



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{37}$

Оценка: через  $D_2(a)$  будем обозначать степень входящие  $a$  в  $b$ .

1)  $D_2(a) = x_1, D_7(a) = y_1$

$D_2(b) = x_2, D_7(b) = y_2$

$D_2(c) = x_3, D_7(c) = y_3$

2) Т.к.  $a \mid b \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 14$

Аналогично:  $\begin{cases} x_2 + x_3 \geq 14 \\ x_3 + x_1 \geq 20 \\ y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_2 + y_3 \geq 14 \\ y_3 + y_1 \geq 37 \end{cases}$

3) (используем неравенство)

3 получим:  $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 14 + 14 + 20 = 48$

$\left. \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 \geq 24 \\ \text{т.к. } y_1 + y_2 + y_3 \geq 37 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$

4) очевидно, что если  $y_1 + y_3 \geq 37 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq 37$

$\geq 37$

5)  $D_2(abc) = x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$

$D_7(abc) = y_1 + y_2 + y_3 \geq 37$

$\Rightarrow abc \geq \left[ 2^{26} \cdot 7^{37} \right]$  Пример:  $\begin{cases} a = 2^8 \cdot 7^{15} \\ b = 2^6 \cdot 7^{20} \\ c = 2^{12} \cdot 7^{22} \end{cases}$

Не нужно убеждаться, что

Пример удовлетворяет условию.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

② Ответ: 8

1) Пример:  $a=1, b=7 \Rightarrow a+b=8$   
 $b^2 - 6ab + a^2 = 8 \Rightarrow a^2 - 6ab + b^2 = 8$

2) Оценка:  $a, b \in \mathbb{N}$  - несоизмеримы  $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a, b) = 1$ , где  $(x, y) = \text{НОД}(x, y)$ .

3) Найдем минимальное  $m$  и  $n$   $\Rightarrow$  то

какие случаи, то найдем  $(a+b, a^2 - 6ab + b^2)$   
 $= (a+b, (a+b)^2 - 8ab) = (a+b, 8ab) + \text{н.к.}$

НО + н.к.  $(a, b) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (a+b, a) = 1 \\ (a+b, b) = 1 \end{cases}$  т.к.  $(a+b)^2 = (a+b)$

если  $\begin{cases} (a+b) : d \Rightarrow b : d \\ a : d \end{cases}$ , то  $(a, b) = 1$  оно не так

где  $b \Rightarrow (a+b, 8ab) = (a+b, 8) \Rightarrow$

$\Rightarrow |(a+b, a^2 - 6ab + b^2)| \leq 8$

т.к.  $g$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

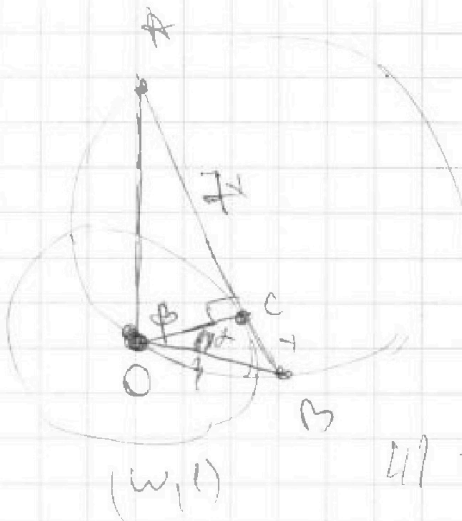
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



1) Высота центра  $w = 0$ .

(R, 5) 2) Высота  $\begin{cases} \angle COA = \alpha \\ \angle COB = \beta \end{cases}$

3) т.к.  $AB$  - касательная

$\downarrow$   
 $OC \perp AB$

4)  $3) \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{5x}{OC} = \frac{5x}{x}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5x}{OC} = \frac{5x}{x}$

5)  $\triangle BOA: \frac{8x}{\sin(\alpha+\beta)} = 10$

(по т.т. суммы углов)

6)  $\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = x \\ \operatorname{tg} \beta = 5x \\ \sin(\alpha+\beta) = 8x \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$

$x^2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{x^2+1}$

т.к.  $\alpha, \beta$  углы в треугольнике  $\Rightarrow \alpha + \beta \in [0, \pi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta \geq 0$

$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$  аналогично  $\left. \begin{array}{l} \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} \\ \sin \beta = \frac{5x}{\sqrt{49x^2+1}} \end{array} \right\}$   
 $\sin \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$   
 $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} + \frac{5x}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} =$   
 $= \frac{4}{5} x \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}} = \frac{4}{5} (x^2 \times 1) (49x^2+1) = 100$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Упростите!!!

