



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{ab}{2^{15} \cdot 7^{11}} = x; \quad \frac{bc}{2^{14} \cdot 7^{13}} = y; \quad \frac{ac}{2^{23} \cdot 7^{39}} = z$$

Рассмотрим $\frac{ac}{2^{23} \cdot 7^{39}} = z$, то есть если мы возьмем y и ac только 7^{39} , то их произведение будет больше либо равно 7^{39} \Rightarrow если мы найдем наименьшее произведение чисел \Rightarrow нам выгодно, чтобы $\frac{ac}{7^{39}} = 2^x \cdot b$ какой-то степени $x \Rightarrow$ если мы разобьем z по крайней мере: например $a = 2^4 \cdot 7^{19}$, $c = 2^9 \cdot 7^{20}$, то b может не иметь делителя 7^x вообще \Rightarrow тогда $b = 2^x$

С двойками так не получится, в любой ситуации b должно иметь делитель 2^x чтобы было минимальное произведение

Теперь нам нужно найти минимальный x :

$$\begin{cases} a_2 + c_2 \geq 23 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \\ a_2 + b_2 \geq 15 \end{cases} \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 55 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 27,5$$

степень 2 у а, 2-ки у с. больше делителей не будет

Так как нам нужно мин. целое \Rightarrow

$$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 = 28, \text{ например}$$

$$a_2 = 11; c_2 = 12; b_2 = 5; \text{ тогда } abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ: $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

подставим например, что $a_2 + c_2 = 23 \Rightarrow$
 $\Rightarrow b_2 = 5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow b_2 + a_2 = 15 \Rightarrow a_2 = 10 \Rightarrow$
 $\Rightarrow c_2 = 13 \leftarrow$ подошло

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



известно, что $\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow \frac{ab}{a+b}$ также несократима.

$\frac{a+b}{a^2-4ab+b^2}$ - самый большой m может быть, если $m = a+b$, тогда $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} : (a+b) \Rightarrow \frac{9ab}{a+b}$, а так

выше $\frac{ab}{a+b}$ - не делится и не сокращается \Rightarrow

$\Rightarrow \frac{9}{a+b} \Rightarrow m$ наибольшая равна 9.

Ответ: $m = 9$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



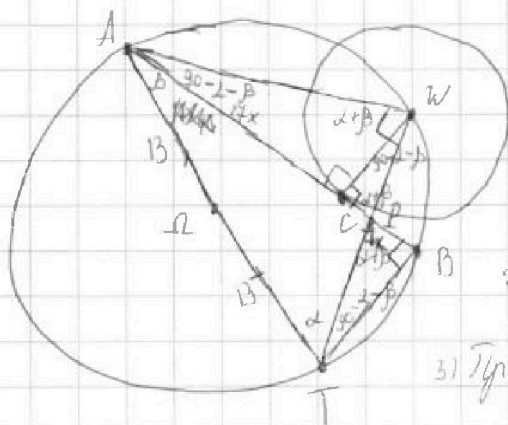
Дано

$$\frac{AC}{CB} = \frac{14}{7}$$

$$R(\omega) = 4$$

$$r(\Omega) = 13$$

$AB = ?$



1) Проведем WC;

$WC \perp AB$, так как радиус
к касательной
диаметр

2) Проведем $A\Omega$

3) Проведем AW ; WB ; WT ; BT ;

4) $\angle AWT = \angle ABT = 90^\circ$, Δ к
описывается на дуге.

Пусть $\angle BAT = \beta$, $\angle WTA = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle WAC = 90 - 2 - \beta \Rightarrow \angle AWC = 2 + \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CWP = 90 - 2 - \beta \Rightarrow \angle WPC = 2 + \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle TPB = \angle CPW (\text{как вертикали}) = 2 + \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle PTB = 90 - 2 - \beta$$

а) $\Delta AWC \sim \Delta CWP$ (по 2-м углам) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{WC}{AC} = \frac{CP}{WC} \Rightarrow CP = \frac{WC^2}{AC} = \frac{49}{14x}$$

