МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Ответ: $2^{26}\cdot 7^{37}$

Оценка: Через $\partial_a(b)$ будем обозначать степень вхождения a в b.

1) $\partial_2(a)=x_1$, $\partial_7(a)=y_1$,
$\partial_2(b)=x_2$, $\partial_7(b)=y_2$
$\partial_2(c)=x_3$, $\partial_7(c)=y_3$

2) т.к. $ab \vdots 2^{14} \Rightarrow x_1+x_2\geq 14$

Аналогично: $\begin{cases} x_2+x_3\geq 17\\ x_3+x_1\geq 20\\ y_1+y_2\geq 10\\ y_2+y_3\geq 17\\ y_3+y_1\geq 37.\end{cases}$

3) Сложив первые 3 получим: $2(x_1+x_2+x_3)\geq 14+17+20=51$

$x_1+x_2+x_3\geq \frac{51}{2}$, но т.к. $x_1+x_2+x_3\in\mathbb{Z} \Rightarrow x_1+x_2+x_3\geq 26$.

4) Очевидно, что если $y_1+y_3\geq 37 \Rightarrow y_1+y_2+y_3\geq 37$.

5) $\partial_2(abc)=x_1+x_2+x_3\geq 26$
$\partial_7(abc)=y_1+y_2+y_3\geq 37$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow abc\geq \boxed{2^{26}\cdot 7^{37}}$ Пример: $\begin{cases} a=2^{8}\cdot 7^{15}\\ b=2^{6}\cdot 7^{0}\\ c=2^{12}\cdot 7^{22}\end{cases}$

Нетрудно убедиться, что пример удовлетворяет условию.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2) Ответ: 8

1) Пример: $a=1$, $b=7$ $\Rightarrow$ $a+b=8$, $b^2-6ab+a^2=2$ $\Rightarrow$ $a+b \vdots 8$, $a^2-6ab+b^2 \vdots 8$

2) Оценка: $\frac{a}{b}$ – несократима $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b)=1$, где $(x,y)=\text{НОД}(x,y)$.

3) Найти искомое max n – это

тоже самое, что найти $(a+b,\ a^2-6ab+b^2)=$

$=(a+b,\ (a+b)^2-8ab)=(a+b,\ 8ab)$ т.к. $(a+b)^2 \vdots (a+b)$

Но т.к. $(a,b)=1 \Rightarrow \begin{cases}(a+b,\ a)=1 \\ (a+b,\ b)=1\end{cases}$ т.к.

если $\begin{cases}(a+b) \vdots d \\ a \vdots d\end{cases} \Rightarrow b \vdots d$, но $(a,b)=1$ аналогично

уже b. $\Rightarrow (a+b,\ 8ab)=(a+b,\ 8) \Rightarrow$

$\Rightarrow |(a+b,\ a^2-6ab+b^2)| \le 8$.

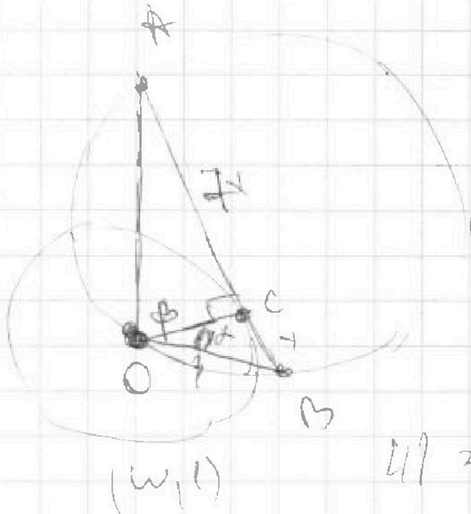
ч.т.д.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



1) Пусть центр ω — O.

