



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



$$\begin{cases} ab : 2^{14} 7^{10} \text{ abc min?} \\ bc : 2^{17} 7^{17} \\ ac : 2^{20} 7^{37} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 2^{14} 7^{10} \cdot x \\ bc = 2^{17} 7^{17} \cdot y \\ ac = 2^{20} 7^{37} \cdot z \end{cases}$$



$$b = \frac{\sqrt{2^{14} 7^{10}}}{7^5 \sqrt{2}}$$

$$(\sqrt{49x^2+1}-1)(\sqrt{49x^2+1}+1) = 49x^2$$

$$\sqrt{19404} = 2\sqrt{4851} = 2\sqrt{3 \cdot 1617} = 6\sqrt{539} = 6\sqrt{7 \cdot 77} = 6 \cdot 7 \sqrt{11}$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

$$21\sqrt{11} - 25$$

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь $\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a^2 + 2ab}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 8ab}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 2(a-b)^2} = \frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$\begin{aligned} D &= 36b^2 - 4b^2 = 32b^2 \\ a &= \frac{6 \pm 4\sqrt{2}b}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}b \\ \frac{(a-b)^2}{a+b} &= \frac{(2 \pm 2\sqrt{2}b)^2}{a+b} = \frac{4(1 \pm 2\sqrt{2}b + 2b^2)}{a+b} = a+b + \frac{8(1 \pm 2\sqrt{2}b + 2b^2)}{a+b} \end{aligned}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

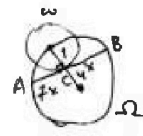
$$\sqrt{2500 + 4 \cdot 99 \cdot 49}$$

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 4 и 5 соответственно.

$$\begin{aligned} 49x^2 + 1 &= 50 - 50 \cos 2\alpha = 50 - 50(1 - 2 \cos^2 \alpha) = 50 - 50 + 100 \cos^2 \alpha = 100 \cos^2 \alpha \\ 49x^2 + 1 &= 50 - 50(x/\sqrt{x^2+1} - 1/\sqrt{x^2+1}) \end{aligned}$$

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \quad b = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ a - b &= a^2 - b^2 \\ (a-b) &= (a-b)(a+b) \end{aligned}$$



5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

$$y = 10b + ax \quad (x+b)$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$



имеет ровно 2 решения. $-1,5 \leq x^2 - 2,5x \leq -1$

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M - середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N - середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 34 \\ \hline 156 \\ + 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 36 \\ \hline 216 \\ + 108 \\ \hline 1296 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 156 \\ \times 152 \\ \hline 204 \\ + 152 \\ \hline 23104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ + 44 \\ \hline 484 \\ + 492 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \times 96 \\ \hline 576 \\ + 4 \\ \hline 960 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 62 \\ \hline 248 \\ + 41 \\ \hline 2542 \end{array}$$

$$\sqrt{976} = \sqrt{2 \cdot 488} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 122} = \sqrt{8 \cdot 122} = 2\sqrt{154}$$

$$= \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 61} = 4\sqrt{61}$$

© МФТИ. 2023

$$= 4\sqrt{61}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть $ab = 2^{14} 7^{10} \cdot x$, $bc = 2^{17} 7^{17} \cdot y$, $ac = 2^{20} 7^{37} \cdot z$; $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{N}$. Тогда $ab^2c = 2^{31} 7^{27} xy$
и $b^2 = 2^{31} 7^{27} xy / (2^{20} 7^{37} z) = 2^{11} xy / (7^{10} z)$, $a^2bc = 2^{34} 7^{47} xz$ и $a^2 = 2^{34} 7^{47} xz / (2^{17} 7^{17} y) = 2^{17} 7^{30} xz / y$,
 $abc^2 = 2^{57} 7^{54} yz$ и $c^2 = 2^{57} 7^{54} yz / (2^{14} 7^{10} x) = 2^{23} 7^{44} yz / x$. $a^2b^2c^2 = (2^{11} xy / (7^{10} z)) (2^{17} 7^{30} xz / y) (2^{23} 7^{44} yz / x) =$
 $= 2^{51} 7^{64} xyz$, $abc = 7^{32} 2^{25} \sqrt{2xyz}$. Отметим, что $b^2 = 2^{11} xy / (7^{10} z)$, $2^{11} \cdot 7^{10} \mid a^2 \Rightarrow xy : 7^{10}$. Если
положить $x = 7^5$, $y = 7^5$, $z = 1$, то мы получим, что из a^2 , b^2 , c^2 можно будет извлечь
корень и будет получены натур. числа, при этом $xy \geq 7^{10}$ при условии $xy \geq 7^{10}$ и взято
наим. значение z , при кот. корень из выражения $\frac{2}{z}$ будет равен натур. числу. Таким
образом, наиб. возможное значение abc равно $7^{32} 2^{25} \sqrt{2 \cdot 7^5 \cdot 7^5} = 7^{32} 2^{25} \cdot 2 \cdot 7^5 = 2^{26} 7^{37}$.
Ответ: $2^{26} 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

