МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2^{14}7^{10} < 2^{17}7^{17} < \cancel{20}\, 2^{20}7^{37}$

Так как $ac \vdots 2^{20}7^{37}$, то abc не меньше $2^{20}7^{37}$

Если $ab \vdots 2^{14}7^{10}$, $bc \vdots 2^{17}7^{17}$, то $ab^2c \vdots 2^{31}7^{27}$

$ab^2c \vdots 2^{31}$

пусть x_a – степень двойки у числа a, x_b – степень двойки у числа b, x_c – степень двойки у числа c.

Тогда $x_a + 2x_b + x_c \geqslant 31$.

Для наименьшего возможного значения произведения $x_a + 2x_b + x_c = 31$.

Нужно подобрать такие x_a, x_b и x_c так, что $x_a + x_b + x_c$ – минимально.

При этом, так как $ac \vdots 2^{20}$, то $x_a + x_c \geqslant 20$

Рассмотрю следующие варианты. $x_a + x_c$ должно быть нечётным, иначе $x_a + 2x_b + x_c$ – сумма двух чётных чисел, а 31 – нечётное число

$x_a + x_c$	x_b	$x_a + x_b + x_c$
21	5	26
23	4	27
25	3	28
27	2	29
29	1	30
31	0	31

Можно заметить, что минимальная сумма $x_a + x_b + x_c = 26$

Тогда abc не меньше $2^{26}7^{37}$

Приведу пример на $abc = 2^{26}7^{37}$

$a = 2^9 \cdot 7^{20}$
$b = 2^5$
$c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

Ответ: $2^{26}7^{37}$

То, что $\frac{a}{b}$ несократима, означает то, что у a и b нет общих множителей.

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ Пусть можно сократить дробь на x. Тогда $(a+b) \vdots x$; $(a+b)^2-8ab \vdots x$

Так как $(a+b) \vdots x$, то и $(a+b)^2 \vdots x$, тогда $8ab \vdots x$

Пусть в x есть какой-то простой множитель p.

Тогда $(a+b) \vdots p$, $8ab \vdots p$. Есть 3 варианта:

либо $a \vdots p$, либо $b \vdots p$, либо $8 \vdots p$

Первые 2 случая не подходят, так как если $(a+b) \vdots p$, то при $a \vdots p$ $b \vdots p$, а при $b \vdots p$ также $a \vdots p$. Получается, что a и b имеют общий множитель, противоречие.

Следовательно, $8 \vdots p$. Единственное простое число, на которое делится число 8 — это 2. $\Rightarrow p=2$.

Тогда x — это степень двойки ~~x=~~ $x=2^n$, $8ab \vdots 2^n$

Понятно, что ни a, ни b не делится на 2 (доказано ранее), тогда у 8ab максимальная степень двойки 2^3. Значит, максимальное число $x=2^3=8$

Пример: $a=3$, $b=5$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{3+5}{3^2-6\cdot3\cdot5+5^2} = \frac{8}{9-90+25} = \frac{8}{34-90} = \frac{8}{-56}$$

$\frac{8}{-56}$ можно сократить на 8 , $\frac{8}{-56} = \frac{1}{-7}$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

Пусть $y=\sqrt{2x^2-5x+3}$, $t=\sqrt{2x^2+2x+1}$

Тогда $y^2-t^2=2x^2-5x+3-2x^2-2x-1=2-7x$

Тогда $y-t=y^2-t^2$

$y-t=(y-t)(y+t)$

Есть 2 варианта

(1) $y-t=0$

(2) $\begin{cases} y-t\neq 0 \\ y+t=1 \end{cases}$

вариант (1)

$y=t$

$\sqrt{2x^2-5x+3}=\sqrt{2x^2+2x+1}$

возведу обе части в квадрат

$\begin{cases} 2x^2-5x+3=2x^2+2x+1 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 7x=2 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$

$x=\frac{2}{7}$

Если подставить $x=\frac{2}{7}$ в $2x^2+5x+3$ и $2x^2+2x+1$, получатся выражения >0, корень подходит

вариант (2)