б) $\Delta WCP \sim \Delta PBT$ (по 2-м углам) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{WC}{BT} = \frac{CP}{PB} \Rightarrow \frac{7}{BT} = \frac{49}{14x \cdot PB}$$

$$в) CB = 7x = CP + PB = \frac{49}{14x} + PB \Rightarrow PB = 7x - \frac{49}{14x} =$$

$$= \frac{7 \cdot 14x^2 - 49}{14x} = \frac{7(14x^2 - 7)}{14x}$$

г) из (б)

$$BT = \frac{7(14x \cdot PB)}{49} = \frac{14x}{7} \cdot \frac{7(14x^2 - 7)}{14x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BT = 14x^2 - 7$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение

10) Тогда по т. Пифагора из \triangle ка ABT :

$$AT^2 + BT^2 = AB^2$$

$$BT^2 + AB^2 = AT^2$$

$$(14x^2 - 4)^2 + (24x)^2 = 26^2$$

$$289x^4 - 2 \cdot 7 \cdot 14x^2 + 49 + 576x^2 = 676$$

$$289x^2 - 238x^2 + 576x^2 - 676 - 49 = 0$$

$$289x^2 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$D = 338 \cdot 338 + 4 \cdot 289 \cdot 627 = 4(169 \cdot 169 + 289 \cdot 627) = 2^2 \cdot 458^2$$

$$x^2 = \frac{-338 \pm 2 \cdot 458}{2 \cdot 289} = \frac{-169 \pm 458}{289} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1} \\ 1 \end{array} \right]$$

\leftarrow отр. или не подходит

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 24x = 24$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение

$$2) \quad b = 1 - 2t$$

$$1 - 9x = 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$$

Возведем в квадрат; $x \geq 0$

$$4(3x^2 + 3x + 1) = 81x^2$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 69 = 1248 = 12 \cdot 14 = 8 \cdot 2 \quad 12 \cdot 104 = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 26 = 4^2 \cdot 48$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{48}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm 4 \cdot 4\sqrt{3}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{48}}{69}$$

← подходит

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{3}; \quad x = \frac{6 + 2\sqrt{48}}{69}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Замена:

$$\left. \begin{aligned} t &= \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ v &= 1 - 9x \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$t^2 - 9x + 1 = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\sqrt{t^2 - 9x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$\sqrt{t^2 + v} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2 + v} - t = v$$

$$\sqrt{t^2 + v} = v + t$$

$$t^2 + v = v^2 + 2vt + t^2$$

$$v^2 + 2vt - v = 0$$

$$v(v + 2t - 1) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} v &= 0 \\ v &= 1 - 2t \end{aligned} \right.$$

1) $v = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$ ← ~~так~~ подставим, т.к.
а не учитывая ОДЗ.

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{9^2} - \frac{6}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{9^2} + \frac{3}{9} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{3}{81} + \frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{12}{9}} \leftarrow \text{подходит}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

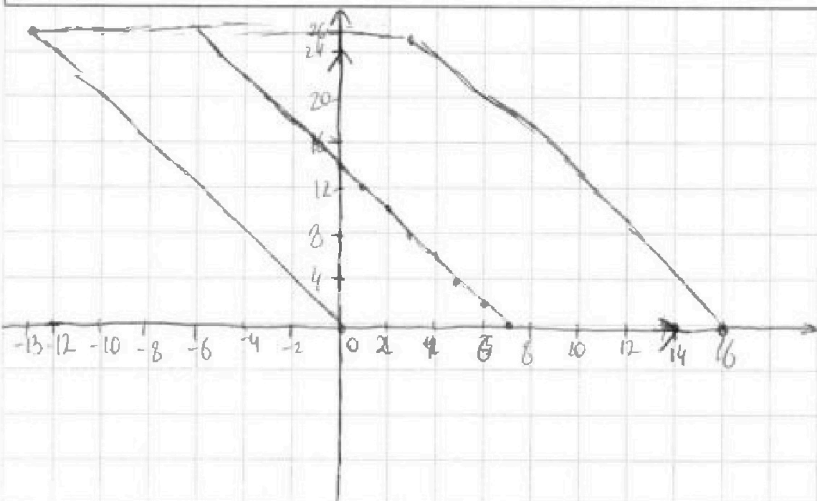
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4 ур-ия прямой

$$y = 0; \quad y = 26.$$

$$y = -2x; \quad y = -2x + 32$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 26 \\ 2x + y \geq 0 \\ y + 2x - 32 \leq 0 \end{cases}$$

\Rightarrow должны выполняться условия для точки находящейся в этой прямой.