Дробь a/b несократима $\Rightarrow a$ и b взаимно просты, т.е. содержат ~~одна~~ различные простые множители. Отметим, что $a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab = 8(a+b)^2 - 2(a+b)^2 + 2(a-b)^2 = 2(a-b)^2 - (a+b)^2$.
Числитель сокращается на $a+b$, знаменатель сокр. на $a+b$, если $2(a-b)^2$ сокр. на $a+b$.
П.к. $a \equiv 2$ и $b \equiv 2$ (иначе дробь a/b сократилась бы), то $a-b \equiv 0$ и $a+b \equiv 2$, т.е. $2(a-b)^2 / (a+b)$ сокращается; значит, наиб. значение n равно $a+b$. Ответ: $a+b$.

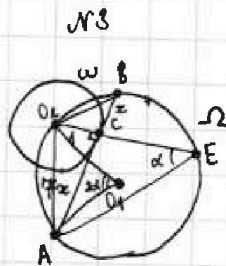
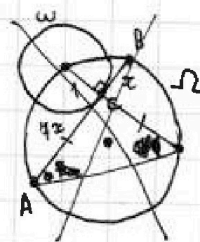
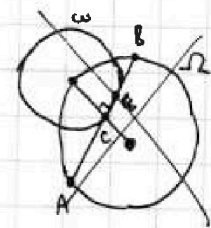
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Лорча QR-кода недопустима!



№3

Пусть $BC = x$, тогда $AC = 7x$;

центр $\omega - O_2$; центр $\Omega - O_1$.

Прямая O_2C до перес. с Ω в т. E.

$O_2C \perp AB \Rightarrow \triangle O_2CB$ и $\triangle CAE$ - прямоуго.

$\triangle O_2CA$ - прямоуго., по т. Пифагора

$O_2A^2 = 1 + 49x^2$. В треуго. O_2O_1A $O_2O_1 = O_1A = 5$ и $\angle O_2O_1A = 2\angle O_2EA$

(центр ω угад в окр., O_2EA - впис. угол в окр.). Пусть $\angle O_2EA = \alpha$, тогда $\angle O_2O_1A = 2\alpha$ и по т. косинусов в $\triangle O_2O_1A$ $O_2A^2 = O_2O_1^2 + O_1A^2 - 2O_2O_1 \cdot O_1A \cos 2\alpha \Leftrightarrow 1 + 49x^2 = 50 - 50 \cos 2\alpha \Leftrightarrow 49x^2 = 49 - 50 \cos^2 \alpha + 50 \sin^2 \alpha$. В окр. Ω $O_2C \cdot CE = AC \cdot BC \Leftrightarrow CE = 7x^2$, по т. Пифагора $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{49x^2 + 49x^4} = 7x \sqrt{x^2 + 1}$. $\sin \alpha = AC/AE = 1/\sqrt{x^2 + 1}$, $\sin^2 \alpha = 1/(x^2 + 1)$; $\cos \alpha = CE/AE = x/\sqrt{x^2 + 1}$, $\cos^2 \alpha = x^2/(x^2 + 1)$. Возвращаясь к т. косинусов, имеем $49x^2 = 49 - 50x^2/(x^2 + 1) + 50/(x^2 + 1) \Leftrightarrow 49x^2(x^2 + 1) = 49x^2 + 49 - 50x^2 + 50 \Leftrightarrow 49x^4 = 49 - 50x^2 + 50 \Leftrightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-50 \pm 4\sqrt{11}}{98} \Leftrightarrow x^2 = \frac{42\sqrt{11} - 50}{98} = \frac{21\sqrt{11} - 25}{49} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{21\sqrt{11} - 25}}{7}$.

