МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

$\begin{cases} ab : 2^{14}7^{10} \\ bc : 2^{17}7^{17} \\ ac : 2^{20}7^{37} \end{cases}$ $abc_{min}-?$ $\begin{cases} ab = 2^{14}7^{10}\cdot x \\ bc = 2^{17}7^{17}\cdot y \\ ac = 2^{20}7^{37}\cdot z \end{cases}$ $b = \frac{\sqrt{2^{11}xy}}{7^5\sqrt{z}}$ $(\sqrt{49x^2+1}-1)(\sqrt{49x^2+1}+1) = 49x^2$

$\sqrt{19404} = 2\sqrt{4851} = 2\sqrt{3\cdot1617} = 6\sqrt{539} = 6\sqrt{7\cdot77} = 6\cdot7\sqrt{11}$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

$21\sqrt{11}-25$

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

a и b взаимно просты

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ $\frac{8ab}{a+b} = \frac{2(a+b)^2-2(a-b)^2}{a+b} = 2(a+b) - 2\frac{(a-b)^2}{a+b}$

$D = 36b^2-4b^2 = 32b^2$ $a = \frac{6\pm4\sqrt{2}b}{2} = 3\pm2\sqrt{2}b$ $(a-3-2\sqrt{2}b)(a-3+2\sqrt{2}b)$

$\frac{(a-b)^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} + \frac{4ab}{a+b} = a+b+\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a+b}$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

$\sqrt{2500+4\cdot99\cdot49}$

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

$49x^2+1 = 50-50\cos2\alpha = 50-50(7x/\sqrt{x^2+1}-7x/7x\sqrt{x^2+1})$
$49x^2+1 = 50-50(x/\sqrt{x^2+1}-1/\sqrt{x^2+1})$

$\sqrt{49x^2+1}$ $\sqrt{49x^2+49x^2} = 7x\sqrt{x^2+1}$

4. [5 баллов] Решите уравнение

$a = \sqrt{2x^2-5x+3}$ $b = \sqrt{2x^2+2x+1}$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x.$$

$a-b = a^2-b^2$ $(a-b) = (a-b)(a+b)$ $484+12\cdot$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

$y = 10b + ax$ $(x+8)$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения. $-1{,}5 \le x^2 - 2{,}5x \le -1$

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

$\sqrt{976} = \sqrt{2\cdot488} = \sqrt{2\cdot4\cdot122} = \sqrt{4\cdot4\cdot61} = 4\sqrt{61}$

$a-b = a^2-b^2$
$a+b = 1$

$2a =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть $ab = 2^{14}7^{10}\cdot x$, $bc = 2^{17}7^{17}\cdot y$, $ac = 2^{20}7^{37}\cdot z$, $x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{N}$. Тогда $ab^2c = 2^{31}7^{27}xy$ и $b^2 = 2^{31}7^{27}xy/(2^{20}7^{37}z) = 2^{11}xy/(7^{10}z)$, $a^2bc = 2^{34}7^{47}zx$ и $a^2 = 2^{34}7^{47}xz/(2^{17}7^{17}y) = 2^{17}7^{30}xz/y$, $abc^2 = 2^{37}7^{54}yz$ и $c^2 = 2^{37}7^{54}yz/(2^{14}7^{10}x) = 2^{23}7^{44}yz/x$. $a^2b^2c^2 = (2^{11}xy/(7^{10}z))(2^{17}7^{30}xz/y)(2^{23}7^{44}yz/x) = 2^{51}7^{64}xyz$, $abc = 7^{32}2^{25}\cdot\sqrt{2xyz}$. Отметим, что $b^2 = 2^{11}xy/(7^{10}z)$, $2^{11}\not\vdots\, 7^{10} \Rightarrow xy \vdots 7^{10}$. Если положить $x = 7^5$, $y = 7^5$, $z = 2$, то мы получим, что из a^2, b^2, c^2 можно будет извлечь корень и будут получены натур. числа, при этом $xy = 7^{10}$ при условии $xy \geq 7^{10}$ и взято наим. значение z, при кот. корень из выражения 2^2z будет равен натур. числу. Таким образом, наим. возможное значение abc равно $7^{32}2^{25}\sqrt{2^2 7^{10}} = 7^{32}2^{25}\cdot 2\cdot 7^5 = 2^{26}7^{37}$.
Ответ: $2^{26}7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

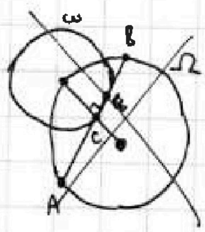
Дробь a/b несократима $\Rightarrow$ a и b взаимно просты, т.е. содержат различные простые множители. Отметим, что $a^2-6ab+b^2=(a+b)^2-8ab=(a+b)^2-2(a+b)^2+2(a-b)^2=2(a-b)^2-(a+b)^2$. Числитель сокращается на $a+b$, знаменатель сокр. на $a+b$, если $2(a-b)^2$ сокр. на $a+b$. Т.к. $a \not\vdots 2$ и $b \not\vdots 2$ (иначе дробь a/b сократилась бы), то $a-b \vdots 2$ и $a+b \vdots 2$, т.е. $2(a-b)^2/(a+b)$ сокращается; значит, наиб. значение m равно $a+b$. Ответ: $a+b$.