тогда: $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$$\begin{aligned} (2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) &= 14 \\ \begin{matrix} \geq 0 \\ \geq 0 \end{matrix} & \end{aligned}$$

$$(2x_2 + y_2) \geq 14 + (2x_1 + y_1)$$

Заметим $2x_2 + y_2 \geq 14 \Rightarrow$ это граница

Также заметим, что каждой точке соответствует только одна точка \Rightarrow

\Rightarrow у нас область подограничена сторонами

точек начинается от $x=4$ и заканчивается

от $x=16 \Rightarrow$ это ровно 10 прямых с убывающими

показателями (без границ вл) \Rightarrow получили $y \in [0, 26]$ - это 24 точки \Rightarrow

\Rightarrow всего пар = $10 \cdot 24 = 240$

границы этих точек это прямая $y = -2x + 14$

всей этой прямой переходят первая точка $(0; 0)$

Ответ: 240 пар.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

из 1020

$$y = 8b - ax$$

подставим во второе

$$(x^2 + (8b - ax)^2 - 1)(x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$(x^2 + 64b^2 - 16abx - 1)(x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 144 - 16abx - 248b + 24ax - 16) \leq 0$$

$$(x^2(a+1) - 16abx - 1 - 64b^2)(x^2(a+1) + x(24a - 16ab) + 64b^2 + 144 - 16 - 248b) \leq 0$$

Вот это выражение, чтобы иметь всего 2 корня должно либо сворачиваться в квадрат, и причем оба выражения, либо дискрим. Одно из них должно быть отрицательным.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

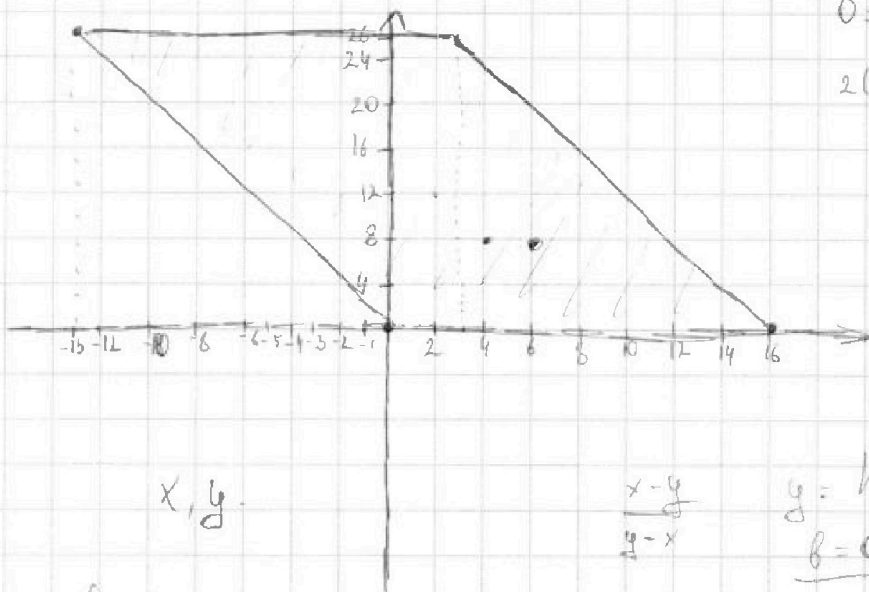
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$0 = 16x + b$$