$$(x^2+1)(49x^2+1)=100 \quad t=x^2$$

$$(t+1)(49t+1)=100$$

$$49t^2+t+49t+1=100$$

$$49t^2+50t-99=0$$

$$D=2500+4 \cdot 49 \cdot 99=4(4851+625)=$$

$$=4 \cdot 5476=4 \cdot 4 \cdot 1369$$

$$t = \frac{-50 \pm \sqrt{5476}}{98} = \frac{-50 \pm 2\sqrt{1369}}{98} = \frac{-50 \pm 2 \cdot 37}{98}$$

т.к.  $t \geq 0$

$$x = \frac{\sqrt{2\sqrt{1369}-25}}{7}$$

$$AB = 8x = \frac{8\sqrt{2\sqrt{1369}-25}}{7}$$

Ответ:

$$5476 = 4 \cdot (1250 + 100 + 99)$$

$$4 \cdot 1369 = 4 \cdot (100 + 25 + 100)$$

$$99 \cdot 49 = 4900 - 49 = 4851$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$D_{A, B}: 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{из условия 1):} \\ 2(x-1)(x-3) \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad \text{— всегда верно}$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

Докажем обе части на  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

$$\text{Если, } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \neq 0$$

$$1) \text{ Если } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 0 \\ \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\text{выражение}} \text{ и } \text{но в } \text{выражение} \left[ x = \frac{3}{2} \right]$$

$$1.2) 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4} \Rightarrow \text{нет корней в } \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \neq 0 \quad \forall x.$$

2)  $\sqrt{\dots} \neq 0$  докажем:

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3})^2 - (\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 = (2 - 4x)$$

$$(2 - 4x) = (2 - 4x) (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2.1) 2 - 4x = 0 \quad \left[ x = \frac{1}{2} \right] \text{ удов. условием } D_{A, B}:$$

$$2.2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ⓢ Прогресс!!!

$$2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

т.к. обе суммы  $\geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 3})^2 + (\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 +$$
$$+ 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 = 4\left(\sqrt{2x^2 - \frac{3}{4}x + 1}\right) =$$

$$= 4\left(\left(\sqrt{2x^2 - \frac{3}{4}x + 1}\right)^2 + 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2\right) =$$

$$= 4\left(\sqrt{2x^2 - \frac{3}{4}x + 1}\right)^2 + 4\left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2\right)$$

$$\frac{3}{8} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{8}\right)^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 > \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2\right) > 2 \Rightarrow$$

$$\text{Умножив обе части на } 2 \text{ и получим } 2 < 2\sqrt{2x^2 - \frac{3}{4}x + 1} = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - \frac{3}{4}x + 1} < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{нет решений: } \emptyset.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

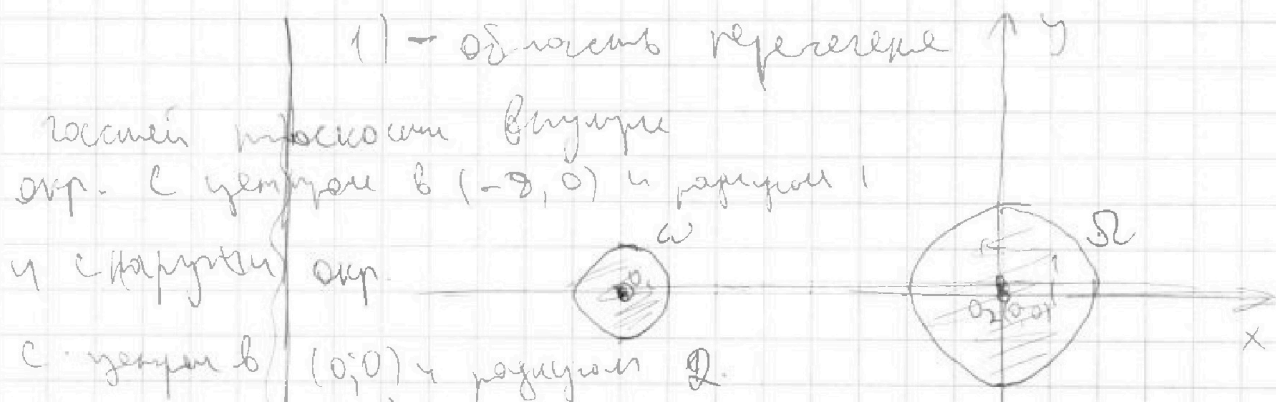
6. 
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

⇓

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 & 1) \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 & 2) \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

Пусть  $\omega$  - окр с центром в  $(-8, 0)$  и радиусом 1,  
 $\Omega$  - окр. с центром в  $(0, 0)$  и радиусом 2.