$y+t=1$

$y=1-t$

$\sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}$

возведу обе части в квадрат

$\begin{cases} \cancel{2x^2}-5x+3=1-2\sqrt{2x^2+2x+1}+\cancel{2x^2}+2x+1 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\sqrt{2x^2+2x+1}=7x-1 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$

снова возведу обе части в квадрат

$\begin{cases} 4(2x^2+2x+1)=49x^2-14x+1 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 8x^2+8x+4=49x^2-14x+1 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$

$41x^2-22x-3=0$

$\cancel{2x^2-5x}$

$D=22^2-4\cdot 41\cdot 3=484-492$

$D<0$, корней нет.

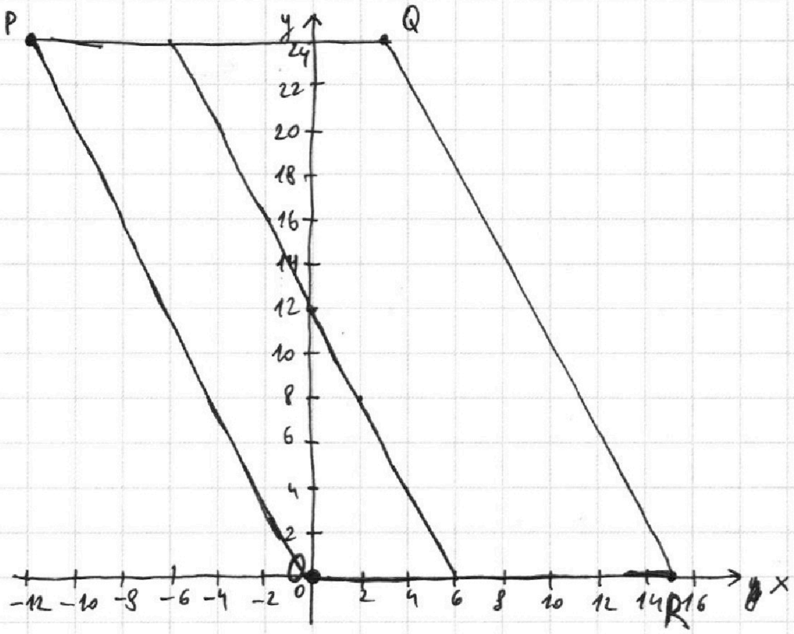
Ответ: $x=\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть мы зафиксировали точку A. Тогда из уравнения:

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$

можно выразить y_2 через x_2.

$y_2=-2x_2+12+(2x_1+y_1)$

Если x_1 и y_1 уже известны, то $2x_1+y_1 = \mathrm{const}$.

Тогда для любых координат точки A точки B лежат на прямой с коэффициентом -2 и сдвигом на $12+(2x_1+y_1)$.

Такая прямая для $A(0;0)$ представлена на графике.

Пусть прямая RQ и прямая PO описаны функцией $y=kx+b$. Найду k, для этого подставлю координаты точек Q и R

$\begin{cases}24=3k+b\\0=15k+b\end{cases}$ вычту из 1 уравнения второе.

$24=-12k$

$k=-2$. Получается, что у прямой для точек B и прямых PO и RQ одинаковый коэффициент.

Тогда если точку A перемещать ~~по~~ из точки $(0;0)$ по отрезку PO, то количество точек B для этой точки не изменится, так как эти 2 прямые параллельны. Значит, можно выбирать множество точек A, лежащих на одном отрезке ~~прямой~~, параллельном PO, и для них ~~однозначно~~ находить одно и то же множество точек B, лежащих на ~~одной прямой~~ одном отрезке, параллельным PO. Всего на отрезке PO 25 ~~13~~ точек с целочисленными координатами, значит, столько точек будет на любом отрезке, параллельном PO и равном ему. Выбрать прямую для точек A — ~~11 вариантов (если $x_1>10$)~~, то 10 вариантов (если $x_1>9$, то прямая для точек B лежит за пределами параллелограмма)

Получается, итоговый ответ — это сколько вариантов выбрать отрезок для точек A умножить на количество точек A на отрезке умножить на количество точек B на соответствующем отрезке

