



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!

$$\frac{ab}{2^{15} \cdot 7^{11}} = x; \quad \frac{bc}{2^{14} \cdot 7^{13}} = y; \quad \frac{ac}{2^{23} \cdot 7^{39}} = z$$

Рассмотрим  $\frac{ac}{2^{23} \cdot 7^{39}} = z$ , то есть если мы возьмем  $y$  и  $ac$  только  $7^{39}$ , то их произведение будет больше или равно  $7^{39}$   $\Rightarrow$  если мы найдем наименьшее произведение чисел  $\Rightarrow$  нам выгодно, чтобы  $\frac{ac}{7^{39}} = 2^x \cdot b$  какой-то степени  $x \Rightarrow$  если мы разобьем  $z$  по крайней мере: например  $a = 2^4 \cdot 7^{19}$ ,  $c = 2^9 \cdot 7^{20}$ , то  $b$  может не иметь делителя  $7^x$  вообще  $\Rightarrow$  тогда  $b = 2^x$

С двойками так не получится, в каждой степени  $2^x$  должно иметь делитель  $2^x$  чтобы было минимальное произведение

Теперь нам нужно найти минимальный  $x$ :

$$\begin{cases} a_2 + c_2 \geq 23 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \\ a_2 + b_2 \geq 15 \end{cases} \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 55 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 27,5$$

*степень 2 у а, 2-ки у с. больше делителей не будет*

Так как нам нужно мин. целое  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 = 28, \text{ например}$$

$$a_2 = 11; c_2 = 12; b_2 = 5; \text{ тогда } abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ:  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

подставим например, что  $a_2 + c_2 = 23 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow b_2 = 5 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow b_2 + a_2 = 15 \Rightarrow a_2 = 10 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow c_2 = 13 \leftarrow$  подходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



известно, что  $\frac{a}{b}$  - несократима  $\Rightarrow \frac{ab}{a+b}$  также несократима.

$$\frac{a+b}{a^2-4ab+b^2} - \text{самый большой } m \text{ может быть, если}$$
$$m = a+b, \text{ тогда } \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} : (a+b) \Rightarrow \frac{9ab}{a+b}, a \neq b$$

выше  $\frac{ab}{a+b}$  - не делится и не сокращается  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{9}{a+b} \Rightarrow m \text{ наибольшая равна } 9.$$

Ответ:  $m = 9$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



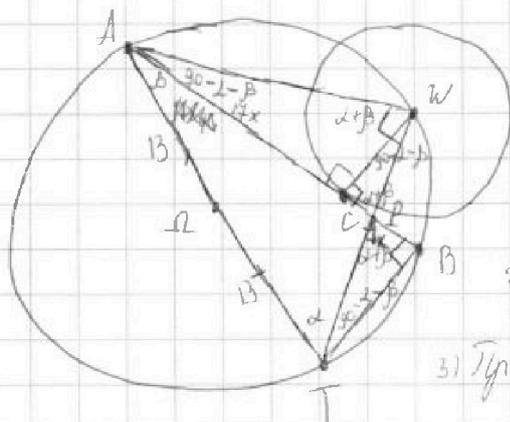
Дано

$$\frac{AC}{CB} = \frac{14}{7}$$

$$R(\omega) = 4$$

$$r(\Omega) = 13$$

$AB = ?$



1) Проведем  $WC$ ;

$WC \perp AB$ , так как радиус  
к касательной  
диаметр

2) Проведем  $A\Omega$

3) Проведем  $AW$ ;  $WB$ ;  $WT$ ;  $BT$ ;

4)  $\angle AWT = \angle ABT = 90^\circ$ ,  $\Delta$  к  
описывается на дуге.