$$26$$

$$y = -2x + 32$$

$$0 = k \cdot 16 + b$$

$$26 = k \cdot 3 + b$$

x, y

$$\frac{x-y}{y-x}$$

$$y = kx + b. \quad 26 =$$

$$b = 0$$

$$-26 = k \cdot -13$$

$$k = -2$$

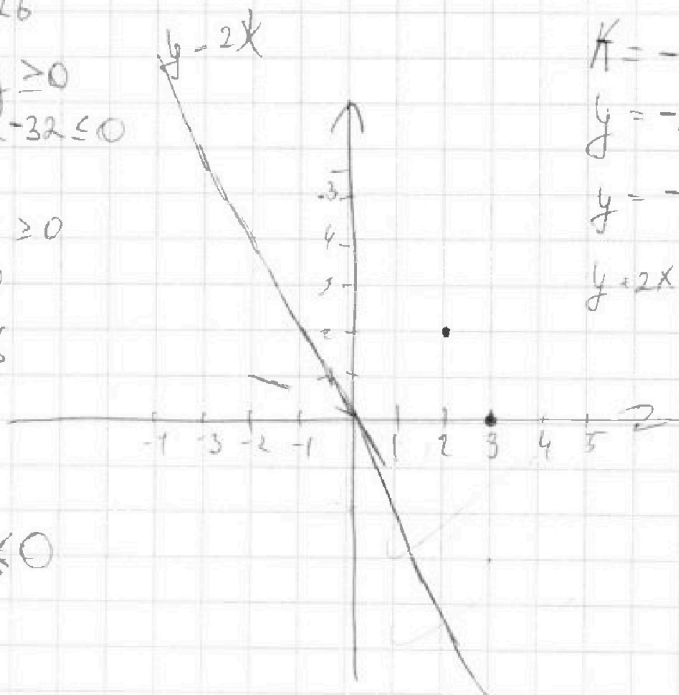
$$y = 2x - 16$$

$$y = -2x$$

$$y = -2x + 16$$

$$y = 2x - 16 \leq 0$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 26 \\ 2x + y \geq 0 \\ y + 2x - 32 \leq 0 \\ y - 2x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 26 \end{cases}$$