$(\Omega, 5)$

2) Пусть $\begin{cases} \angle COA = \alpha \\ \angle COB = \beta \end{cases}$

3) т.к. AB — касательная $\Rightarrow$ $OC \perp AB$

4) 3) $\Rightarrow$ $tg\,\beta = \frac{7x}{OC} = \frac{7x}{1}$

$tg\,\alpha = \frac{x}{OC} = x$

5) $\triangle BOA$: $\frac{8x}{\sin(\alpha+\beta)} = 10$ (по Th синусов)

6) $\begin{cases} tg\,\alpha = x \\ tg\,\beta = 7x \\ 10\sin(\alpha+\beta) = 8x \end{cases}$

6.1) $tg\,\alpha = x = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\sin\alpha = x\cos\alpha$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$x^2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad \cos^2\alpha = \frac{1}{x^2+1}$

т.к. α и β углы в треуг $\Rightarrow$ $\alpha+\beta \in [0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta > 0$

$\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$ аналогично: $\boxed{\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}}$

$\boxed{\sin\beta = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}}}$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$

$\boxed{\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} + \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} =$

$= \frac{4}{5}x \quad \frac{8}{\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}} = \frac{4}{5} \quad (x^2+1)(49x^2+1) = 100$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(3) Продолжение!!!

$(x^2+1)(49x^2+1)=100 \quad t=x^2$

$(t+1)(49t+1)=100$

$49t^2+t+49t+1=100$

$49t^2+50t-99=0$

$D=2500+4\cdot 49\cdot 99=4(4851+625)=$

$=4\cdot 5476=4\cdot 4\cdot 1369$

$t=\dfrac{-50\pm 4\sqrt{1369}}{98}$ т.к. $t\geq 0$ $=\dfrac{4\sqrt{1369}-50}{98}=\dfrac{2\sqrt{1369}-25}{49}$

$x=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{1369}-25}}{7} \quad AB=8x=\dfrac{8\sqrt{2\sqrt{1369}-25}}{7}$

Ответ:

$5476=$
$=4\cdot(1250+100+19)$
$4\cdot 1369$
$37^2=900+49+180+...$

$99\cdot 49=$
$=4900-49=$
$=4851$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4)

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x.$$

ОДЗ: $2x^2-5x+3 \geq 0$

$2x^2+2x+1 \geq 0$ — всегда верно (из пункта 1): $2(x-1)(x-\frac{3}{2}) \geq 0$)

$x \in (-\infty;1] \cup [\frac{3}{2};+\infty)$

Домножим обе части на $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}$

Если $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1} \neq 0$

1) Если $\underset{\geq 0}{\sqrt{2x^2-5x+3}} + \underset{\geq 0}{\sqrt{2x^2+2x+1}} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3=0 \\ 2x^2+2x+1=0 \end{cases}$ 1.1) $2x^2-5x+3=0$ $\boxed{x=1}$ подбором и по Т.В. Виета $\boxed{x=\frac{3}{2}}$

1.2) $2x^2+2x+1=0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{4} \Rightarrow \text{нет корней} \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1} \neq 0 \ \forall x.$$

2) т.к. $\neq 0$ домножим:

$$(\sqrt{2x^2-5x+3})^2 - (\sqrt{2x^2+2x+1})^2 = (2-7x)$$

$$(2-7x) = (2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$$

2.1) $2-7x=0$ $\boxed{x=\frac{2}{7}}$ Удовлетворяет ОДЗ.

2.2) $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$

~~$2x^2+2x+1 = 2(x^2+x+\frac{1}{2}) = 2(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

④ Продолжение!!!

2) $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$

т.к. обе части ≥ 0 =>

$\Rightarrow (\sqrt{2x^2-5x+3})^2+(\sqrt{2x^2+2x+1})^2+$

$+2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=1$

$4x^2-3x+4+2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=1$

$4x^2-3x+4=4(x^2-\frac{3}{4}x+1)=$

$=4((x-\frac{3}{8})^2+1-(\frac{3}{8})^2)=$

$=4(x-\frac{3}{8})^2+4(1-(\frac{3}{8})^2)$

$\frac{3}{8}<\frac{1}{2}\Rightarrow(\frac{3}{8})^2<\frac{1}{2}\Rightarrow 1-(\frac{3}{8})^2>\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow 4(1-(\frac{3}{8})^2)>2\Rightarrow$

