



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① Ограничение: $2^{26} \cdot 7^{37}$

Изложение: Через $\mathcal{D}_1(b)$ будем обозначать
сумму вхождения а в b. б.

1) $\mathcal{D}_2(a) = y_1, \mathcal{D}_7(a) = y_1$,

$\mathcal{D}_2(b) = x_2, \mathcal{D}_7(b) = y_2$

$\mathcal{D}_3(b) = x_3, \mathcal{D}_7(c) = y_3$

2) Т.к. $a|b: 2^{14} \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 14$

Аналогично: $\begin{cases} x_2 + x_3 \geq 18 \\ x_3 + y_1 \geq 20 \\ y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_2 + y_3 \geq 18 \\ y_3 + y_1 \geq 34 \end{cases}$

3) (исключая избыток)

3 получим: $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 14 + 18 + 20 = 51$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 51$

2. Но т.к. $y_1 + y_2 + y_3 \geq 21$ $y_1 + y_2 + y_3 \geq$
 ≥ 26 .

4) Добавим, что есть $y_1 + y_3 \geq 37 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq 37$.

5) $\mathcal{D}_2(abc) = x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$

$\mathcal{D}_7(abc) = y_1 + y_2 + y_3 \geq 37 \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$ Пример: $\begin{cases} a = 2^8 \cdot 7^{15} \\ b = 2^{16} \cdot 7^9 \\ c = 2^{12} \cdot 7^{22} \end{cases}$

Например уберите се, что

Пример удовлетворяет условию.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

② Ответ: 8

1) Пример: $a=1$, $b=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow a+b=8$, $b^2-6ab+a^2=8 \Rightarrow a^2-6ab+b^2=8$.

2) Оценка: $a/b > \frac{8}{7}$ - неоправданно \Rightarrow
 $\Rightarrow (a,b)=1$, т.е. $(x,y)=\text{НОД}(x,y)$.

3) Найдем такое такое x и y - это

нормальное, т.е. такие $(a+b, a^2-6ab+b^2)$
 $= (a+b, (a+b)^2 - 8ab) = (a+b, 8ab)$, т.к.
 $\text{НОД}(x,y) \cdot (a,b)=1 \Rightarrow \begin{cases} (a+b, a)=1 \\ (a+b, b)=1 \end{cases}$ т.к.

также $\{(a+b)\} \cdot d \Rightarrow b \mid d$, т.к. $(a,b)=1$
 $\begin{cases} a \mid d \end{cases}$ очевидно.

также $b \mid a+b \Rightarrow (a+b, 8ab) = (a+b, 8) \Rightarrow$
 $\Rightarrow |(a+b, a^2-6ab+b^2)| \leq 8$.

2-я п.г.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

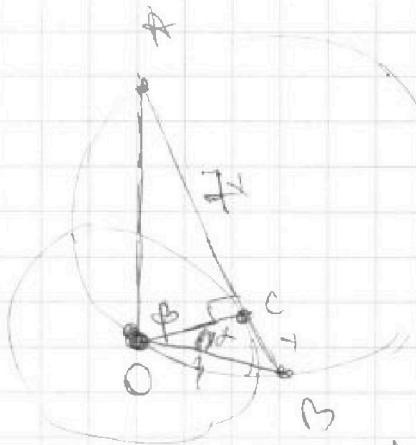


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3)



1) Нужно доказать $\omega = 0$.

$$(2, 5) \quad 2) \text{Нужно } \begin{cases} \angle COA = \alpha \\ \angle COB = \beta \end{cases}$$

3) Доказательство. AB - касательная

$$OC \perp AB$$

$$\text{Из } 3) \Rightarrow \tan \beta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{OC}{AC} = \frac{OC}{x}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{OC}{AC} = \frac{OC}{x}$$

$$5) \Delta BOA: \frac{8x}{\sin(\alpha + \beta)} = 10$$

(Но \sin суммы)

$$6) \begin{cases} \tan \alpha = x \\ \tan \beta = \frac{7x}{10} \\ 10 \sin(\alpha + \beta) = 8x \end{cases} \quad 6.1) \tan \alpha = x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \sin \alpha = x \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$x^2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Т.к. \angle между 2 прямами $\Rightarrow \alpha - \beta \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta > 0$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \quad \text{аналогично} \quad \boxed{\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}}$$