$$y - 2x \leq 0$$

$$y = -2x$$

$$-2x - y \geq 0$$

$$2x + y \geq 0$$

$$-2x + y \leq 0$$

$$2x - y \leq 0$$

$$\boxed{2x - y \geq 0}$$



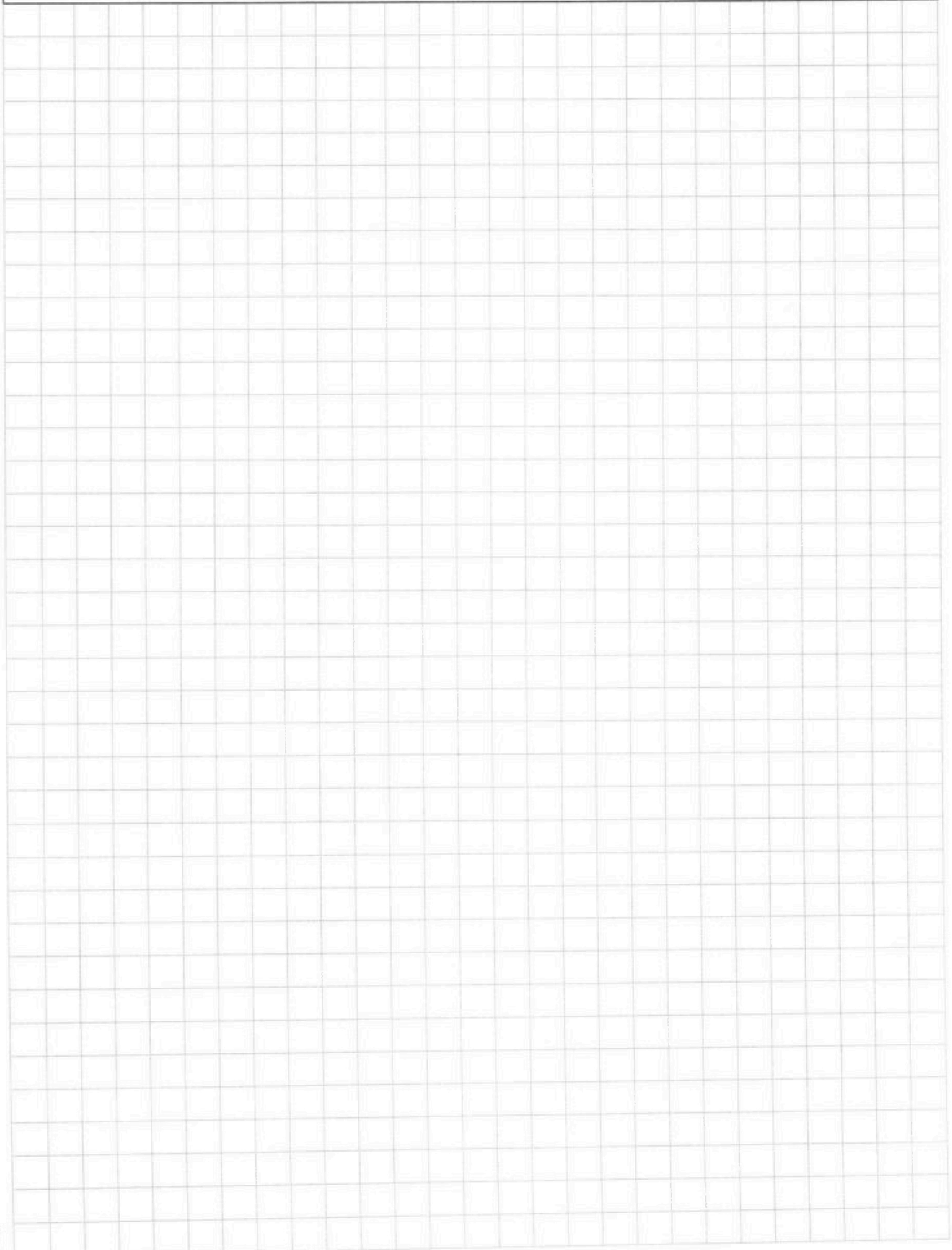
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{-338 \pm 2 \cdot 458}{2 \cdot 289} = \left[\frac{-338 + 2 \cdot 458}{2 \cdot 289} = \frac{-169 + 456}{289} = 1 \right]$$

$$\begin{array}{r} 458 \\ 34 \overline{) 126} \\ \underline{118} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 458 \\ -169 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\sqrt{3 \frac{1}{9} \frac{1}{9} - \frac{6}{9} + 2} = \sqrt{3 \frac{1}{9} \frac{1}{9} + \frac{13}{9}}$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 676 \\ \hline 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 12 \\ \hline 24 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 546 \\ 238 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 14 \\ \hline 196 \\ 28 \\ \hline 476 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 98 \\ 14 \\ \hline 258 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1248 \\ 12 \overline{) 48} \\ \hline 114 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 69 \\ \hline 474 \\ 69 \\ \hline 1004 \\ 1004 \\ + 144 \\ \hline 1218 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ 1014 \\ 169 \\ \hline 28561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 289 \\ \hline 627 \\ 2023 \\ 548 \\ \hline 1734 \\ + 181203 \\ \hline 28561 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 458 \\ \times 458 \\ \hline 3664 \\ 2290 \\ \hline 1632 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$12 - 14$$

$$12 - 104$$

$$12 - 104$$

$$\begin{array}{r} 1146 \\ 10 \overline{) 14} \\ \hline 544 \\ 4 \\ \hline 14 \\ 16 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 287 \\ 28 \overline{) 17} \\ \hline 284 \end{array}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3^2 = 36 - 24 = 12$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} + 3x^2 + 3x + 1 = 1 - 18x + 61x^2$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 1 + 18x - 81x^2 = 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$-45x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = 1 + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-45x^2$$

$$\textcircled{1} = 36 - 83 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = \left[\begin{array}{l} \frac{3 + \sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{3 - \sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x}$$

$$(3x^2 - 6x + 2) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} =$$

$$= \cancel{9x^4} + \cancel{9x^3} + 3x^2 - \cancel{18x^3} - 18x - 6x + \cancel{6x^2} + 6x + 2 = \frac{3 - \sqrt{33}}{30} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}}$$

$$- 9x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 18x + 2$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 18x + 2} + 3x^2 + 3x + 1 = 1 - 18x + 61x^2$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 1 + 18x - 61x^2 = 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 18x + 2}$$