Пусть  $\angle BAT = \beta$ ,  $\angle WTA = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle WAC = 90 - 2 - \beta \Rightarrow \angle AWC = 2 + \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CWP = 90 - 2 - \beta \Rightarrow \angle WPC = 2 + \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle TPB = \angle CPW (\text{как вершины}) = 2 + \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle PTB = 90 - 2 - \beta$$

а)  $\Delta AWC \sim \Delta CWP$  (по 2-м углам)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{WC}{AC} = \frac{CP}{WC} \Rightarrow CP = \frac{WC^2}{AC} = \frac{49}{14x}$$

б)  $\Delta WCP \sim \Delta PBT$  (по 2-м углам)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{WC}{BT} = \frac{CP}{PB} \Rightarrow \frac{7}{BT} = \frac{49}{14x \cdot PB}$$

$$в) CB = 7x = CP + PB = \frac{49}{14x} + PB \Rightarrow PB = 7x - \frac{49}{14x} =$$

$$= \frac{7 \cdot 14x^2 - 49}{14x} = \frac{7(14x^2 - 7)}{14x}$$

г) из (б)

$$BT = \frac{7(14x \cdot PB)}{49} = \frac{14x}{7} \cdot \frac{7(14x^2 - 7)}{14x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BT = 14x^2 - 7$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение

10) Тогда по т. Пифагора из  $\triangle$ ка  $ABT$ :

$$AT^2 + BT^2 = AB^2$$

$$BT^2 + AB^2 = AT^2$$

$$(14x^2 - 4)^2 + (24x)^2 = 26^2$$

$$289x^4 - 2 \cdot 7 \cdot 14x^2 + 49 + 576x^2 = 676$$

$$289x^2 - 238x^2 + 576x^2 - 676 - 49 = 0$$

$$289x^2 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$D = 338 \cdot 338 + 4 \cdot 289 \cdot 627 = 4(169 \cdot 169 + 289 \cdot 627) = 2^2 \cdot 458^2$$

$$x^2 = \frac{-338 \pm 2 \cdot 458}{2 \cdot 289} = \frac{-169 \pm 458}{289} = \left[ \begin{array}{l} \sqrt{2} \\ 1 \end{array} \right.$$

$\leftarrow$   $\sqrt{2}$  или не подходит

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 24x = 24$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение

$$2) \quad b = 1 - 2t$$

$$1 - 9x = 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$$

Возведем в квадрат;  $x \geq 0$

$$4(3x^2 + 3x + 1) = 81x^2$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$81x^2 - 12x - 12x - 4 = 0$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 69 = 1248 = 12 \cdot 14 = 8 \cdot 2 \quad 12 \cdot 104 = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 26 = 4^2 \cdot 48$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{48}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm 4 \cdot 4\sqrt{3}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm 16\sqrt{3}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 8\sqrt{3}}{69}$$

← подходит

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{9}; \quad x = \frac{6 + 2\sqrt{48}}{69}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Замена:

$$\left. \begin{aligned} t &= \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ v &= 1 - 9x \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$t^2 - 9x + 1 = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\sqrt{t^2 - 9x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$\sqrt{t^2 + v} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2 + v} - t = v$$

$$\sqrt{t^2 + v} = v + t$$

$$t^2 + v = v^2 + 2vt + t^2$$

$$v^2 + 2vt - v = 0$$

$$v(v + 2t - 1) = 0$$

$$\left[ \begin{aligned} v &= 0 \\ v &= 1 - 2t \end{aligned} \right.$$

1)  $v = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$  ← ~~т.к.~~ подставим, т.к.  
а не учитывая ОДЗ.

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{9^2} - \frac{6}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{9^2} + \frac{3}{9} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{3}{81} + \frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{12}{9}} \leftarrow \text{подходит}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