Ответ: $8\sqrt{21\sqrt{11} - 25}/7$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!



№4

~~$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$~~
 ~~$\sqrt{2x^2-5x+3} = a, \sqrt{2x^2+2x+1} = b$~~
 $\sqrt{2x^2-5x+3} = a, \sqrt{2x^2+2x+1} = b$. Тогда ур-е принимает вид $a-b = a^2-b^2 \Leftrightarrow (a-b) = (a-b)(a+b) \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) = 0 \Leftrightarrow a=b$ или $a+b=1$, т.е. $\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}$ или $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \Leftrightarrow (2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 \text{ и } 2x^2+2x+1 \geq 0)$ или $(2x^2-5x+3) + (2x^2+2x+1) = 1 \Leftrightarrow 4x^2-3x+3 = 1 \Leftrightarrow 4x^2-3x+2 = 0$ или $4x^2-3x+3 = 1 \Leftrightarrow 4x^2-3x+2 = 0$ или $4x^2-3x+3 = 1 \Leftrightarrow 4x^2-3x+2 = 0$
 $2x^2+2x+1 = 1 + 2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2-5x+3}$ и $1 - \sqrt{2x^2-5x+3} \geq 0 \Leftrightarrow x = 2/7$ или $2\sqrt{2x^2-5x+3} = 4x^2 - 3x + 2$
и $1 - \sqrt{2x^2-5x+3} \geq 0 \Leftrightarrow x = 2/7$ или $4(2x^2-5x+3) = 49x^2 - 42x + 9$ и $2x^2-5x+3 \in [0, 1] \Leftrightarrow x = 2/7$
или $4x^2 - 22x - 3 = 0$ и $2x^2-5x \in [-3, -2] \Leftrightarrow x = 2/7$ или $x = (22 \pm 4\sqrt{61})/82 = (11 \pm 2\sqrt{61})/41 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 2/7$ или $\sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2-5x+3} = 1$. Возвращаясь к замечанию, получаем, что
если $a+b=1$, то $2a = a^2 - b^2 + 1$, т.е. $2\sqrt{2x^2-5x+3} = 3 - 4x$, и $2b = 1 + b^2 - a^2$, т.е. $\sqrt{2x^2+2x+1} =$
 $= 4x - 1$. $2x^2+2x+1 \geq 0$, т.к. старший коэфф. положит. и $\Delta = 4 - 4 \cdot 2 < 0$. Получается сис-
тема: $4(2x^2-5x+3) = (3-4x)^2$, и $2x^2+2x+1 = (4x-1)^2$, и $2x^2-5x+3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \geq 0$, и
 $8x^2 - 20x + 12 = 9 + 49x^2 - 42x$, и $2x^2+2x+1 = 49x^2 - 14x + 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$, и $41x^2 - 22x -$
 $- 3 = 0$, и $41x^2 - 16x = 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$, и $(x=0$ или $x=16/41)$, и $x = (22 \pm 4\sqrt{61})/82 =$
 $= (11 \pm 2\sqrt{61})/41 \Leftrightarrow$. Таким образом, ~~система~~ имеет ед. решение. Ответ: $2/7$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

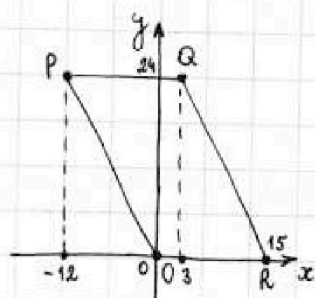
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 5

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12$. Если взять $x_1 = x_2$, то тогда верно $y_2 - y_1 = 12$. ~~Если взять~~ Высота параллелограмма равна 24, т.е. пар значений y_1, y_2 таких, что $y_2 - y_1 = 12$, всего 13.