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение задачи 5

Тогда общее количество вариантов — это $10 \cdot 25 \cdot 25 = 6250$

Ответ: 6250

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

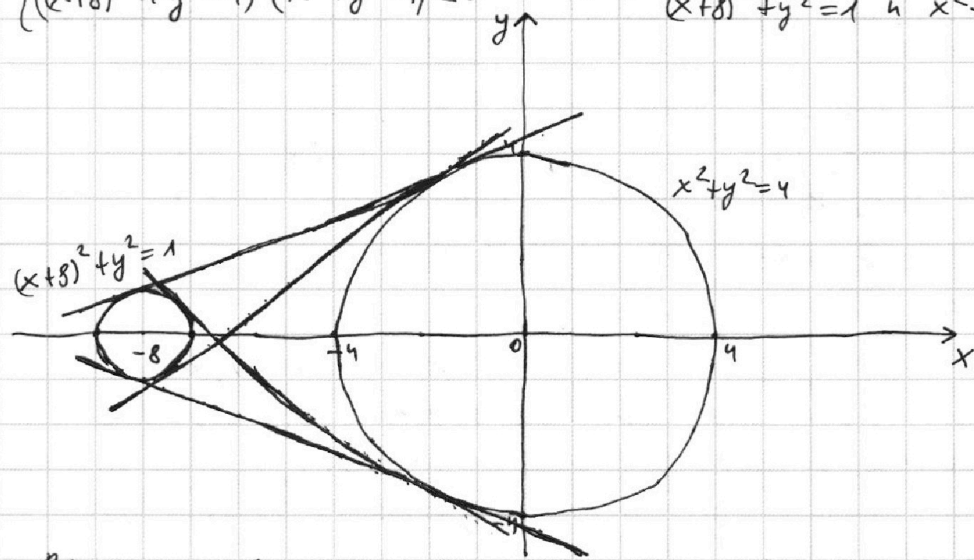
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \le 0 \end{cases}$$

Изображу графики ~~функций~~ уравнений $(x+8)^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$



Выражение ≤ 0 если либо $((x+8)^2+y^2-1) \le 0$ и $(x^2+y^2-4) \ge 0$, либо $((x+8)^2+y^2-1) \ge 0$ и $x^2+y^2-4 \le 0$

В первом случае на графике $((x+8)^2+y^2-1) \le 0$ — область внутри маленького круга, $(x^2+y^2-4) \ge 0$ — область вне большого круга. Пересечение этих областей — область внутри маленького круга вместе с границами.

Во втором случае на графике $((x+8)^2+y^2-1) \ge 0$ — область вне маленького круга, $(x^2+y^2-4) \le 0$ — область внутри большого круга. Пересечение этих областей — область внутри большого круга вместе с границами.

Уравнение $y = ax + 10b$ имеет график прямой. Чтобы система имела ровно 2 решения, прямая не должна проходить через окружности (все точки внутри окружностей удовлетворяют неравенству. Значит, прямая должна касаться двух окружностей, в таком случае будет ровно 2 решения.

Нужно подобрать a, то есть угол наклона прямой.

Максимальный и минимальный углы наклона представлены на графике.

Всего есть 4 варианта, как прямая может касаться двух окружностей $\Rightarrow$ 4 решения

Для касательных, которые проходят сверху и снизу для точек касания: $x_1 + x_2 = 8$ (8 - расстояние между ~~координатами~~ ~~центрами~~ центрами окружностей)

~~$y_1+y_2=$~~

$y_1 - y_2 = 3$ (3 - разница радиусов окружностей)

Задача 6 (продолжение)

Тогда $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 8 - x_1 \\ 1 - (x_1+8)^2 - (4 - x_2^2) = 3 \end{cases}$

$1 - x_1^2 - 16x_1 - 64 - 16 + 8x_2 - x_2^2 = 3$

$x_1^2 + x_2^2 + 16x_1 - 8x_2 = -82$

$x_1^2 + (8 - x_1)^2 + 16x_1 + 8x_1 - 64 = -82$

$x_1^2 + \cancel{64} - \cancel{16x_1} + x_1^2 + \cancel{16x_1} + 8x_1 - \cancel{64} = -82$