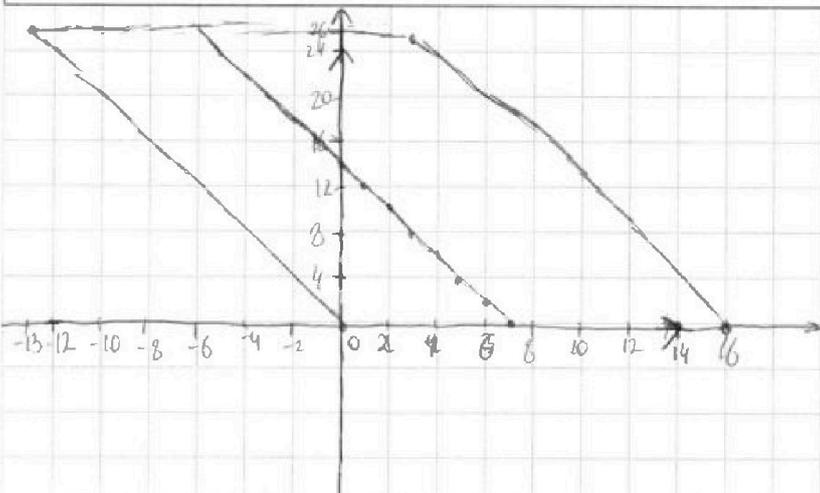
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4 ур-ия прямой

$$y = 0; \quad y = 26.$$

$$y = -2x; \quad y = -2x + 32$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 26 \\ 2x + y \geq 0 \\ y + 2x - 32 \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  должны выполняться условия для точки находящейся в этой прямой.

тогда:  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$$\begin{matrix} (2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 14 \\ \underline{\quad \quad \quad} \\ \quad \quad \quad \geq 0 \end{matrix}$$

$$(2x_2 + y_2) \geq 14 + (2x_1 + y_1)$$

Заметим  $2x_2 + y_2 \geq 14 \Rightarrow$  это граница

Также заметим, что каждой точке соответствует только одна точка  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  у нас область подограничена вторым

точек получается от  $x=4$  и заканчивая

от  $x=16 \Rightarrow$  это ровно 10 прямых с убывающими

показателями (без границ вл)  $\Rightarrow$  получили  $y \in [0, 26]$  - это 24 точки  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  всего пар =  $10 \cdot 24 = 240$

границы этих точек это прямая  $y = -2x + 14$

всей этой прямой переходя первая точка  $(0; 0)$

Ответ: 240 пар.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

из 1020

$$y = 8b - ax$$

подставим во второе

$$(x^2 + (8b - ax)^2 - 1)(x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$(x^2 + 64b^2 - 16abx - 1)(x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 144 - 16abx - 248b + 24ax - 16) \leq 0$$

$$(x^2(a+1) - 16abx - 1 - 64b^2)(x^2(a+1) + x(24a - 16ab) + 64b^2 + 144 - 16 - 248b) \leq 0$$

Вот это выражение, чтобы иметь всего 2 корня должно либо сворачиваться в квадрат, и причем оба выражения, либо дискрим. Одно из них должно быть отрицательным.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

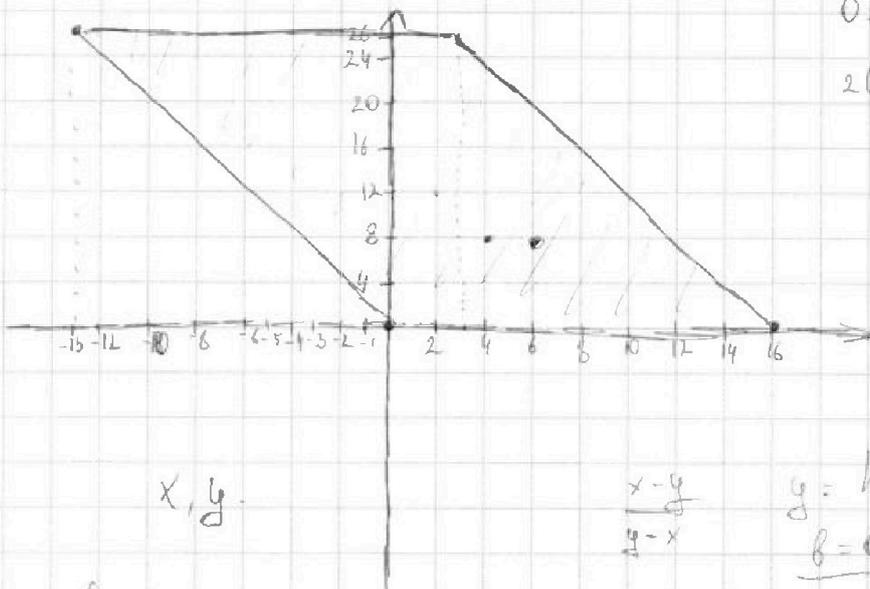
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