что больше 2 + что-то $\geq 0 = 1$

$x\in\{\varnothing\}$. =>

=> ответ: $\frac{2}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6.
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \le 0 \end{cases}$$

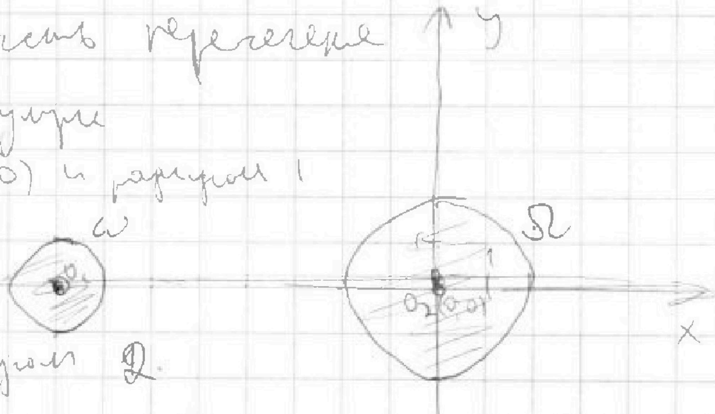
$((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \le 0$

$\Downarrow$

Пусть ω – окр с центром в $(-8,0)$ и радиусом 1, Ω – окр. с центром в $(0;0)$ и радиусом 2.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2+y^2-1 \le 0 \\ x^2+y^2-4 \ge 0 \end{cases} \quad 1) \\ \begin{cases} (x+8)^2+y^2-1 \ge 0 \\ x^2+y^2-4 \le 0 \end{cases} \quad 2) \end{array}\right.$$

1) – область пересечения частей плоскости внутри окр. с центром в $(-8,0)$ и радиусом 1 и снаружи окр. с центром в $(0;0)$ и радиусом 2.



Это просто область внутри ω.

Аналогично 2) – это область внутри Ω

$\Downarrow$

ГМТ удовлетворяющих второму неравенству – это область внутри ω и Ω.

$ax - y + 10b$ – прямая. Если прямая пересекает хотя бы одну окружность в двух точках – то будет бесконечно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

одного решения, т.к. будут решением все точки на хорде вырезанной прямой на окружности $\Rightarrow$ $ax-y+10b=0$ должна ~~либо~~ для каждой из двух окр. либо касаться либо не иметь общих точек. Значит с каждой окр. не более одного решения $\Rightarrow$ всего не более 2, а чтобы было ровно 2 прямая должна касаться их обеих $\Rightarrow$ $ax-y+10b=0$ - одна из четырёх общих касательных двух окружностей.

Таким образом задача сведётся к тому, чтобы найти коэффициенты при x для этих касательных.

1) Пусть центры ω и Ω O_1 и O_2 соответственно.

2) Найдём 2 центра гомотетии переводящий меньшую окружность в большую.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3) Продолжение!!!

Эти два центра лежат на прямой O_1O_2 и эти точках, что если O — центр гомотетии, то $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{1}{2}$ (отношение радиусов)

~~Пусть~~ $OO_1 =$ ~~Oy~~ => ось y =>

=> $O($~~x~~$,0)$: ~~$\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{1}{2}$.~~

~~$O_1(-8,0)$~~

~~$O_2(0,0)$ => $2(x-8)^2 = x^2$~~

~~$2x^2+32x+128=x^2$~~

~~$x^2+32x+128=0$~~

Подберём $O(-16,0)$, ~~$O(-8,0)$~~, $O(-\frac{16}{3},0)$

Проверка: $\frac{-16-(-8)}{-16-0} = \frac{1}{2}$.

$\frac{-8-(-\frac{16}{3})}{-\frac{16}{3}-0} = \frac{\frac{16}{3}-8}{-\frac{16}{3}} = \frac{\frac{16-24}{3}}{-\frac{16}{3}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

Значит $(-16;0)$, $(-\frac{16}{3};0)$ — центры гомотетий переводящих меньшую окр в большую => у искомых касательных — это касательные из $(-16,0)$ и $(-\frac{16}{3};0)$ дол-стим к Ω_2, т.к. это центры гомотетии, те кас. к одной - кас. к другой.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(6) Продолжение!!!