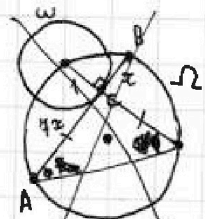
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

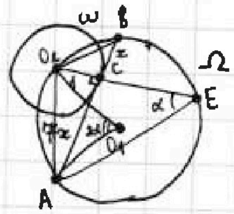
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3







Пусть $BC = x$, тогда $AC = 7x$; центр $\omega - O_2$; центр $\Omega - O_1$. Продлим O_2C до перес. с Ω в т. E. $O_2C \perp AB \Rightarrow \triangle O_2CB$ и $\triangle CAE$ – прямоуг. $\triangle O_2CA$ – прямоуг., по т. Пифагора $O_2A^2 = 1 + 49x^2$. В треуг. O_2O_1A $O_2O_1 = O_1A = 5$ и $\angle O_2O_1A = 2\angle O_2EA$ (централ. угол в окр., O_2EA – впис. угол в окр.). Пусть $\angle O_2EA = \alpha$, тогда $\angle O_2O_1A = 2\alpha$ и по т. косинусов в $\triangle O_2O_1A$ $O_2A^2 = O_2O_1^2 + O_1A^2 - 2O_2O_1 \cdot O_1A\cos 2\alpha \Leftrightarrow 1 + 49x^2 = 50 - 50\cos 2\alpha \Leftrightarrow 49x^2 = 49 - 50\cos^2\alpha + 50\sin^2\alpha$. В окр. Ω $O_2C \cdot CE = AC \cdot BC \Leftrightarrow CE = 7x^2$, по т. Пифагора $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{49x^2 + 49x^4} = 7x \times \sqrt{x^2+1}$. $\sin\alpha = AC/AE = 1/\sqrt{x^2+1}$, $\sin^2\alpha = 1/(x^2+1)$; $\cos\alpha = CE/AE = x/\sqrt{x^2+1}$, $\cos^2\alpha = x^2/(x^2+1)$. Возвращаясь к т. косинусов, имеем $49x^2 = 49 - 50x^2/(x^2+1) + 50/(x^2+1) \Leftrightarrow 49x^2(x^2+1) = 49x^2 + 49 - 50x^2 + 50 \Leftrightarrow 49x^4 = 49 - 50x^2 + 50 \Leftrightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Leftrightarrow x^2 = (-50 \pm 42\sqrt{11})/98 \overset{42\sqrt{11} > 50}{\Leftrightarrow} x^2 = (42\sqrt{11} - 50)/98 = (21\sqrt{11} - 25)/49 \Leftrightarrow$ $\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{21\sqrt{11} - 25}/7$. $AB = 8x = 8\sqrt{21\sqrt{11} - 25}/7$.

Ответ: $8\sqrt{21\sqrt{11} - 25}/7$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

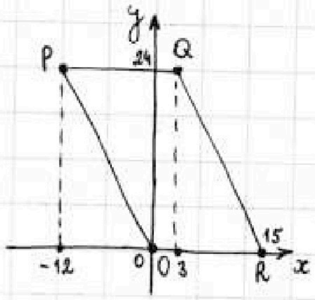
№4

$\sqrt{2x^2-5x+3}=a$, $\sqrt{2x^2+2x+1}=b$. Тогда ур-е принимает вид $a-b=a^2-b^2 \Leftrightarrow (a-b)=(a-b)(a+b) \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1)=0 \Leftrightarrow a=b$ или $a+b=1$, т.е. в итоге $\sqrt{2x^2-5x+3}=\sqrt{2x^2+2x+1}$ или $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1 \Leftrightarrow (2x^2-5x+3=2x^2+2x+1$ и $2x^2+2x+1\geq0)$ или

$x=2/7$ или $x=(22\pm4\sqrt{61})/82=(11\pm2\sqrt{61})/41$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2/7$ или $\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-5x+3}=1$. Возвращаясь к заменам, получаем, что если $a+b=1$, то $2a=a^2-b^2+1$, т.е. $2\sqrt{2x^2-5x+3}=3-7x$, и $2b=1+b^2-a^2$, т.е. $\sqrt{2x^2+2x+1}=7x-1$. $2x^2+2x+1>0$, т.к. старший коэфф. полож. и $D=4-4\cdot2<0$. Получается система: $4(2x^2-5x+3)=(3-7x)^2$, и $2x^2+2x+1=(7x-1)^2$, и $2x^2-5x+3\geq0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)\geq0$, и $8x^2-20x+12=9+49x^2-42x$, и $2x^2+2x+1=49x^2-14x+1 \Leftrightarrow x\in(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$, и $41x^2-22x-3=0$, и $47x^2-16x=0 \Leftrightarrow x\in[-\infty;2]\cup[3;+\infty)$, и ($x=0$ или $x=16/47$), и $x=(22\pm4\sqrt{61})/82=(11\pm2\sqrt{61})/41 \Leftrightarrow \varnothing$. Таким образом, ур-е имеет ед. решение. Ответ: $2/7$.