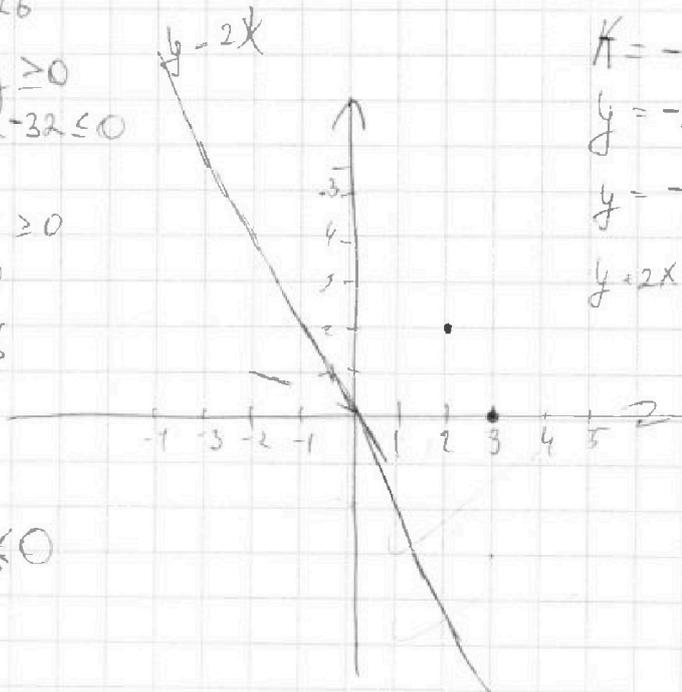


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x, y$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 26 \\ 2x + y \geq 0 \\ y + 2x - 32 \leq 0 \\ y - 2x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 26 \end{cases}$$