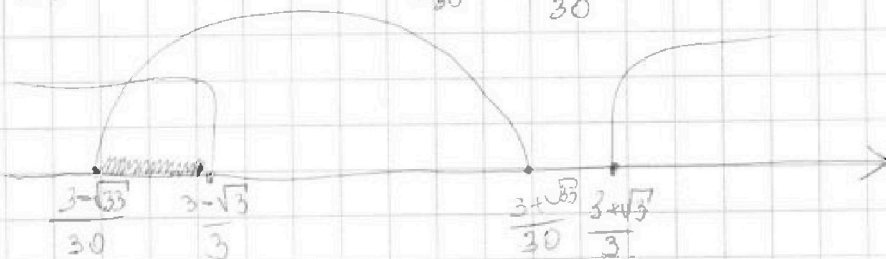
$$-45x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 18x + 2}$$

$$\textcircled{2} = 225 + 8 \cdot 75 = 825 = 25 \cdot 33$$

$$x = \frac{-15 \pm 5\sqrt{33}}{-150} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{-30} = \left[\begin{array}{l} \frac{-3 - \sqrt{33}}{-30} = \frac{3 + \sqrt{33}}{30} \\ \frac{-3 + \sqrt{33}}{-30} = \frac{3 - \sqrt{33}}{30} \end{array} \right.$$

$$\frac{75}{8} = 9.375$$

$$\begin{array}{r} 825 \overline{) 225} \\ 45 \overline{) 103} \\ 145 \\ \hline 45 \end{array}$$



$$-45x^2 + 15x + 2$$

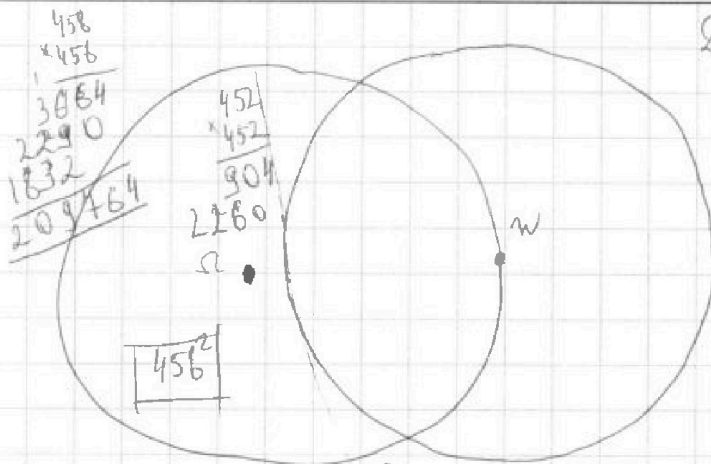
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

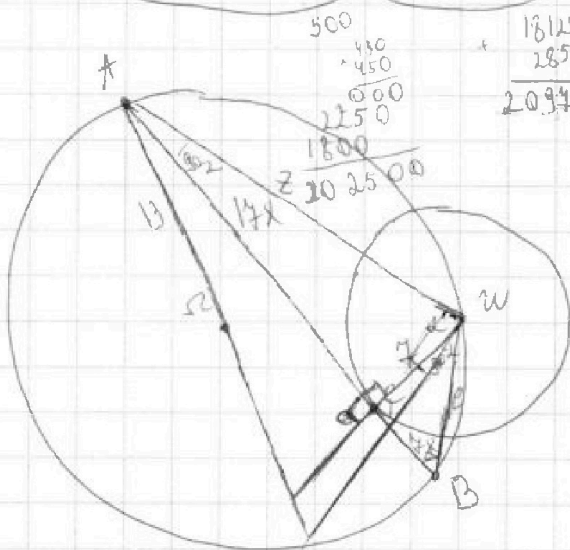


$$D = 336 \cdot 338 + 4 \cdot 289 - 624$$

$$4(169 \cdot 169 + 289 \cdot 624) = 4 \cdot 458^2$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 1169} \\ \underline{213} \\ 128 \\ \underline{12} \\ 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \overline{) 1521} \\ \underline{169} \\ 1014 \\ \underline{1014} \\ 1619 \\ \underline{1619} \\ 17 \end{array}$$