это граница фигуры ω.

аналогично 2) - это граница фигуры Ω.

ПМТ  $\downarrow$  удовлетворяется впервую очередь - это область фигуры ω и Ω.

$ax - y + 10b$  - прямая. Если прямая

пересекает зону Ω - то эту окр поместим

в ось x точка x - то будем считать что



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

легкого решения, т.к. будем решать все  
попы на сфере введем координаты на  
сферической  $\Rightarrow ax - y + zb = 0$  равные  
~~для~~ для каждой из двух окр. либо  
полностью либо не включая других точек.  
Значит с каждой окр. не более одного  
решения  $\Rightarrow$  всего не более 2,  
а чтобы было ровно 2 точек равные  
показаны их обеим  $\Rightarrow ax - y + zb = 0$  -  
одно из уравнений общих касательных  
плоск. окружностей.

Таким образом задача сводится к  
поиску, чтобы найти координаты  
при  $x$  для  $a$  любых значений  $x$ .

1) Пусть центры  $u$  и  $v$   $O_1$  и  $O_2$   
соответственно.

2) Найдем 2 центра поместим  
первое из них полностью в окружности  
в центре.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. Преположение!!!

Два дуги окружности имеют на прямой  $Ox$  и  $Oy$  точки, что если  $O$  - центр

окружности, то  $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{1}{2}$  (отношение радиусов)

Но если  $OO_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$  ось  $y \Rightarrow$

$\Rightarrow O(x, 0)$   $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{1}{2}$

$O_1(-8, 0)$

$O_2(0, 0)$

$\Rightarrow 2(x=0) = x^2$

~~$2x + 32x + 128 = 0$~~

Порядок  $O(-16, 0)$   
 ~~$O(-8, 0)$~~   
 $O(-\frac{16}{3}, 0)$

Проверка:  $\frac{-16 - (-8)}{-16 - 0} = \frac{1}{2}$

~~$\frac{-8 - (-\frac{16}{3})}{-\frac{16}{3} - 0} = \frac{16}{3} - 8 = \frac{16-24}{3} = \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3}$~~

Важно  $(-16, 0)$  - центр окружности

перевести центр в формулу  $\Rightarrow$

и использовать каноническое - это

каноническое  $(-16, 0)$  и  $(-\frac{16}{3}, 0)$  относятся к  $Ox$  и  $Oy$ . Это центр окружности,

то есть -  $x$  - ось -  $Ox$  и  $y$  - ось -  $Oy$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) Преобразование!!!

Плюс проверим  $y(-16, 0)$  и  $(-\frac{16}{3}, 0)$   
касательные к  $\Omega$ .

1) Пусть кас.  $- y = kx + b$ .  $(-16, 0) \in y = kx + b$ .

Тогда пересечение  $\Omega$  и  $y = kx + b$ .  
 $b - 16k = 0$

$$\begin{cases} y = kx + b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad x^2 + (kx + b)^2 = 4$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2kbx + b^2 - 4 = 0$$

$$x^2(k^2 + 1) + x \cdot 2kb + b^2 - 4 = 0$$

$$\Gamma - k. \Rightarrow \text{то кас} \Rightarrow D = 0 = (2kb)^2 - 4(k^2 + 1)(b^2 - 4)$$

$$\begin{cases} b = 16k \\ 4k^2 b^2 - 4(k^2 b^2 - 4k^2 + b^2 - 4) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 16k \\ 4k^2 b^2 - 4kb^2 + 16k^2 - 4b^2 + 16 = 0. \end{cases}$$

$$16k^2 - 4(16k)^2 + 16 = 0.$$

$$4k^2 - (16k)^2 + 4 = 0.$$

$$k^2 - 16 \cdot 4k^2 + 1 = 0 \quad k^2 = \frac{1}{63} \quad \left| k = \pm \frac{1}{\sqrt{63}} \right|$$

$$2) \left(-\frac{16}{3}, 0\right) \in y = kx + b \quad b = -\frac{16}{3}k$$

Аналогично  $16k^2 - 4b^2 + 4 = 0 \quad 4k^2 - b^2 + 4 = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. Арифметика!!!