$$y - 2x \leq 0$$

$$-2x + y \leq 0$$

$$2x - y \leq 0$$

$$\boxed{2x - y \geq 0}$$



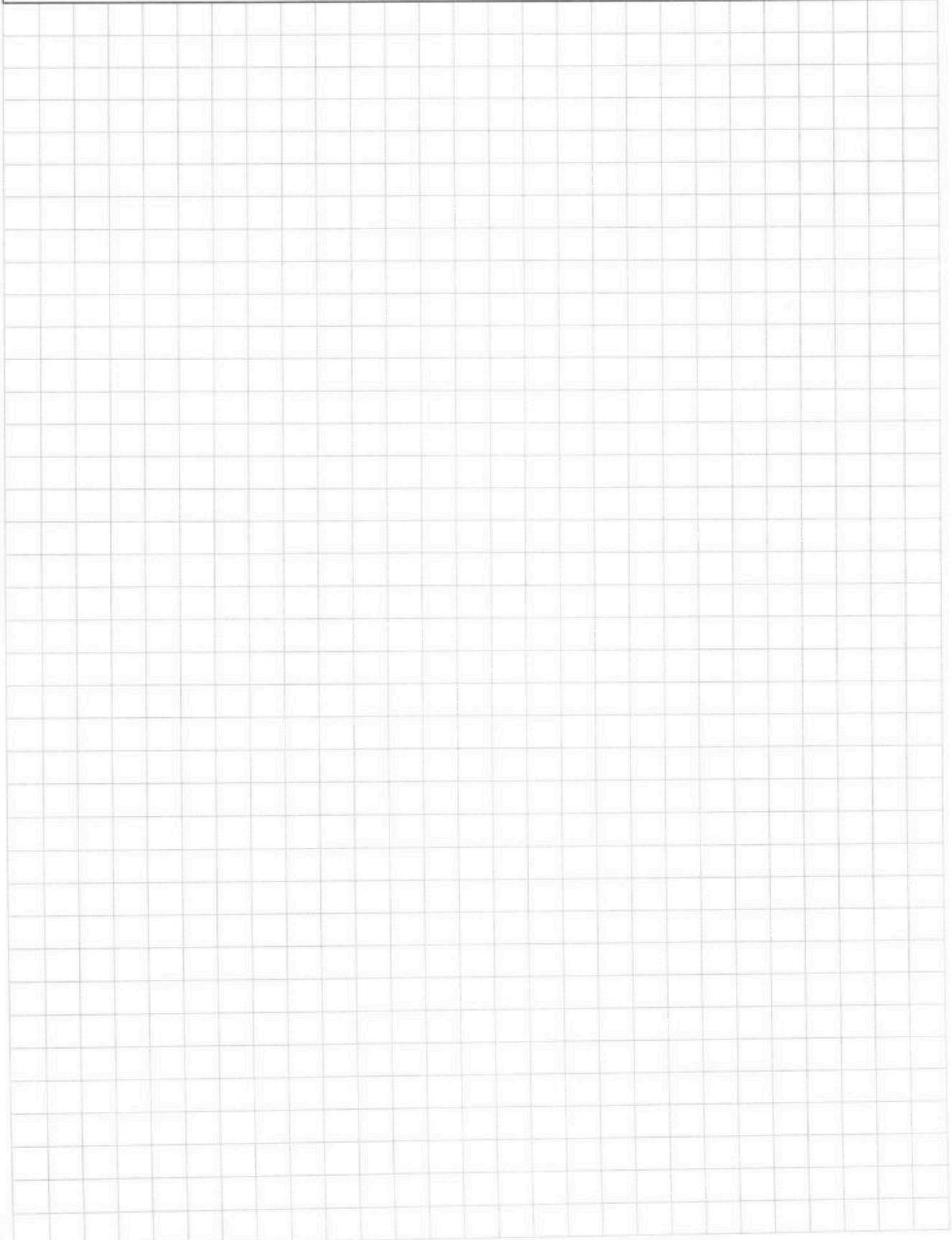
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{-338 \pm 2 \cdot 458}{2 \cdot 289} = \left[ \frac{-338 + 2 \cdot 458}{2 \cdot 289} = \frac{-169 + 456}{289} = 1 \right]$$

$$\begin{array}{r} 458 \\ 34 \overline{) 126} \\ \underline{118} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 458 \\ -169 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\sqrt{3 \frac{1}{9} \frac{1}{9} - \frac{6}{9} + 2} = \sqrt{3 \frac{1}{9} \frac{1}{9} + \frac{13}{9}}$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 676 \\ \hline 49 \\ 627 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 12 \\ \hline 24 \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 546 \\ 238 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 14 \\ \hline 196 \\ 28 \\ \hline 476 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 98 \\ 14 \\ \hline 258 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1248 \\ 12 \overline{) 48} \\ \hline 114 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 69 \\ \hline 474 \\ 69 \\ \hline 1004 \\ 1004 \\ + 144 \\ \hline 1218 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ 1014 \\ 169 \\ \hline 28561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 289 \\ \hline 627 \\ 2023 \\ 548 \\ \hline 1734 \\ + 181203 \\ \hline 28561 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 458 \\ \times 458 \\ \hline 3664 \\ 2290 \\ \hline 1632 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$12 - 14 = 12 - 104 = 12 - 104$$

$$\begin{array}{r} 1146 \\ 10 \overline{) 14} \\ \hline 544 \\ 4 \\ \hline 14 \\ 16 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3^2 = 36 - 24 = 12$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} + 3x^2 + 3x + 1 = 1 - 18x + 61x^2$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 1 + 18x - 81x^2 = 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$-45x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = 1 + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-45x^2$$

$$\textcircled{1} = 36 - 83 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = \left[ \begin{array}{l} \frac{3 + \sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{3 - \sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x}$$

$$(3x^2 - 6x + 2) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} =$$

$$= 9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x - 6x + 6x^2 + 6x + 2 = \frac{3 - \sqrt{33}}{30} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}}$$

$$- 9x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 18x + 2 \quad \frac{3 - \sqrt{33}}{30} \sqrt{30 - 10\sqrt{3}}$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 18x + 2} + 3x^2 + 3x + 1 = 1 - 18x + 61x^2$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 1 + 18x - 61x^2 = 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 18x + 2}$$