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} \quad \boxed{\sin \beta = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}}}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} + \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \frac{48x}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}} = \frac{4}{5} (8^2 \cdot 1) (49 \cdot 1) = 100 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Программирование

$$(x^2+1)(49t^2+1)=100 \quad t = x^2$$

$$(t+1)(49t+1)=100$$

$$49t^2 + t + 49t + 1 = 100$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$5476 = \\ = 4 \cdot (125 + 100t) \\ 4 \cdot 1369$$

$$35^2 = 100 + 99t + 99 =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 99t \cdot 49 = \\ = 4900 \cdot 4900 + 49 = \\ = 4851 \end{array} \right.$$

$$D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 4(4851 + 625) =$$

$$= 4 \cdot 5446 = 4 \cdot 4 \cdot 1369$$

$$t = \frac{-50 \pm \sqrt{1369}}{98} \quad \text{т.к. } t \geq 0 \\ = \frac{\sqrt{1369} - 50}{98} = \frac{2\sqrt{1369} - 25}{49}$$

$$x = \frac{\sqrt{2\sqrt{1369} - 25}}{7} \quad *B = 8x = \frac{8\sqrt{2\sqrt{1369} - 25}}{7}$$

Ответ:

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1)

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x.$$

$$D\Delta: 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

[из нерн 1]:

$$2(x-1)(x-3) \geq 0$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

- беск. фрн

Докончим обе задачи на $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

Если, $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \neq 0$

$$\text{т.к. } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [2x^2 - 5x + 3 = 0] \quad [2x^2 + 2x + 1 = 0]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{array} \right.$$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$
но в 2-й фрн $x = \frac{3}{2}$

$$1.1) 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4} \Rightarrow \text{нем корней} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \neq 0 \quad \forall x.$$

2) т.к. $\neq 0$ докончим:

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3})^2 - (\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 = (2 - 4x)$$

$$(2 - 4x) = (2 - 4x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2.1) 2 - 4x = 0 \quad \boxed{x = \frac{1}{2}} \quad \text{улов. избр. из Аз?}$$

$$2.2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$x^2 - x - 1 \stackrel{?}{=} 0 \quad \boxed{x = \frac{1}{2}} \quad 2((x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1) Решение!!!

$$2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x - 1} = 1$$

т.к. обе ветви $\geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 3})^2 + (\sqrt{2x^2 + 2x - 1})^2 =$$

$$+ 2 \sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x - 1)} = 1$$

$$4x^4 - 3x^2 + 4 + 2 \sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x - 1)} = 1$$

$$4x^4 - 3x^2 + 4 = 4(V^2 - \frac{3}{4}x^2 + 1) =$$

$$= 4((V - \frac{3}{8})^2 + 1 - (\frac{3}{8})^2) =$$

$$= 4(V - \frac{3}{8})^2 + 4(1 - (\frac{3}{8})^2)$$

$$\frac{3}{8} < \frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{3}{8})^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - (\frac{3}{8})^2 > \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(1 - (\frac{3}{8})^2) > 2 \Rightarrow$$

Что бывает $2 + \text{чтобы} > 0 = 1$

$$\begin{aligned} V &\in \{\pm\}, \Rightarrow \\ \Rightarrow S &\text{ есть: } \frac{2}{\pm}. \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. $\begin{cases} ax - y + cb = 0 \\ ((x+3)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$

$$((x+3)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

↓

Число w - окр в центре $b(-3, 0)$
и радиус 1,

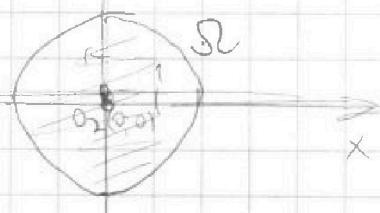
$$\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 - 1 \leq 0 & 1) \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 & 2) \\ (x+3)^2 + y^2 - 1 \geq 0 & 3) \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 & 4) \end{cases}$$

окр S_1 с центром
 $b(0, 0)$ и
радиусом 2.

1) - область пересечения y

внешней полоски в круге
окр. с центром $b(-3, 0)$ и радиусом 1

и внутренний окр.



с центром $(0, 0)$ и радиусом 2 .

это просто область в круге w .

аналогично 2) - это область в круге S_2

ПМТ убывает вправо из центра -3 -
это область внутри w и S_2 .

