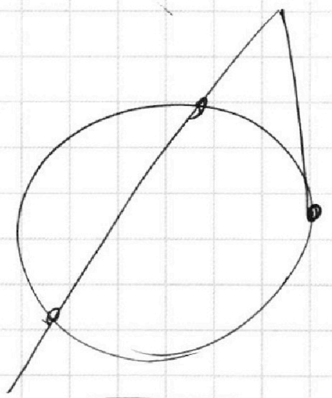
$(7x)^2 + 49 = (7+y)^2$

$(7x)^2 = (7+y)\cdot y =$

$y(7+y) + 49 = (7+y)^2$

$y^2 + 7y + 49 = y^2 + 14y + 49$

$y = 0$



$\cancel{1^2 = 17x}$

$(17x)^2 +$

$3x^2 - 6x + 2 = 0$

$D = 36 - 24 = 12 = 4\cdot 3$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{3}} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\underbrace{\sqrt{3x^2 - 6x + 2}}_{a} - \underbrace{\sqrt{3x^2 + 3x + 1}}_{b} = \underbrace{1 - 9x}_{a-b} \quad |^2$

$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cancel{3x^2 - 6x + 2 = 0}$

$\cancel{D = 36 - 4\cdot 6 = 12}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$b - \sqrt{b} = a - \sqrt{a}$

$\cancel{\sqrt{b}(\sqrt{b} +}$

$\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2$

$$-\begin{array}{l} 3x^2 - 6x + 2 = a \\ 3x^2 + 3x + 1 = b \\ \hline 1 - 9x = a - b \end{array}$$

$1 = a + b + 2\sqrt{ab}$

$3x^2 + 3x + 1 \geqslant$

$\geqslant 3\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) + 1$

$\geqslant 3\cdot\frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{3} + \sqrt{3} + 3 + 1 >$

$3\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4} + \frac{6}{4} + 2 =$

$= \frac{9}{4} + \frac{8}{4} = \frac{17}{4}$

$3x^2 + 3x + 1 = 0$

$D = 9 - 4\cdot 3 < 0$

$x_в = -\frac{3}{2\cdot 3} = -\frac{1}{2}$

$y_в = \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \geqslant 15+23+17=55$

$\underbrace{11+39}_{50}+18=68$

$a=2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$

$b=2^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$

$c=2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$

$\alpha_1+\beta_1 \geqslant 15$

$\beta_1+\gamma_1 \geqslant 17$

$\alpha_1+\gamma_1+2\beta_1 \geqslant 32$

$\alpha_1+\gamma_1 \geqslant 23$

$\dfrac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

$\alpha_1+\gamma_1=24$

$\beta_1=4$

$17-4=13$

$a+b \,\vdots\, m$

$a^2-7ab+b^2 \,\vdots\, m$

$\alpha_1=11$

$\gamma_1=13$

$\alpha_2+\beta_2 \geqslant 11$

$\alpha_2+\gamma_2 \geqslant 39$

$\cancel{\beta_2+\gamma_2 \geqslant 18}$

$2\alpha_2+\underbrace{\beta_2+\gamma_2}_{\geqslant 18} \geqslant 50$

$627-49=578$

$50-18=32$

$\Rightarrow \alpha_2=16$

627
49

$\gamma_2=23$

$\beta_2=0$

$16+23=39$

$39-16=23$

$338-289=49$

$6x^2-3x+2$

$289=17^2$

$49=7^2$

$289+49=338$

$26\cdot 26=156+52=676$

$676-49=627$

$289+338=627$

$289x^4+338x^2-627 \mid x^2-1$

$289x^4-289x^2 \qquad 289x^2+49$

$49x^2-627$

$49x^2-49$

-578

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [X] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot k_1$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot k_2$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot k_3$;

$\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2\} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – степени 2 и 7;

$\{k_1, k_2, k_3\} \in \mathbb{N}$.

Имеем $ab = 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \,\vdots\, (2^{15} \cdot 7^{11})$

$\Leftrightarrow ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot m_1$, где $m_1 \geq 1$ и $m_1 \in \mathbb{N}$

Если $m_1 > 1 \Rightarrow abc = m_1 \cdot t_1$, где $t_1 \in \mathbb{N}$ и $t_1 \geq 1$

Значит, чтобы найти min (abc), берём $m_1 = 1$,

аналогично с остальными ac и bc:

$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\beta_1 = 15 & (1) \\ \alpha_2+\beta_2 = 11 & (2) \\ \alpha_1+\gamma_1 = 23 & (3) \\ \alpha_2+\gamma_2 = 39 & (4) \\ \beta_1+\gamma_1 = 17 & (5) \\ \beta_2+\gamma_2 = 18 & (6) \end{cases}$$

$\alpha_1+\beta_1 \geq 15$
$\alpha_1+\gamma_1 \geq 23$ (+)
$2\alpha_1 + (\beta_1+\gamma_1) \geq 38$
$2\alpha_1 \geq 21 \quad \alpha_1 \geq \frac{21}{2}$

(3)-(1): $\gamma_1 - \beta_1 = 8$ (+)
(5): $\gamma_1 + \beta_1 = 17$

$2\gamma_1 = 25$

$\gamma_1 = \frac{25}{2}$, понятно, что ~~...~~ также γ_1 – не подходит, но позднее мы с этим разберёмся.

(5) $\beta_1 = 17 - \gamma_1 = \frac{34-25}{2} = \frac{9}{2}$

~~+57~~
23

$-\; \alpha_2+\beta_2 = 11$
$\alpha_2+\gamma_2 = 39$

(+) $\gamma_2 - \beta_2 = 28$
$\gamma_2 + \beta_2 = 18$

$\gamma_2 = \frac{46}{2} = 23$

$\beta_2 = 18 - 23 = -5$

$\alpha_2 = 39 - \gamma_2 = 16$
23

$-\; \alpha_1+\beta_1 = 15$
$\gamma_1+\beta_1 = 17$

(+) $\gamma_1 - \alpha_1 = 2$
$\gamma_1 + \alpha_1 = 23$

$\gamma_1 = \frac{25}{2}$

$\beta_1 = \frac{9}{2}$

$\alpha_1 = 15 - \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$