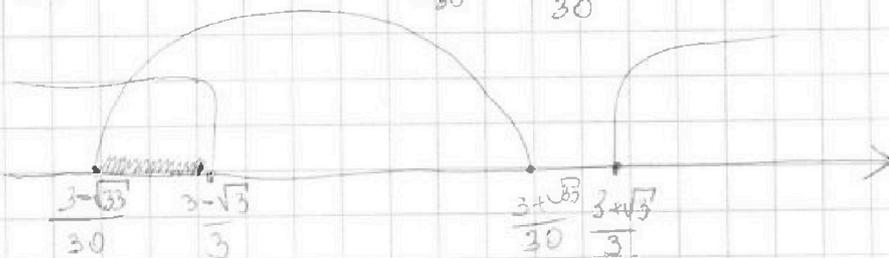
$$-45x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 18x + 2}$$

$$\textcircled{2} = 225 + 8 \cdot 75 = 825 = 25 \cdot 33$$

$$x = \frac{-15 \pm 5\sqrt{33}}{-150} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{-30} = \left[ \begin{array}{l} \frac{-3 - \sqrt{33}}{-30} = \frac{3 + \sqrt{33}}{30} \\ \frac{-3 + \sqrt{33}}{-30} = \frac{3 - \sqrt{33}}{30} \end{array} \right.$$

$$\frac{75}{8} = 9.375$$

$$\begin{array}{r} 825 \overline{) 225} \\ 45 \overline{) 103} \\ 145 \\ \hline 45 \end{array}$$



$$-45x^2 + 15x + 2$$

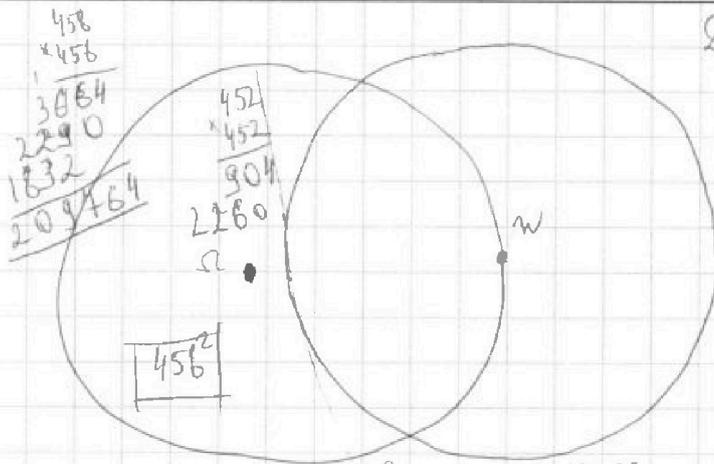
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