Тогда проведем из $(-16,0)$ и $\left(-\frac{16}{3},0\right)$ касательные к Ω

1) Пусть кас. – $y=kx+b$. $(-16,0)\in y=kx+b$

$\boxed{b-16k=0}$

Точки пересечения Ω и $y=kx+b$.

$\begin{cases} y=kx+b \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ $x^2+(kx+b)^2=4$

$x^2+k^2x^2+2kbx+b^2-4=0$

$x^2(k^2+1)+x\cdot 2kb+b^2-4=0$

Т.к. это кас => $D=0=(2kb)^2-4(k^2+1)(b^2-4)$

$\begin{cases} b=16k \\ 4k^2b^2-4(k^2b^2-4k^2+b^2-4)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} b=16k \\ 4k^2b^2-4k^2b^2+16k^2-4b^2+16=0 \end{cases}$

$16k^2-4(16k)^2+16=0$

$4k^2-(16k)^2+4=0$

$k^2-16\cdot 4k^2+1=0$ $k^2=\frac{1}{63}$ $\boxed{k=\pm\frac{1}{\sqrt{63}}}$

2) $\left(-\frac{16}{3},0\right)\in y=kx+b$ $\boxed{b=\frac{16}{3}k}$

Аналогично $16k^2-4b^2+16=0$ $4k^2-b^2+4=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6. Дополнение!!!

$$\begin{cases} 4k^2 - b^2 + 4 = 0 \\ b = \frac{16}{3}k \end{cases}$$

$$4k^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2 k^2 + 4 = 0$$

$$k^2 - \frac{16\cdot 4}{3}k^2 + 1 = 0$$

$$3k^2 - 64k^2 + 3 = 0$$

$$61k^2 = 3 \quad k^2 = \frac{3}{61} \quad k = \pm\sqrt{\frac{3}{61}}$$

Но если мы поменяем коэффициенты при обоих неизвестных, то есть его поменяем (которые нам подойдут. т.к. в начале порядок в взяли b в уравнении неизвестных.)

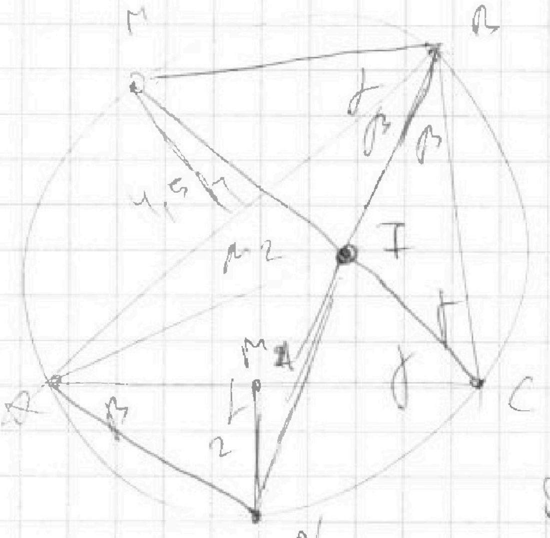
Ответ: $a = \pm\frac{1}{\sqrt{63}}, \pm\sqrt{\frac{3}{61}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(7.)



1) Пусть $\angle C = 2\gamma$, $\angle B = 2\beta$.

2) Т.к. M и N — середины соотв. дуг => CM и BN — биссектрисы.

3) $BN \cap CM = I$, AI — ?

4) Пусть перпендикуляр с N на AC — M_1, а с M на AB — M_2

5) M_1 и M_2 — середины AC и AB соотв. т.к. они середины дуг.

6) $\angle MBA = \angle MCA = \gamma$ (впис.), аналогично $\angle CAN = \beta$.