Если взять $y_1 = y_2$, то тогда верно $x_2 - x_1 = 6$. Длина стороны параллелограмма, лежащей на ~~стор~~ оси Ox , равна 15, значит, пар значений x_1, x_2 таких, что $x_2 - x_1 = 6$, всего для любого $y_1 = y_2$ 10. Итого, пар точек, удовл. условию и таких,

что $y_1 = y_2$ или $x_1 = x_2$, всего $16 \cdot 13 + 24 \cdot 10 = 208 + 240 = 448$. Далее, заметим, что мы можем каждой точке с координатами $(x; y)$ ~~найти~~ при заданном $y' - y > 0$ в соответствии единственную точку с коорд. $(x'; y')$ такую, что $2(x' - x) + (y' - y) = 12$. ~~Для~~ ~~параллелограмма~~ Или иначе, т.к. $2(x' - x) : 2$ и $12 : 2$, для соответствия берём y' такой, что $y' - y : 2$. Таким образом, нужно посчитать кол-во таких соответствий внутри параллелограмма. ~~Итого~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

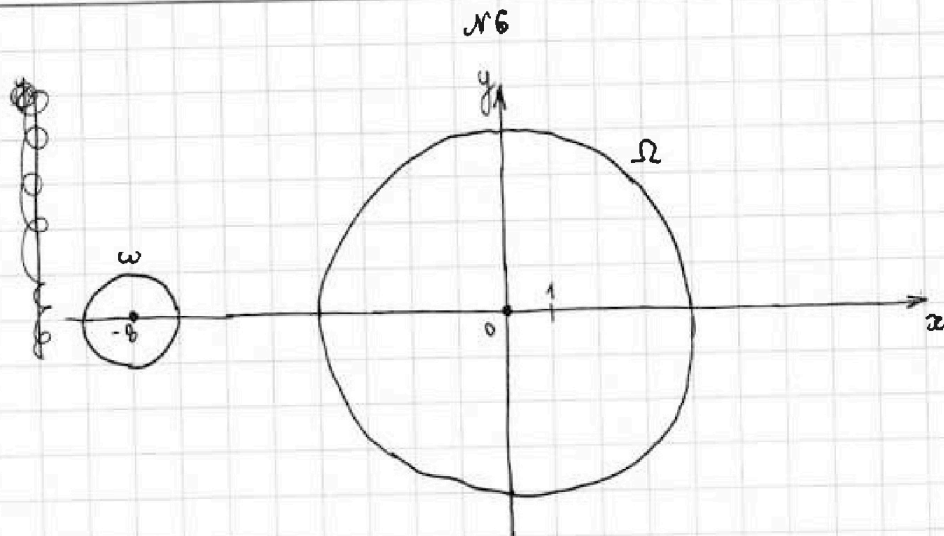
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение. График ур-я $(x+b)^2 + y^2 - 1 = 0$ - окр. с центром в т. $(-b; 0)$ радиусом 1 (ω); график ур-я $x^2 + y^2 - 4 = 0$ - окр. с центром в т. $(0; 0)$ радиусом 2. Если точка касод. внутри ω (т.е. $(x+b)^2 + y^2 - 1 < 0$), то при этом она касод. снаружи Ω (т.е. $x^2 + y^2 - 4 > 0$); если точка касод. внутри Ω (т.е. $x^2 + y^2 - 4 < 0$), то при этом она касод. снаружи ω (т.е. $(x+b)^2 + y^2 - 1 > 0$). Таким образом, ~~оба~~ и-ву системы удовл. все точки на Ω и ω или внутри них. График ур-я $ax - y + 10b = 0$ - прямая, перес. ось Oy в т. $(0b)$. Необходимо, чтобы для для некот. а всегда находились в точке, что прямая касод. обеих окр., т.е. находились такие пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , что $ax_1 - y_1 + 10b = 0$ и $(x_1+b)^2 + y_1^2 - 1 = 0$ и $ax_2 - y_2 + 10b = 0$ и $x_2^2 + y_2^2 - 4 = 0$, т.е. $y_1 = ax_1 + 10b$ и $(x_1+b)^2 + (ax_1 + 10b)^2 = 1$ и $y_2 = ax_2 + 10b$ и $x_2^2 + (ax_2 + 10b)^2 = 4$