$2x_1^2 + 8x_1 + 82 = 0 \quad |:2$

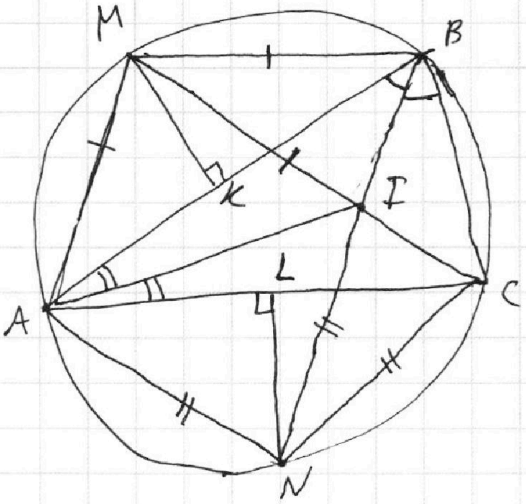
$x_1^2 + 4x_1 + 41 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Пусть I – центр вписанной окружности.
Отрезки, стягивающие равные дуги, равны
$\Rightarrow AM = MB$, $AN = NC$.
По лемме о трезубце
$AM = MB = MI$
$AN = NI = NC$

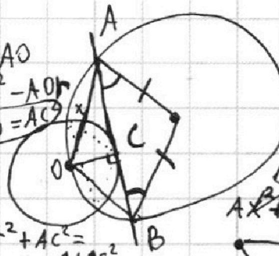
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$AC^2 =$
$(AO-r)AO$
$AC^2 = AO^2 - AOr$
$AO^2 - AO = AC^2$



$AC : CB = 7$

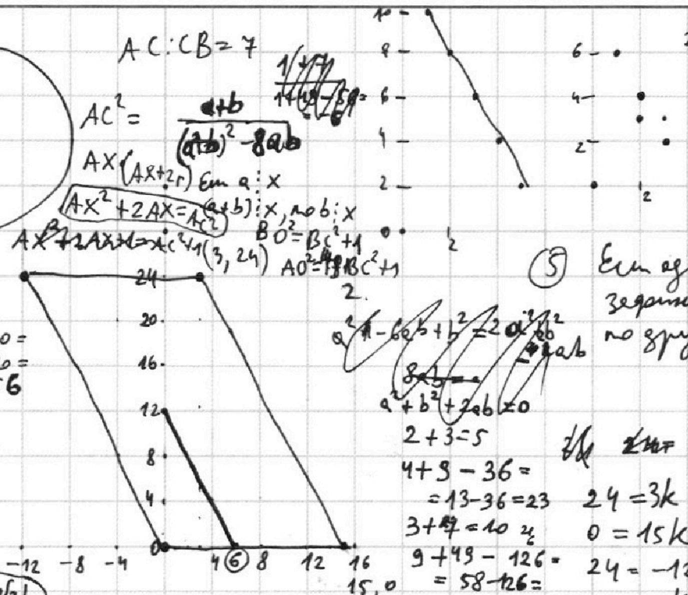
$AC^2 = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$

$AX(AX+2r)$ Em $a : x$

$AX^2 + 2AX = AC^2$ $(a+b) : x$, no $b : x$

$BO^2 = BC^2 + 1$

$AO^2 = BC^2 + 1$



$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

13:00
URGENT

$y_2 = -2x_2 + 12$

$+(y_1 + 2x_1)$ const

$AO^2 = r^2 + AC^2 = 1 + AC^2$

$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$

$5+3=8$
$25+9-90 = 34-90 = -56$

$D = 4(3a-1)(3a+1)$

$a^2 - (6b)a + b^2$
$D = 36b^2 - 4b^2$
$D = 32b^2 = 16 \cdot 2b^2$

$a_1 = \frac{6b + 4b\sqrt{2}}{2} = 3b + 2\sqrt{2}b$

$a_2 = \frac{6b - 4b\sqrt{2}}{2} = 3b - 2\sqrt{2}b$

$a^2 - 6ab + b^2 = (a - (3+2\sqrt{2})b)(a - (3b - 2\sqrt{2})b)$

Если a — нечёт и b — нечёт, то $a+b$ — чёт,
$a^2 - 6ab + b^2$ — чёт — ~~нераскладываем~~ $\Rightarrow$ $\vdots 2$