7) $tg\,\beta$ в $\triangle AM_1N$: $tg\,\beta = \frac{NM_1}{AM_1} = \frac{2NM_1}{AC}$

Аналогично $tg\,\gamma = \frac{2MM_2}{AB}$

8) По т. синусов $\frac{AC}{\sin 2\beta} = \frac{AB}{\sin 2\gamma} =$

$= \frac{2NM_1}{tg\,\beta \cdot \sin 2\beta} = \frac{2MM_2}{tg\,\gamma \cdot \sin 2\gamma} = \frac{2NM_1}{2\sin^2\beta} = \frac{2MM_2}{2\sin^2\gamma}$

$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \sqrt{\frac{NM_1}{MM_2}} = \frac{2}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $a, b, c \in \mathbb{N}$: $ab \vdots 2^{14} \cdot 7^{10}$
$bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{17}$
$ac \vdots 2^{20} \cdot 7^{37}$

$\min abc$?

$ab - (14, 10)$ abc? $(20, 37)$
$bc - (17, 17)$
$ac - (20, 37)$

$a(x_1, x_2)$
$b(x_3, x_4)$
$c(x_5, x_6)$

$\nu_2(a) = x_1$
$\nu_2(b) = x_2$
$\nu_2(c) = x_3$

$x_1 + x_2 \geq 14$
$x_2 + x_3 \geq 17$
$x_3 + x_1 \geq 20$
$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 51$
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$

$x_1 + x_3 + x_5 = 10$
$x_2 + x_4 + x_6 = 37$
$x_1 + x_3 = 14 \Rightarrow \boxed{x_5 = 6}$
$x_3 + x_6 = 17 \Rightarrow \boxed{x_3 = 11}$
$x_1 + x_5 = 20$
$x_2 = 14$

$\nu_7(a) = y_1$
$\nu_7(b) = y_2$
$\nu_7(c) = y_3$

$y_1 + y_2 \geq 10$
$y_2 + y_3 \geq 17$
$y_3 + y_1 \geq 37$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 32$

$x_1 + x_2 + x_3 = 26$

$x_1 + x_2 + x_3 = 32$

$x_1 + x_2 \geq 14$
$x_3 \leq 12$

$\boxed{x_3 = 12}$

$x_1 + x_2 = 14$

$x_1 = 8$
$x_2 = 5$

$x_1 = 8$
$x_2 = 6$
$x_3 = 12$

$x_3 = 18$
$x_1 = 2$
$x_2 = 15$

$y_1 = 15$
$y_2 = 0$
$y_3 = 22$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 38$

$y_1 + y_2 = 10$
$y_2 + y_3 = 17$
$y_3 + y_1 = 37$

$y_1 \geq$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(a, b) = 1$, $a, b \in \mathbb{N}$

$(?)\ (a+b,\ a^2 - 6ab + b^2)$

$(a+b,\ (a+b)^2 - 8ab) =$

$= (a+b,\ -8ab)$

$\cancel{\dfrac{8}{1 - 42 + 49}} =$

$a = 1$
$b = 7$

$\dfrac{8}{1 - 42 + 49} = \dfrac{8}{8} = 1$

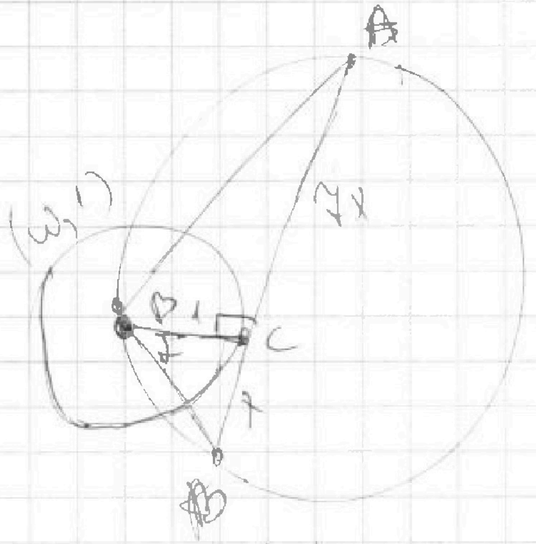
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(3)



$AB - ?$

$\operatorname{tg}\alpha = x$

$\operatorname{tg}\beta = 7x$

$\frac{8x}{\sin(\alpha+\beta)} = AB$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = x$

$\sin\alpha = x\cos\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (x^2+1)\cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