$ax - y + cb = 0$ - линия. Если линия

пересекает зону S_1 то она должна быть в круге w

и если x меньше - то линия лежит в круге S_2 .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтого решим, т.к. будем решать все
коэффициенты в линейной системе
одного уравнения = $ax - y + cb = 0$ равны
одинаковы и не являются единицами.
Значит с помощью этих же коэффициентов
решим и второе уравнение другого
плоскости = > всего не будем 2,
а просто решим первое 2 уравнения
вместе и в общей = $ax - y + cb = 0$ -
справе из которых обеих исходных
плоскостей.

Таким образом задача свелась к
тому, чтобы найти общую координату
при $x = p$ и $y = q$ исходных плоскостей.

1) Найдем p и q при $x = 0$ и 0

2) Найдем p и q при $y = 0$

Найдем p и q при $x = 0$ и $y = 0$

6) Задача.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Преобразование!!

Это где учуся читают по брачной 0,0
и они говорят, что если 0 - центр

Проверка первая $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{1}{2}$ (отношение радиусов)

Проверка $OO_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$ ось $y = 0$

$$\rightarrow O(x, y) \cdot \frac{OO_1}{OO_2} = \frac{1}{2}$$

~~$$O(x, y) \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$~~

~~$$x^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2)$$~~

~~$$x^2 + 32y^2 = 8$$~~

$$O(-16, 0)$$

~~$$O(-\frac{16}{3}, 0)$$~~

Проверка: $\frac{-16 - (-8)}{-16 - 0} = \frac{1}{2}$

~~$$\frac{-8 - (-\frac{16}{3})}{-\frac{16}{3} - 0} = \frac{\frac{16}{3} - 8}{-\frac{16}{3}} = \frac{\frac{16 - 24}{3}}{-\frac{16}{3}} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$~~

Быстро $(-16, 0)$ — центр преобразования

переворотное $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ око в горизонте

и исходных координатах — это

исходные $(-16, 0)$ и $(-\frac{16}{3}, 0)$ полу-
ются к $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Это центр преобразования,

но все — в едини — все. и групп.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(6) Продолжение...

Проверим, что $(-16, 0)$ и $(-\frac{16}{3}, 0)$ являются точками параболы $y = kx^2 + b$.

1) Найдем значение k . — $y = kx^2 + b$. $(-16, 0) \in y = kx^2 + b$.

$$\text{Проверка} \quad \boxed{y = kx^2 + b} \quad \boxed{-16 = -16k + b}$$

$$\begin{cases} y = kx^2 + b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad x^2 + (kx^2 + b)^2 = 4$$

$$x^2 + k^2x^4 + 2kbx^2 + b^2 = 4$$

$$x^2(k^2+1) + x \cdot 2kb + b^2 - 4 = 0$$

$$\text{Т.к. } \exists \text{ mo nae} \rightarrow D=0 = (2kb)^2 - 4(k^2+1)(b^2-4)$$

$$\begin{cases} b = -16k \\ 4k^2b^2 - 4(k^2b^2 - 4k^2 + b^2 - 4) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -16k \\ 4k^2b^2 - 4k^2b^2 + 16k^2 - 4b^2 + 16 = 0. \end{cases}$$

$$16k^2 - 4(16k)^2 + 16 = 0.$$

$$4k^2 - (16k)^2 + 4 = 0.$$

$$k^2 - 16 \cdot 4k^2 + 1 = 0. \quad k^2 = \frac{1}{63} \quad \boxed{k = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}}$$

$$2) \left(-\frac{16}{3}, 0\right) \in y = kx^2 + b \quad \boxed{b = -\frac{16}{3}k}$$

$$\text{Аналогично } 16k^2 - 4b^2 + 4 = 0 \quad 4k^2 - b^2 + 1 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(6) Решение!!

$$\left\{ \begin{array}{l} 4k^2 - 6^2 = 0 \\ 2. \quad 6 = \frac{16}{3} k \end{array} \right.$$

$$9k^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2 k^2 + 4 = 0$$

$$k^2 - \frac{16 \cdot 4}{9} k^2 + 4 = 0$$

$$3k^2 - 64k^2 + 3 = 0$$

$$6(k^2 - 3)k^2 = 3, \quad k^2 = \frac{3}{6}, \quad k = \pm \sqrt{\frac{3}{6}}$$

Поиск по нашему корректировку при
этих исключенных, то есть это
значение №6 является №6 в уравнении
исключенных.)

$$\text{Отвт: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \pm \sqrt{\frac{3}{6}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