(5) Если одна точка зафиксирована, по другой — перечислять

$a^2 + b^2 + 2ab \neq 0$

$2+3=5$
$4+9-36 = 13-36 = 23$
$3+7 = 10$
$9+49-126 = 58-126 = -68$

$24 = 3k + b$
$0 = 15k + b$
$24 = -12k$
$k = -2$ $\quad b = 30$

$25 \times 25 = 125, 50$

15, 0

$5 \cdot AC + 5 \cdot BC = (AC + BC) \cdot$

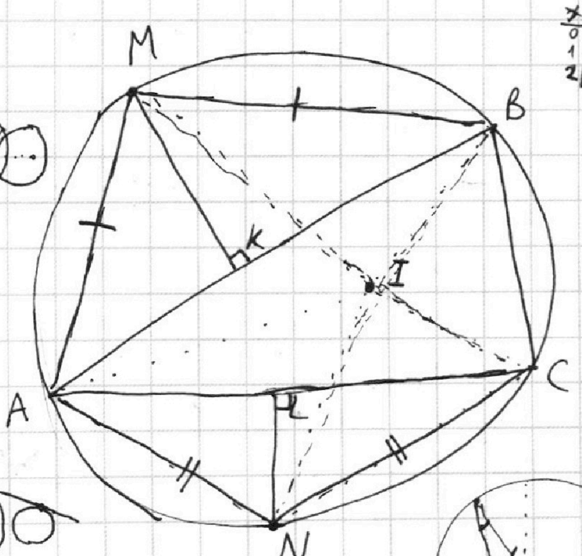
одинаковые углы наклона!

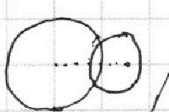
$15 - 5 = 10$ — кол-во иксов всего
12 — кол-во x-ов всего
$12 \cdot 10 = 120$ $\quad$ 12:10 оградить

x	x^2
0	0
1	1
2	1

18

12
15
6 $\quad$ 33





найти расстояние от A до центра окружности вписанной в $\triangle ABC$
расстояние от M — 4,5
от N — 2

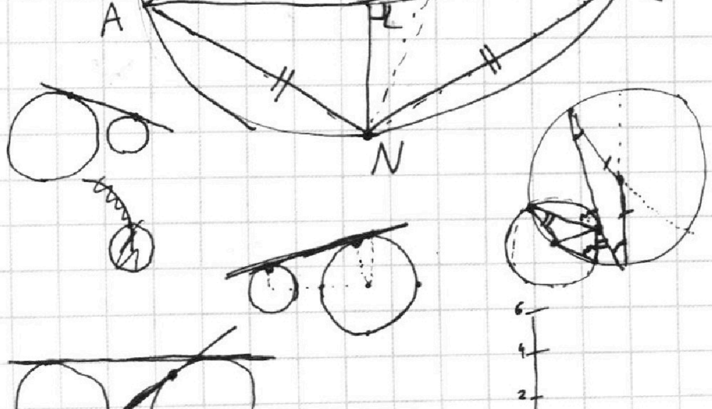
$MK = 4,5$

$NL = 2$

Найти AI
лемма о трезубце

~~$\frac{AB \cdot MK}{2} = \frac{1}{2} AM \cdot AB \cdot \sin\angle MAK$~~

~~$\frac{AB \cdot MK}{2} + \frac{AB \cdot r}{2} = \frac{1}{2} AM \cdot AL \cdot \sin(\angle MAK +$~~