ОДЗ: $2x^2-5x$

$2x^2-5x+3=2(x-1)(x-\frac{3}{2})$

$2x^2+2x+1=$ [illegible]

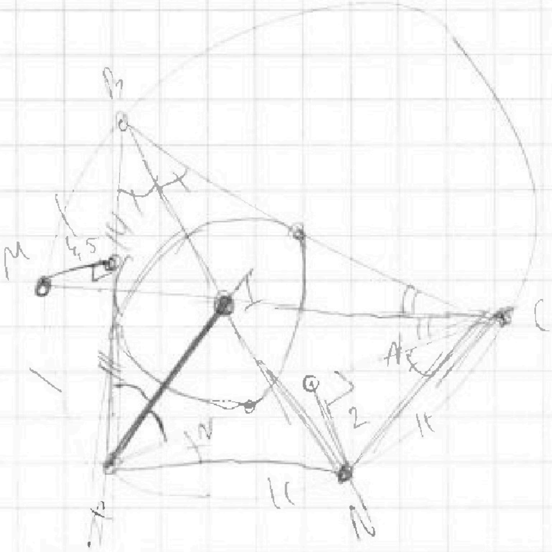
$x^2 = x^2 - x^2$ [illegible]

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



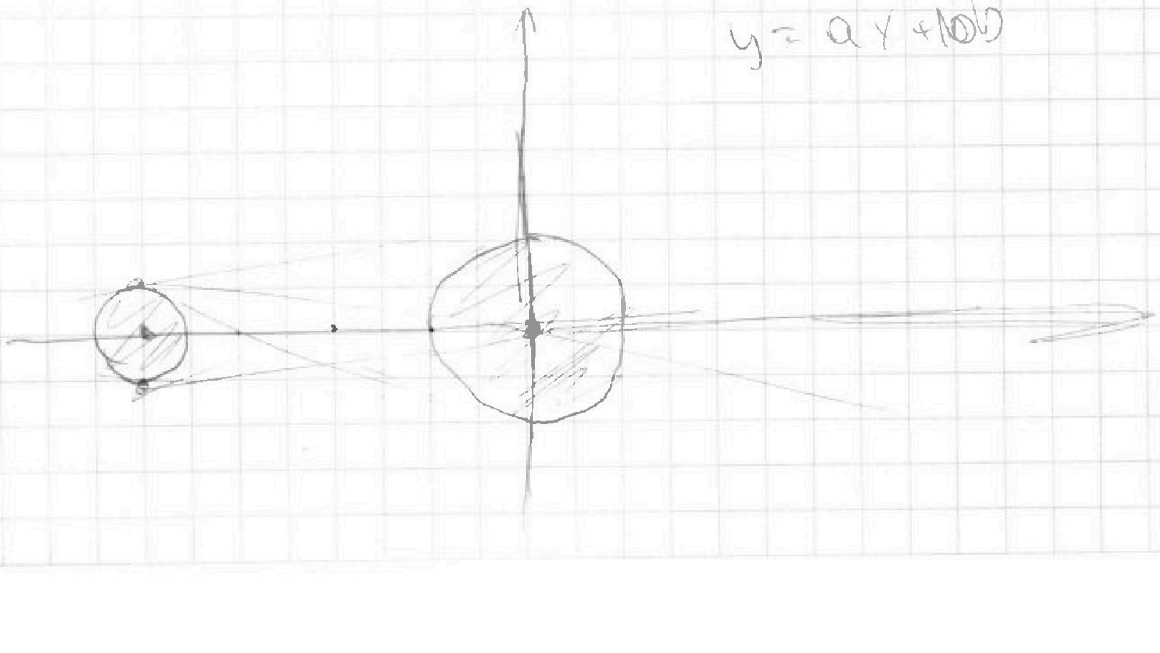
a : $\exists b$: ровно 2 решения.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ \left((x+8)^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 4\right) \le 0 \end{cases}$$

$$\left((x+8)^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 4\right) \le 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \ge 0 \\ (x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \le 0 \\ (x^2 + y^2 - 4) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$y = ax + 10b$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{b}{\sin 2\beta} = 2R$