$$4 \cdot 13 \quad \begin{array}{r} 1254 \\ 181203 \end{array}$$

$$z^2 = 49 + 289x^2$$

$$e^2 = 49 + 49x^2$$

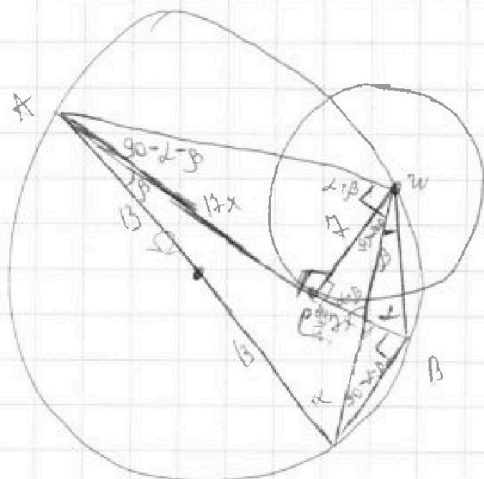
$$z^2 + e^2 = 576x^2 \quad x^2 =$$

$$z^2 + e^2 = 98 + 338x^2$$

$$z^2 + e^2 = 576x^2$$

$$576x^2 - 338x^2 = 98$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 21 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \\ 289 \\ 49 \\ \hline 338 \\ 6 \\ \hline 576 \\ -338 \\ \hline 238 \end{array}$$



$$\frac{7}{14x} = \frac{z}{7}$$

$$\frac{7}{17x}$$

$$7x = \frac{19}{14x} + e$$

$$7x - \frac{19}{14x} = e$$

$$7 \cdot 14x^2 - 19 = e \cdot 14x \quad \Rightarrow \quad 7(14x^2 - 19) = e \cdot 14x$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 14 \\ \hline 98 \\ 14 \\ \hline 238 \\ 576 \\ -238 \\ \hline 338 \\ 676 \\ -49 \\ \hline 624 \end{array}$$

$$576x^2 + 289x^4 - 14 \cdot 14x^2 + 49 = \frac{19}{14x} \cdot \frac{14x}{7(14x^2 - 19)}$$

$$= 676$$

$$z = 14x^2 - 19$$

$$289x^4 + 338x^2 - 624 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(-45x^2 + 15x + 2)^2$$

$$(45x^2 - 15x - 2)^2 = (-45x^2 + 15x + 2)(-45x^2 + 15x + 2)$$

$$= 45 \cdot 45x^4 - 45 \cdot 15x^3 - 45 \cdot 2x^2 - 45x^2 \cdot 15x + 225x^2 + 30x - 150x^2 + 30x + 4 =$$

$$= 5625x^4 - 2250x^3 - 300x^2 + 225x^2 + 60x + 4 =$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 345 \\ 525 \\ \hline 5625 \end{array}$$

$$5625x^4 + 15$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \cdot 15 \\ \hline 345 \\ 45 \\ \hline 1125 \end{array}$$

$$= 5625x^4 - 2250x^3 - 300x^2 + 225x^2 + 60x + 4$$

$$-9x - 1 = b$$

$$\sqrt{t^2 + b} = t + b$$

$$5625x^4 - 2250x^3 - 45x^2 + 60x + 4 = 36x^4 - 36x^3 + 36x^2 - 42x + 8$$

$$\sqrt{t^2 + b} = \sqrt{t^2 + 2bt + b^2}$$

$$3x^2 - 6x = -1$$

$$3x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$D = 36 - 12 = 24$$

$$t = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$t^2 = 3x^2 - 6x + 2$$

$$t^2 + 9x = 3x^2 + 3x + 2$$

$$t^2 + 9x - 1 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$t^2 = 3x^2 + 3x + 1 - 9x + 1$$

$$\sqrt{t^2 + (-9x + 1)} + t = -9x + 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + (9x - 1) = -(9x - 1)$$

$$b^2 + 2bt - b = 0$$

$$b(b + 2t - 1) = 0$$

$$b = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = t$$

$$9x - 1 = b$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{b+t} = -b$$

$$t - 2\sqrt{(b+t)t} + b + t = b^2$$

$$2t + b - b^2 = 2\sqrt{(b+t)t}$$

$$t = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$t^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$t^2 - 9x + 1 = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\sqrt{t^2 - 9x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{a}{b}$ несократима

$\frac{a}{b}$ - несократима

$$\frac{a+b}{a^2+4ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-2ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-2ab}$$

$\frac{b}{a}$ несократима.