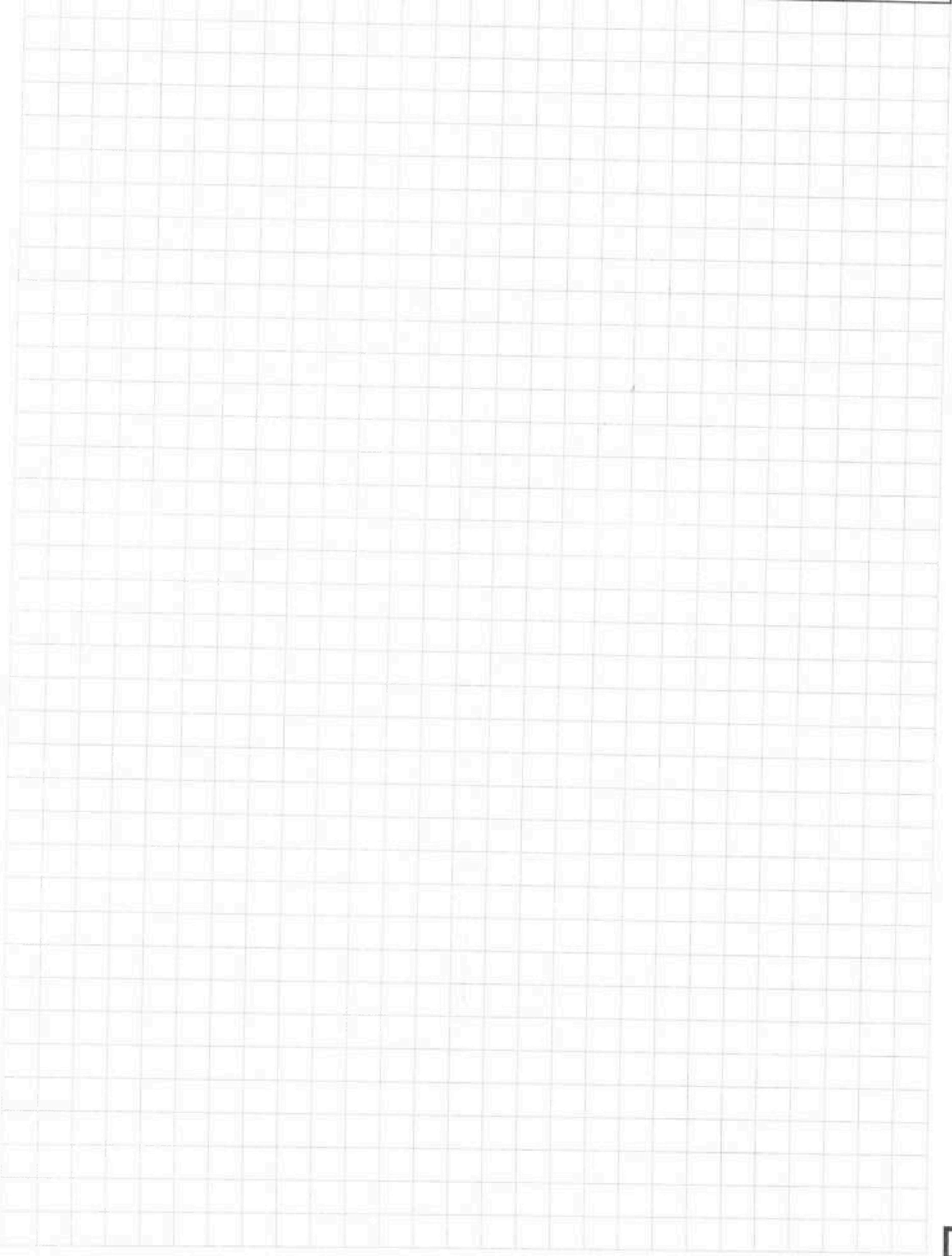


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