$tg\,\beta = \frac{4}{b}$

$\frac{c}{\sin 2\gamma} = 2R$

$tg\,\gamma = \frac{9}{c}$

$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{2}{3}$

$\frac{4}{\sin 2\beta\, tg\beta} = 2R = \frac{9}{\sin 2\gamma\, tg\gamma}$

$\frac{4}{2\sin^2\alpha} = \frac{9}{2\sin^2\gamma}$

$\cancel{4\sin^2\gamma}$

$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = \frac{4}{9}$

$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2}{3}$

$O(0,0)$

$3\sin x = 2\sin y$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \sin^2 x + \cos^2 y = 1$

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 (1 - \cos^2 x) + \cos^2 y = 1$

$\frac{9}{4} - \frac{9}{4}\cos^2 x + \cos^2 y = 1$

$\cancel{2\cos^2 y}\ \frac{9}{4}\cos^2 x - \cos^2 y = \frac{5}{4}$

$9\cos^2 x - 4\cos^2 y = 5$

$\sin\beta = \frac{2}{x}$

$\sin\gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{x} = \frac{3}{x} =$

$= \frac{4{,}5}{y}$

$4{,}5x = 2y$

$y = 1{,}5x$

$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \sqrt{\frac{4}{9}}$ $\quad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{4}{2x}}$ $\quad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{9}{2x}}$

$\frac{x}{\sin\alpha} = ?$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x-1}=1$

$4x^2-3x+4+2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x-1)}=1$

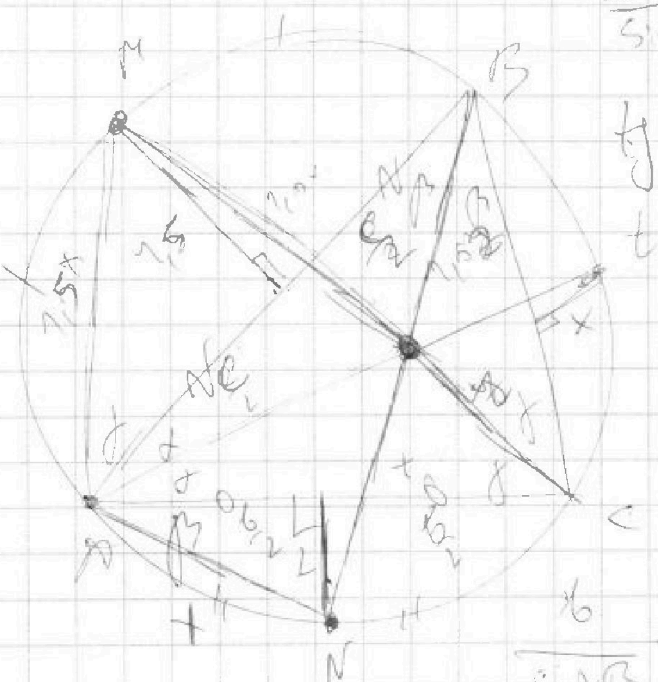
$4x^2-3x+4=4\left(x^2-\frac{3}{4}x+1\right)=$

$=4\left(\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+1-\left(\frac{3}{8}\right)^2\right.$

$\frac{9}{64}$

$9\cos\gamma-9$

$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\sqrt{\frac{2}{4.5}}$



$tg\,\gamma=\frac{4.5\cdot 9}{6}$

$tg\,\beta=\frac{4}{6}$

$\frac{9}{\cos\beta}-9\cos\beta=\frac{4\cos\gamma}{\cos\gamma}-4\cos\gamma$

$\frac{6}{\sin\beta}=2R$

$tg\,\beta=\frac{4}{6}$

$\frac{4}{\sin\beta\, tg\beta}=2R$

$\frac{9}{\sin\gamma\cdot tg\gamma}=2R$

$9\sin\gamma\, tg\beta$

$9\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}=4\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma}$

$9\sin^2\beta\cos\gamma=4\sin^2\gamma\cdot\cos\beta$

$\frac{9-9\cos^2\beta}{\cos\beta}=\frac{4-4\cos^2\gamma}{\cos\gamma}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!