$$\begin{cases} ck^2 - b^2 + c = 0 \\ b = \frac{16}{3}k \end{cases}$$

$$b = \frac{16}{3}k$$

$$ck^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2 k^2 + c = 0$$

$$k^2 - \frac{16 \cdot 4}{3} k^2 + c = 0$$

$$3k^2 - 64k^2 + 3 = 0$$

$$61k^2 = 3 \quad k^2 = \frac{3}{61} \quad k = \pm \sqrt{\frac{3}{61}}$$

Но если мы найдем коэффициенты при  
этих переменных, то есть если  
найдем  $a$  и  $b$  и  $c$  и  $d$  и  $e$  и  $f$  и  $g$  и  $h$  и  $i$  и  $j$  и  $k$ .  
в качестве  $b$  в формуле  $b$  в уравнении  
переменных.)

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}, \pm \sqrt{\frac{3}{61}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

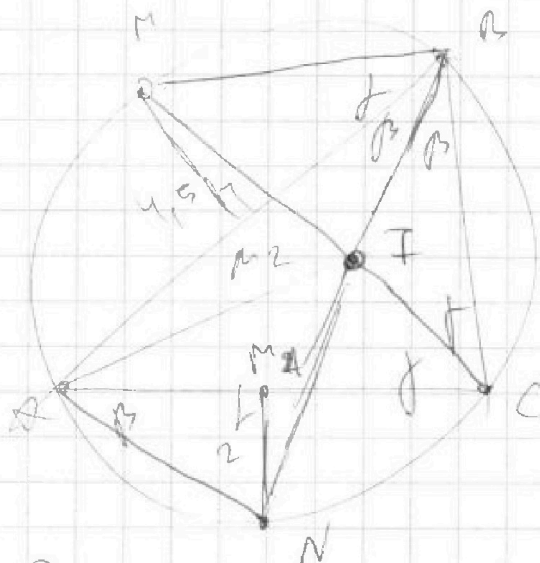
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



7



1)  $\angle C = 2\alpha$   
 $\angle B = 2\beta$

2)  $I$  - к.  $M$  и  $N$  - середины  $BC$  и  $AC$

$MI \parallel BC \Rightarrow CM \parallel BN$  - параллельно.

3)  $BN \cap CM = I$ ,  $AI \perp BC$ ?

4)  $\angle C$  перпендикуляр  $BN$  на  $AC - M_1$ ,  $e$   
 $CM$  на  $AB \perp M_2$

5)  $M_1$  и  $M_2$  - средины  $AC$  и  $AB$  соответственно.

они соединены  $MI$ .

6)  $\angle M_1 B A = \angle M_2 C A = \alpha$ , следовательно  $\angle CAN = \alpha$

7)  $\frac{AM_1}{AM} = \frac{AN}{AC} = \frac{2NM_2}{AC}$

Аналогично  $\frac{AN}{AB} = \frac{2NM_1}{AB}$

8)  $\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta}$   
 $\frac{2NM_1}{\sin \alpha} = \frac{2NM_2}{\sin \beta}$

$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{NM_1}{NM_2} = \frac{2}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



①  $a, b, c \in \mathbb{N} : ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$   
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{14}$   
 $ac : 2^{20} \cdot 7^7$        $\min abc = ?$

$ab = (14, 10)$        $abc = (20, 37)$   
 $bc = (17, 14)$   
 $ac = (20, 7)$

$\vec{a}(a) = x_1$   
 $\vec{a}(b) = x_2$   
 $\vec{a}(c) = x_3$

$b = (x_1, x_2)$   
 $c = (x_3, x_4)$   
 $x_1 + x_2 = 14$   
 $x_2 + x_3 = 17$   
 $x_3 + x_4 = 7$

$x_1 + x_2 \geq 14$   
 $x_2 + x_3 \geq 17$   
 $x_3 + x_4 \geq 20$   
 $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 51$   
 $x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$

$x_1 + x_2 = 14 \rightarrow x_2 = 14 - x_1$   
 $x_2 + x_3 = 17 \rightarrow x_3 = 17 - x_2 = 17 - (14 - x_1) = 3 + x_1$   
 $x_3 + x_4 = 7 \rightarrow x_4 = 7 - x_3 = 7 - (3 + x_1) = 4 - x_1$   
 $x_1 + x_2 + x_3 = 14 + 3 + x_1 = 17 + x_1 \geq 26 \rightarrow x_1 \geq 9$   
 $x_1 = 9, x_2 = 5, x_3 = 12, x_4 = -5$