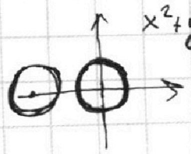
$x^2 + y^2 - 4$ $\quad$ $y = ax + 10b$

$x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1$

(1) < (2)
$16x + 67$ вариантов

(2) > (1)
$-16x - 67$ вариантов

$x^2 + y^2 = 4$ $\quad$ $(x+8)^2 + y^2 = 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. $ab : 2^{14} 7^{10}$ $\quad 2^{14}7^{10} < 2^{17}7^{17} < 2^{20}7^{37}$ $\quad$ 10:50! $\quad$ 11:20 $\quad$ 12:00

$bc : 2^{17} 7^{17}$ $\quad$ ~~abc~~ $2^{20}7^{37}$

abc не меньше $\quad ab^2c : 2^{31}7^{27}$

$ac : 2^{20} 7^{37}$ $\quad ac : 2^{20}$ $\quad 2^{31} = 2^x \cdot 2^{2y}$

1 ✓

2 $\quad$ 2. $\dfrac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \dfrac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \dfrac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ $\quad x+2y=31$

3 $\quad 2x+y$ - min

4 ✓ $\quad$ 21 5 $\quad$ 25 3

23 4 min

~~19 6~~

5 $\quad a:b$ д и b взаимно просты.

6 $\quad$ пример:

$a = 2^{19} \cdot 7^{20}$

7 $\quad$ ~~m~~ $a+b$

$m \le \min(a+b,\ a^2-6ab+b^2)$ $\quad b = 2^5$

$8ab : a+b$? $\quad c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

4. $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$ $\quad$ | в квадрат

$x_1+x_2 = \frac{5}{2}$ $\quad x_1+x_2=-1$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2}$ $\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$ $\quad 2x^2-5x+3 + 2x^2+2x+1$

$x_1 = 1;\ x_2 = \frac{3}{2}$ $\quad D = 4-8 < 0$ $\quad -2\sqrt{2x^2-5x+3}\sqrt{2x^2+2x+1} = 4+49x^2 - 24x$

$2(x-1)(x-\frac{3}{2})$ $\quad$ ~~$2x^2+2$~~ $\quad 2x(x+1)+1$

$4x^2-3x+4 - \ldots\ldots = 4+49x^2-24x$

$2x^2-2x$ ~~+1~~

$-3x+3$ $\quad -2\ldots\ldots = 45x^2-21x$ $\quad$ | в квадрат

$(x-1)(2x-3)$

$4(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1) = 45^2x^4 + 21^2x^2 - 45\cdot2\cdot21x^3$

+ $\quad$ − $\quad$ +

1 $\quad \frac{3}{2}$ $\quad |x=1,\ \sqrt{2-5+3} - \sqrt{2+2+1} \ne 2-7$

~~x=0~~

$(2x^2-5x+3) - (2x^2+2x+1) = 2-7x$

$x_1 = \sqrt{2x^2-5x+3}$

$y_1 = \sqrt{2x^2+2x+1}$ $\quad x_1 - y_1 = x_1^2 - y_1^2$

$-5x+3 = 1 - \bullet$ $\quad x_1-y_1 = (x_1-y_1)(x_1+y_1)$

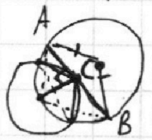
$+2x+1$ $\quad x6\ -\frac{1}{2}$

$-7x+3 = 2-\bullet$ $\quad$ 1) $x_1-y_1=0$ $\quad AC:CB=7$

2) $x_1+y_1=1$ $\quad R(\omega)=1$

$-7x+1 = -\bullet$ $\quad R(\Omega)=5$

$\bullet = 7x-1$ $\quad$ 1) $2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1$ $\quad AB$-?



$7x = 2;\ x = \frac{2}{7}$

$\times\ 22$
22
44
$+\ 44$
484

2) $x_1+y_1=1$

$2x^2-5x+3 = 1+(2x^2+2x+1) - 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$-5x+3 = 2+2x$

$\times\ 12$
41
$+\ 12$
48
492

~~3x-1~~ $\quad 7x-1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$49x^2+1-14x = 4(2x^2+2x+1)$

6. $\quad y = ax+10b$

$49x^2+1-14x = 8x^2+8x+4$

$41x^2-22x-3=0$

$x_1+x_2 = \frac{22}{41}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{-3}{41}$