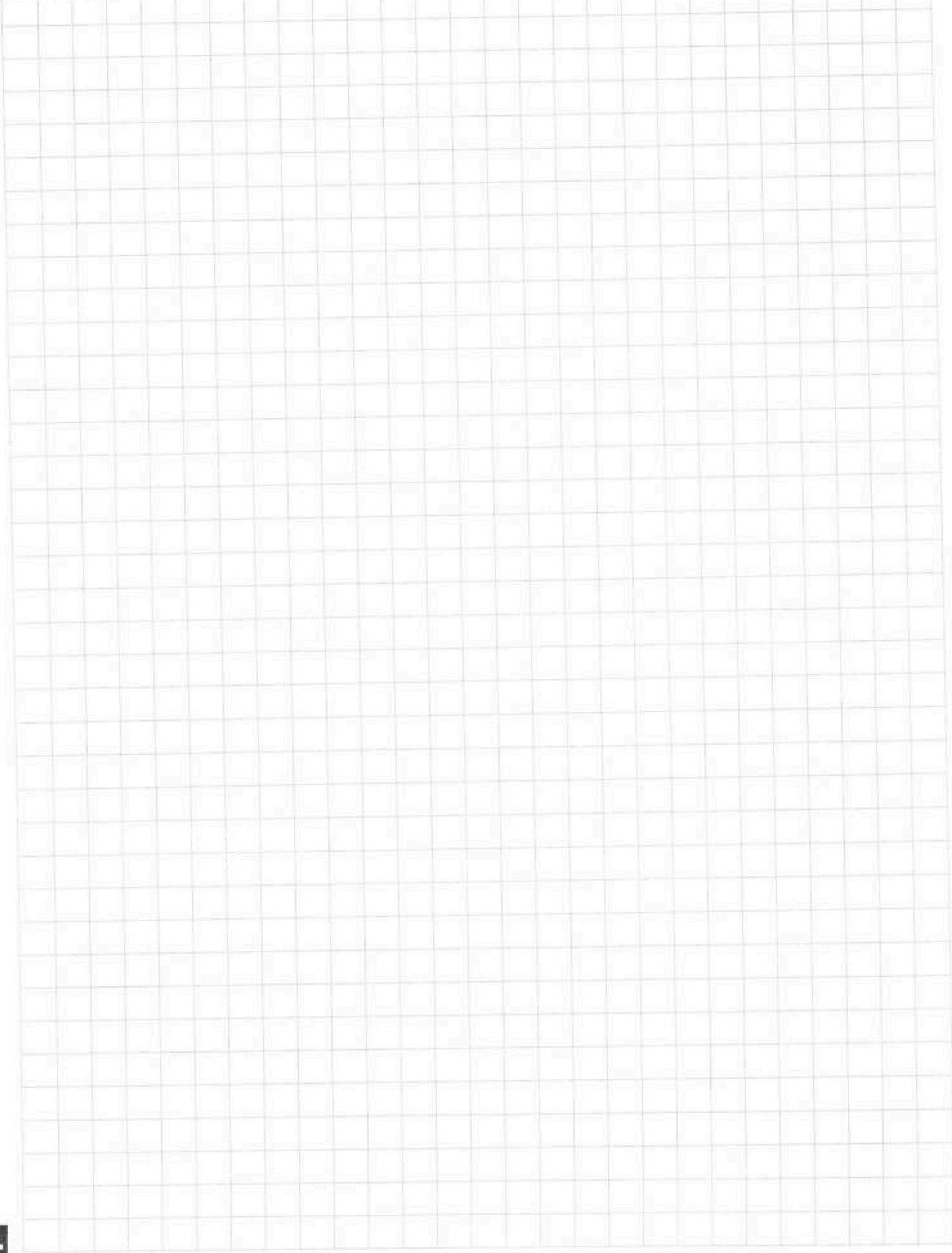
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