№ 5



$2x_2-2x_1+y_2-y_1=2(x_2-x_1)+y_2-y_1=12$. Если взять $x_1=x_2$, то тогда верно $y_2-y_1=12$. Высота параллелограмма равна 24, т.е. пар значений y_1, y_2 таких, что $y_2-y_1=12$, всего для любого $x_1=x_2$ 13. Если взять $y_1=y_2$, то тогда верно $x_2-x_1=6$. Длина стороны пар-мма, лежащей на оси Ox, равна 15, значит, пар значений x_1, x_2 таких, что $x_2-x_1=6$, всего для любого $y_1=y_2$ 10. Итак, пар точек, удовл. условию и таких, что $y_1=y_2$ или $x_1=x_2$, всего $16\cdot13+24\cdot10=208+240=448$. Далее, заметим, что мы можем каждой точке с координатами $(x;y)$ при заданном $y'-y>0$ в соответствие единственную точку с коорд. (x',y') такую, что $2(x'-x)+(y'-y)=12$. При этом, т.к. $2(x'-x)\,\vdots\,2$ и $12\,\vdots\,2$, для соответствия берётся y' такой, что $y'-y\,\vdots\,2$. Таким образом, нужно посчитать кол-во таких соответствий внутри пар-мма.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6

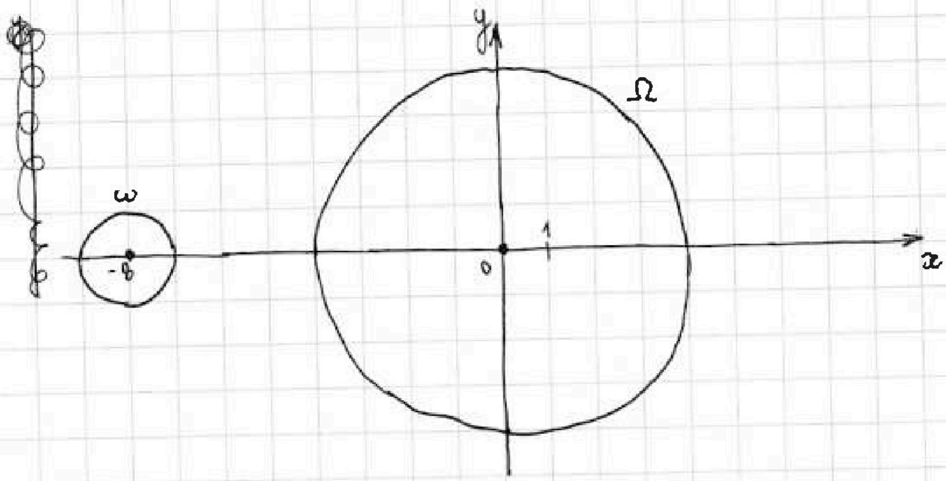


График ур-я $(x+8)^2+y^2-1=0$ – окр. с центром в т. $(-8;0)$ радиусом 1 (ω); график ур-я $x^2+y^2-4=0$ – окр. с центром в т. $(0;0)$ радиусом 4. Если точка наход. внутри ω (или на ней) (т.е. $(x+8)^2+y^2-1\leq 0$), то при этом она наход. снаружи Ω (т.е. $x^2+y^2-4>0$); если точка наход. внутри Ω (или на ней) (т.е. $x^2+y^2-4\leq 0$), то при этом она наход. снаружи ω (т.е. $(x+8)^2+y^2-1>0$). Таким образом, н-ву системы удовл. все точки на Ω и ω или внутри них. График ур-я $ax-y+10b=0$ – прямая, перес. ось Oy в т. $10b$. Необходимо, чтобы для для некот. a всегда находилось b такое, что прямая касается обеих окр., т.е. находились такие пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2), что $ax_1-y_1+10b=0$ и $(x_1+8)^2+y_1^2-1=0$ и $ax_2-y_2+10b=0$ и $x_2^2+y_2^2-4=0$, т.е. $y_1=ax_1+10b$ и $(x_1+8)^2+(ax_1+10b)^2=1$ и $y_2=ax_2+10b$ и $x_2^2+(ax_2+10b)^2=4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!