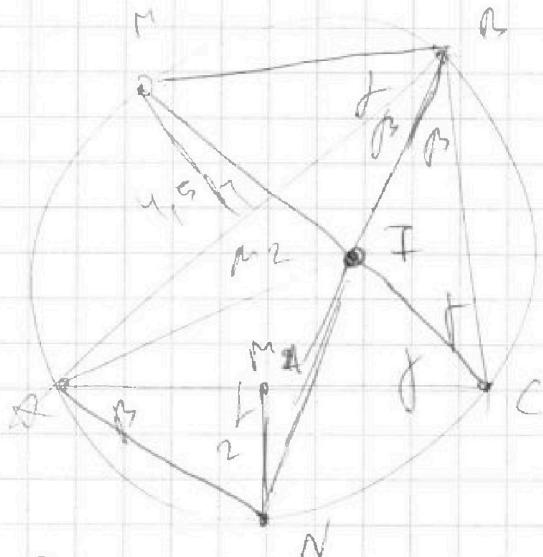
- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4)



17) $\text{Найдите } \angle C = 2\beta$
 $\angle \beta = 2\alpha$.

2) $T - k$ и N -
секущий сече.
из $\angle \beta = \angle C$ и BN -
секущий сече.

3) $BN \cap CM = I$, $AI?$

4) $\text{Линия перпендикуляр } CN \text{ на } AC - M$, \angle

$C M \text{ и } AB \leq M_2$

5) M_1 и M_2 \perp сече AC и AB соответсв.

один секущий из $\angle \beta$.

6) $\angle M_1B = \angle M_2A$, аналогично $\angle CAN = \beta$.

7) $\frac{\beta}{\alpha} \text{ и } AM_1M_2 : \beta = \frac{AM_1}{AM_2} = \frac{2NM_2}{AC}$.

Аналогично $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2NM_1}{AB}$.

8) $\frac{\beta}{\alpha} \text{ и } \sin \angle AC$

$$\frac{2NM_1}{AB} = \frac{\sin \angle AC}{\sin \angle AB} = \frac{\sin \angle AC}{\sin \angle BC} = \frac{2NM_2}{AC}$$
$$\frac{\sin \angle BC}{\sin \angle AB} = \frac{NM_1}{NM_2} = \frac{2}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

⑩ $a, b, c \in \mathbb{N} : ab : 2^{14} \cdot 3^10$
 $bc : 2^{14} \cdot 3^14$ min abc?
 $ac : 2^{22} \cdot 3^7$

$ab = (14, 40)$ abc? $(10, 32)$

$bc = (4, 14)$

$ac = (20, 27)$

a ($x_4 x_2$)

b ($x_3 x_4$)

$\nabla_2(a) = x_1$ $b \nabla_2 (x_1, 10)$ c ($x_5 x_6$)

$\nabla_2(b) = x_2$ $c \nabla_2 (x_1, 0)$ x_1, x_2

$\nabla_3(c) = x_3$ $c = (x_1, x_3)$ $x_1 + x_3 + x_5 -$

$x_1 + x_2 \geq 14$

$x_2 + x_3 \geq 14$

$x_3 + x_1 \geq 20$

$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 51$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$

$x_1 + x_3 + x_5$

$x_1 + x_3 + x_5 = 10$

$x_2 + x_4 + x_6 = 34$

$x_1 + x_3 = 14 - \cancel{x_5} = 6$

$x_3 + x_5 = 14 - \cancel{x_1} = 11$

$x_1 + x_5 = 8$

$x_2 = 24$

$\nabla_2(a) = x_1$

$\nabla_2(b) = x_2$

$\nabla_3(c) = x_3$

$x_1 + x_2 \geq 10$

$x_2 + x_3 \geq 14$

$x_3 + x_1 \geq 13 +$

$x_1 + x_2 + x_3 = 26$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 32$

$x_1 + x_2 \geq 14$

$x_1 + x_2 + x_3 = 32$

$x_3 \leq 12$

$x_3 = 18$

$x_1 + x_2 = 12$

$x_2 = 12$

$x_1 = 2$

$y_1 = 15$

$y_2 = 0$

$y_3 = 22$

$x_1 + x_2 = 14$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 38$

$x_1 = 8$

$x_2 = 6$

$x_2 = 5$

$x_1 = 2$

$x_1 = 8$

$x_1 = 8$
 $x_2 = 6$
 $x_3 = 12$

$y_1 \geq$

$y_2 = 10$

$y_2 + y_3 = 18$

$y_3 + y_1 = 38$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b) = 1, \forall a, b \in \mathbb{N}$$

$$? \quad (a+b, a^2 - bab + b^2)$$

$$(a+b, (a+b)^2 - 3ab) =$$

$$= (a+b, -3ab)$$

$$\frac{8}{1+41+49} \cancel{= 49}$$

$$a=1 \\ b=7$$

$$\frac{8}{1+42+49} = \frac{8}{8} = 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