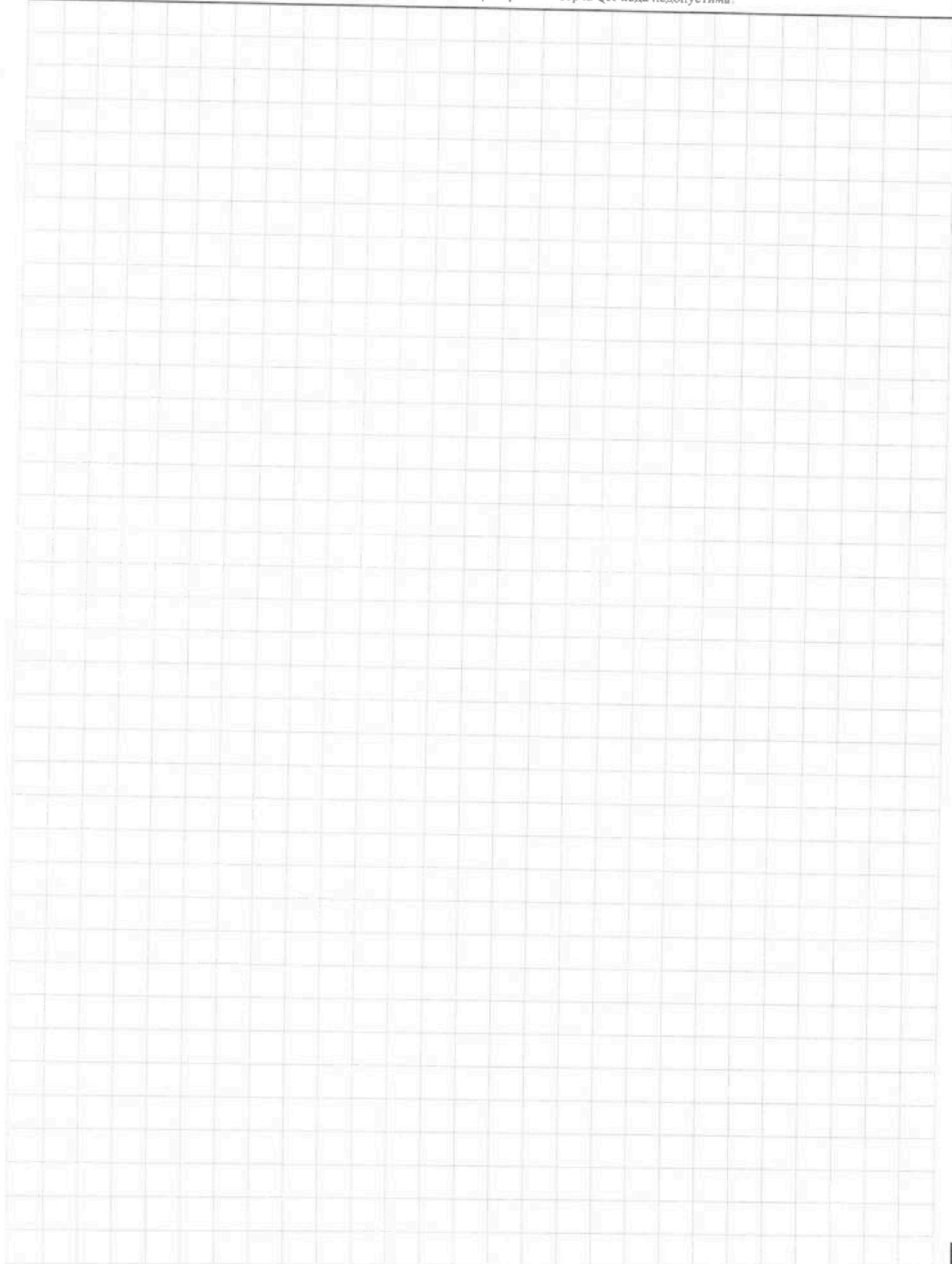
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

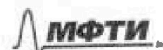




На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