$\frac{2ab}{a+b} = [M]$

$m = a+b$

$[5+4]$

или

$\frac{2ab}{a+b} = x$

$\frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{x}$

$\frac{a}{b}$ - несократимо
 $a \neq b = \frac{2ab}{a+b}$ - да

$\frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{x}$

$(a+b)!$

$\frac{2ab}{a+b}$

$\frac{2ab}{x} = [a+b]$

не может иметь одну делитель
 $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{a+b}$

$\frac{4 \cdot 5 - 4}{5 \cdot 4}$

$\frac{a}{b}$ - несократима

$2ab = x(a+b)$

$2ab = xa + xb$

$\frac{ab}{a+b} \leftarrow$ не может делиться

$xa - 2ab + xb = 0$

$xa - 4ab - 5ab + 5b = 0$

$\frac{45}{9} = \frac{4+5}{4+5}$

$a(x-4b) + b(5x-5a)$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{a+b}{ab}$

$\frac{3 \cdot 2}{3+2} = \frac{4 \cdot 3}{3+4}$

$\frac{ab}{a+b} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



abc

$$b = 2^5 \Rightarrow a = \frac{2 \cdot 7^7 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}}{2^5} = 2^{11} \cdot 7^{18}$$

$$\frac{ab}{2^{15} \cdot 7^{11}} = x \quad \begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{matrix}$$

$$\frac{bc}{2^{17} \cdot 7^{18}} = y$$

$$\frac{ac}{2^{23} \cdot 7^{39}} = z \quad c = \frac{2^{25} \cdot 7^{39}}{2^{11} \cdot 7^{18}} = 2^{14} \cdot 7^{18}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$a + c + 2b \geq 29$$

$$a + c + 2b \geq 29$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$a + b + c \geq 11 \quad 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$= x \cdot \frac{2^{17} \cdot 7^{18}}{2^{15} \cdot 7^{11}} = 1$$

$$\frac{ac}{2^{23} \cdot 7^{39}} = 1$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$2(a+b+c) \geq 68$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x$$

$$a + c \geq 23$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2^{17} \cdot 7^{18}}{2^{23} \cdot 7^{39}} = \frac{1}{2^6 \cdot 7^{21}}$$

$$a + b + c \geq 34$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$b + c \geq 17$$

$$b \geq -5$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a + b \geq 15$$

$$2a + 2b + 2c \geq 55$$

$$2^6 \cdot 7^{18} b = a \cdot b$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2^6 \cdot 7^{18}}$$

$$2(a+b+c) \geq 55$$

$$\frac{ab}{2^{15} \cdot 7^{11}} = ab$$

$$b \cdot 2^6 \cdot 7^{18} = a$$

$$a + b + c \geq \frac{55}{2} = 27,5$$

$$\frac{2^6 \cdot 7^{18} b^2}{2^{15} \cdot 7^{11}} = 1$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x$$

$$a + b + c \geq 27,5$$

$$b^2 = \frac{2^{15} \cdot 7^{11}}{2^6 \cdot 7^{18}}$$

$$\frac{b \cdot 2^6 \cdot 7^{18}}{2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x} = \frac{a}{ab}$$

$$a + b + c = 28$$

$$b^2 = \frac{2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x}{2^6 \cdot 7^{18}} = \frac{2^9 \cdot x}{7^7}$$

$$x = 2 \cdot 7^7$$

$$b^2 = 2^{10}$$

$$b = 2^5$$

$$abc = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot 2^5 = 2^{28} \cdot 7^{39}$$