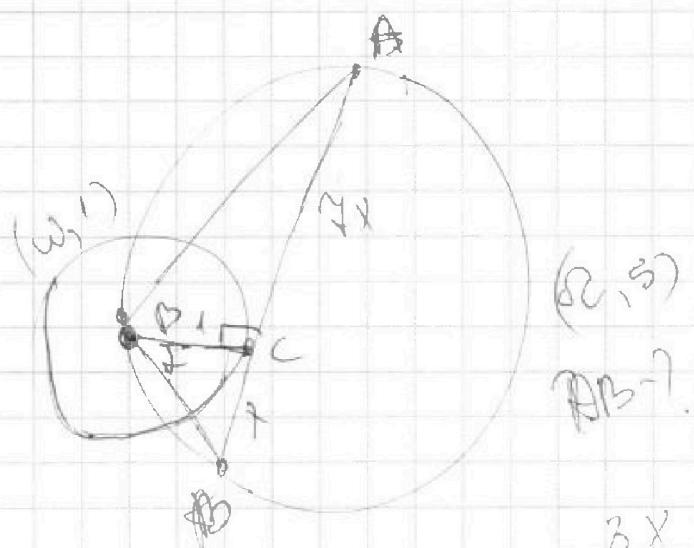


- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3.)



$$\tan \alpha = x \quad \frac{x}{\sin(\alpha + \beta)} = AB.$$

$$\tan \beta = y$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = x$$

$$\sin \alpha = x \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - (x^2 + 1) \cos^2 \alpha = 1$$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4)

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 - 2x - 1} = 2 - \sqrt{x}$$

$$\text{Отв: } 2x^2 - 5x + 3$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)(x-\frac{3}{2})$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)(x-\frac{3}{2})$$

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$$



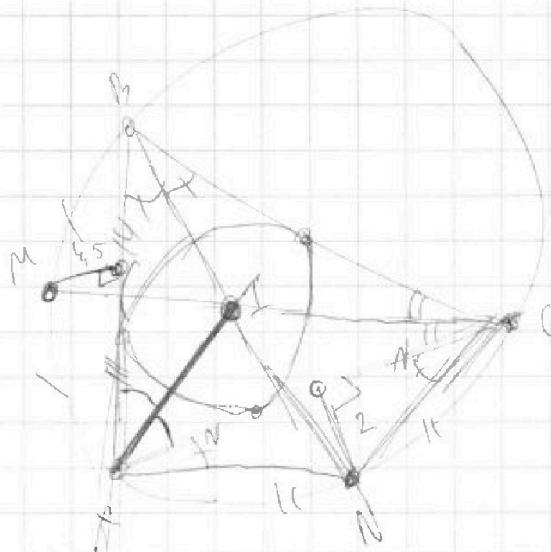
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Д: $\exists b$: ровно 2 решения.

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - y + 10b = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{array} \right.$$

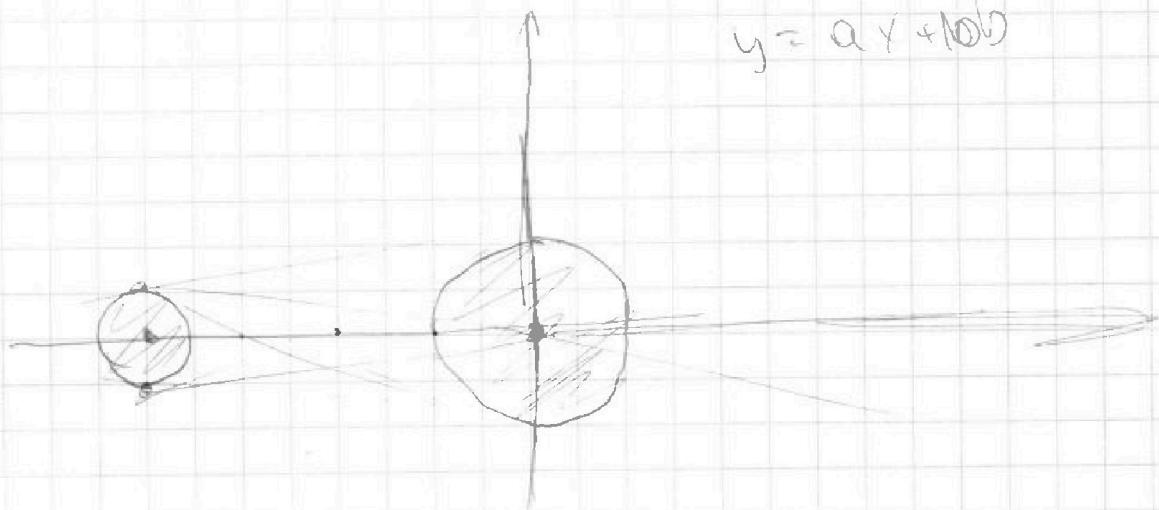
$$\left\{ \begin{array}{l} ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ((x+8)^2 + y^2 - 1) \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+6)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{array} \right.$$