$\vec{a}(a) = y_1$   
 $\vec{a}(b) = y_2$   
 $\vec{a}(c) = y_3$   
 $y_1 + y_2 \geq 10$   
 $y_2 + y_3 \geq 17$   
 $y_3 + y_1 \geq 37$

$x_1 + x_2 + x_3 = 26$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 32$

$x_1 + x_2 \geq 14$

$y_1 + y_2 + y_3 = 32$

$x_3 \leq 12$

$y_1 = 18$   
 $x_1 = 2$   
 $y_2 = 15$

$y_1 \geq 0$

$y_1 = 15$

$y_2 = 0$

$y_3 = 22$

$x_3 = 12$

$x_1 + x_2 = 14$

$y_1 = 8$   
 $y_2 = 6$   
 $y_3 = 12$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 32$

$y_1 + y_2 = 10$

$y_2 + y_3 = 17$

$y_3 + y_1 = 37$

$x_1 = 9$

$x_2 = 5$

$\vec{a}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b) = 1, a, b \in \mathbb{N}$$

$$(*) (a+b, a^2 - 3ab + b^2)$$

$$(a+b, (a+b)^2 - 3ab) =$$
$$= (a+b, -3ab)$$

$$\frac{8}{1-4+4} =$$

$$\frac{8}{8-4} =$$

$$\frac{8}{1-4+4} = \frac{8}{8} = 1$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МОТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4)

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - \sqrt{x}$$

~~ОАБ~~:  $2x^2 - 5x + 3$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)(x-\frac{3}{2})$$

$$2x^2 + 2x + 1 = \text{ОАБ}$$

$$x^2 + x + \frac{1}{2}$$



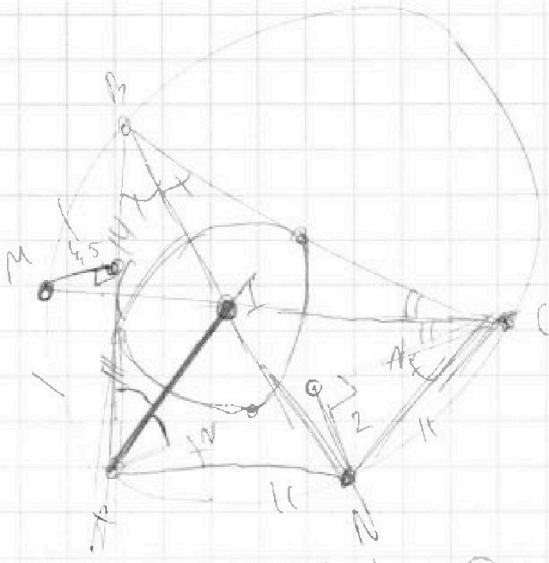
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



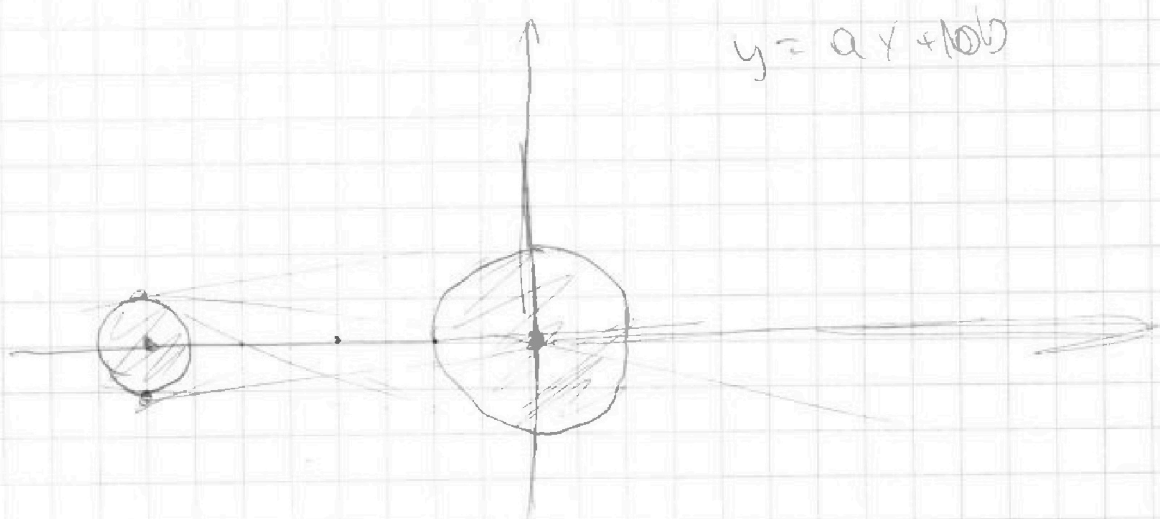
$\forall a : \exists b$  : ровно 2 решения.

$$ax - y + |0|b = 0$$

$$\left( (x+3)^2 + y^2 - 1 \right) \left( x^2 + y^2 - 4 \right) \leq 0$$

$$\left( (x+3)^2 + y^2 - 1 \right) \left( x^2 + y^2 - 4 \right) \leq 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} (x+3)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ (x^2 + y^2 - 4) \geq 0 \end{array} \right] \vee \left[ \begin{array}{l} (x+3)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{array} \right]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{b}{\sin 2\beta} = 2R$$

$$\text{tg } \beta = \frac{4}{5}$$

$$\frac{c}{\sin 2\alpha} = 2R$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{\sin 2\alpha + \text{tg } \beta} = 2R = \frac{9}{\sin 2\beta}$$

$$\frac{4}{2\sin^2 \alpha} = \frac{9}{2\sin^2 \beta}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2}{3}$$

$$3\sin x = 2\sin y$$

$$\sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

$$\sin x = \frac{2}{3}$$

$$\sin y = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 (1 - \cos^2 x) + \cos^2 y = 1$$

$$\frac{9}{4} - \frac{9}{4} \cos^2 x + \cos^2 y = 1$$

$$\sin x = 2y$$

$$y = 1,5x$$

$$2\cos^2 y - \cos^2 x = \frac{5}{4}$$

$$4\cos^2 x = 4\cos^2 y - 5$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{9}{2x}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 3x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x - 1} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(x^2 - 3x + 3)(2x^2 + 2x - 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 = 4\left(x^2 - \frac{3}{4}x + 1\right) =$$

$$= 4\left(x^2 - \frac{3}{8}\right)^2 + 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$\frac{9}{64}$$

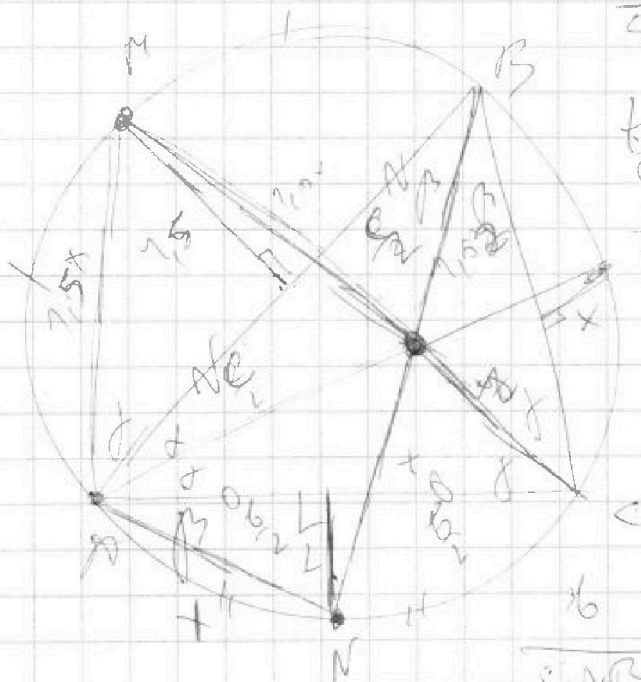
$$\cos \alpha = \frac{9}{64}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2}{4.5}$$

$$\tan \alpha = \frac{4.5}{2}$$

$$\tan \beta = \frac{4}{6}$$

$$\frac{9}{\cos \beta} - 9 \cos \beta = \frac{4 \cos \alpha}{\cos \beta \cos \alpha}$$



$$\frac{9}{\sin \beta} = 2R$$

$$\tan \beta = \frac{4}{6}$$

$$\frac{\sin \alpha \tan \beta}{9} = 2R$$

$$\frac{\sin \alpha \tan \beta}{9} = 2R$$

$$\frac{9 \sin^2 \beta}{\cos \beta} = \frac{4 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{9 \sin^2 \beta \cos \alpha}{\cos \beta} = 4 \sin^2 \alpha$$

$$\frac{9 \cos^2 \beta}{\cos \alpha} = \frac{4 \cos^2 \alpha}{\cos \beta}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