$$y = ax + 10b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{b}{\sin 2\beta} = 2R$$
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{5}$$

$$\frac{c}{\sin 2\gamma} = 2R$$
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{9}{5}$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{2}{3}$$

$$3\sin x = 2\sin y$$

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 (1 - \cos^2 x) + \cos^2 y = 1$$

$$\frac{9}{4} - \frac{9}{4} \cos^2 x + \cos^2 y = 1$$

$$\cos^2 y = \cos^2 x - \cos^2 x = \frac{5}{4}$$

$$5 \cos^2 x - 4 \cos^2 y = 5$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \sqrt{\frac{9}{25}} \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma} = \sqrt{\frac{9}{25}}$$
$$\frac{x}{\sin \gamma} = \sqrt{\frac{9}{3}}$$

$$\frac{4}{\sin 2\beta + \operatorname{tg} \beta} = 2R = \frac{9}{\sin 2\gamma}$$
$$\frac{4}{2\sin^2 \beta} = \frac{9}{2\sin^2 \gamma}$$

$$\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma} = \frac{4}{9}$$
$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{2}{3}$$

0(0,0)

$$\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \gamma = \frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$1,5x = 2y$$

$$y = 1,5x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x - 1} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(4x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x - 1)} = 1$$

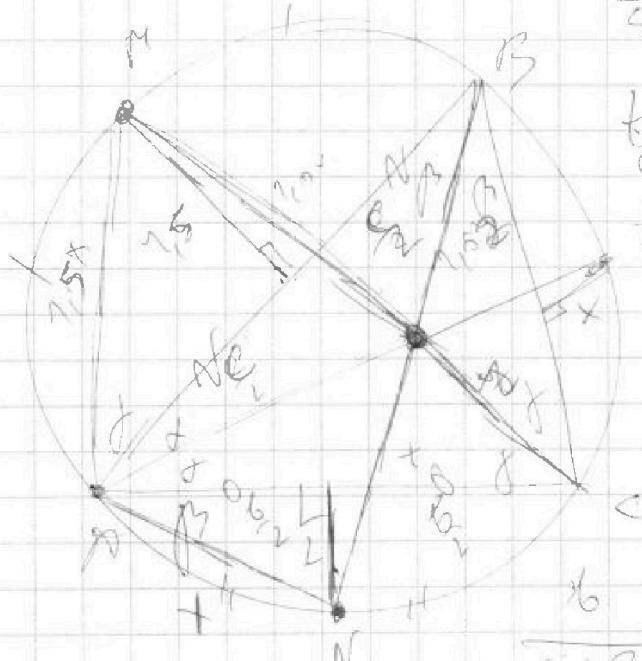
$$4x^2 - 3x + 4 = 4(x^2 - \frac{3}{4}x + 1) =$$

$$= 4((x - \frac{3}{8})^2 + 1 - (\frac{3}{8})^2)$$

$$\frac{9}{64}$$

если

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{7}{15}}$$



$$\tan \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\tan \beta = \frac{4}{6}$$

$$\frac{g \cos \beta}{\cos \alpha} = g \cos \beta = \frac{4 \cos \beta}{\cos \frac{4\sqrt{3}}{7}}$$

$$\frac{g \sin \beta}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\tan \beta = \frac{4}{6}$$

$$\frac{g \sin^2 \beta}{\cos \beta} = 4 \sin^2 \beta$$

$$= 2R$$

$$g \sin^2 \beta \cos \beta = 4 \sin^2 \beta \cos \beta$$

$$\frac{g \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{4 \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta}$$

$$\frac{g}{\sin^2 \beta + \tan^2 \beta} = 2R$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 МФТИ