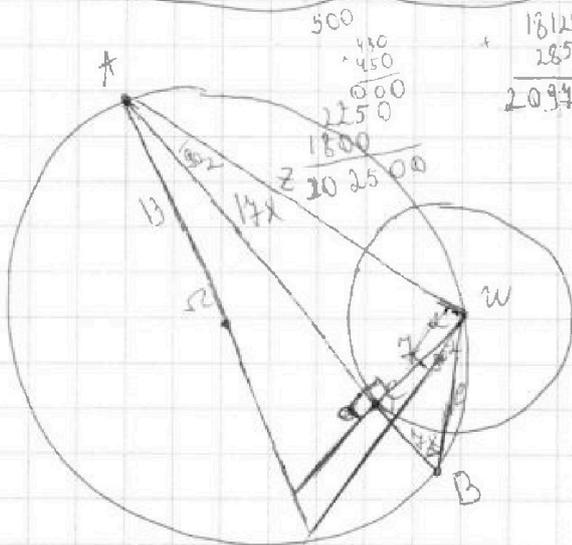


$$D = 336 \cdot 338 + 4 \cdot 289 \cdot 624$$

$$4(169 \cdot 169 + 289 \cdot 624) = 4 \cdot 458^2$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 1169} \\ \underline{213} \\ 128 \\ \underline{12} \\ 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \overline{) 1521} \\ \underline{169} \\ 1014 \\ \underline{1014} \\ 1619 \\ \underline{1619} \\ 17 \end{array}$$



$$4 \cdot 13 \quad \begin{array}{r} 1254 \\ 181203 \end{array}$$

$$z^2 = 49 + 289x^2$$

$$e^2 = 49 + 49x^2$$

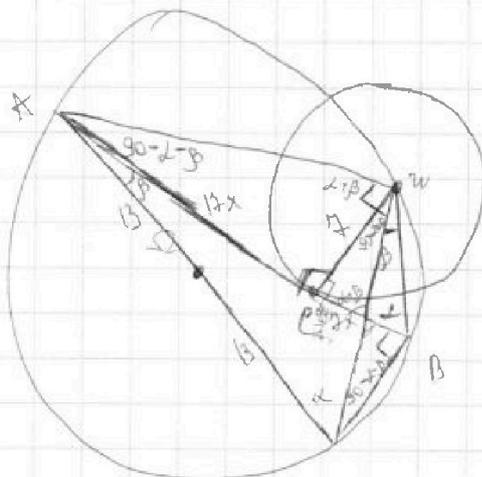
$$z^2 + e^2 = 576x^2 \quad x^2 =$$

$$z^2 + e^2 = 98 + 338x^2$$

$$z^2 + e^2 = 576x^2$$

$$576x^2 - 338x^2 = 98$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 21 \\ \underline{96} \\ 48 \\ \underline{576} \\ 289 \\ \underline{49} \\ 338 \\ 6 \\ \underline{546} \\ -338 \\ \hline 238 \end{array}$$



$$\frac{z}{19x} = \frac{z}{7}$$

$$\frac{19}{17x}$$

$$7x = \frac{19}{17x} + e$$

$$7x - \frac{19}{17x} = e$$

$$7 \cdot 17x^2 - 19$$

$$= e = \frac{7(17x^2 - 19)}{17x}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \underline{26} \\ 156 \\ \underline{52} \\ 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \underline{14} \\ 98 \\ 14 \\ \underline{238} \\ 546 \\ \underline{238} \\ 338 \\ 6 \\ \underline{636} \\ -49 \\ \hline 624 \end{array}$$

$$576x^2 + 289x^4 - 14 \cdot 17x^2 + 49 = \frac{7}{z} = \frac{49 \cdot 17x}{z(17x^2 - 19)}$$

$$= 646$$

$$z = 17x^2 - 19$$

$$289x^4 + 338x^2 - 624 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(-45x^2 + 15x + 2)^2$$

$$(45x^2 - 15x - 2)^2 = (-45x^2 + 15x + 2)(-45x^2 + 15x + 2)$$

$$= 45 \cdot 45x^4 - 45 \cdot 15x^3 - 45 \cdot 2x^2 - 45x^2 \cdot 15x + 225x^2 + 30x - 150x^2 + 30x + 4 =$$

$$= 5625x^4 - 2250x^3 - 300x^2 + 225x^2 + 60x + 4 =$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 345 \\ 525 \\ \hline 5625 \end{array}$$

$$5625x^4 + 15$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \cdot 15 \\ \hline 345 \\ 45 \\ \hline 1125 \end{array}$$

$$= 5625x^4 - 2250x^3 - 300x^2 + 225x^2 + 60x + 4$$

$$-9x - 1 = b$$

$$\sqrt{t^2 + b} = t + b$$

$$5625x^4 - 2250x^3 - 45x^2 + 60x + 4 = 36x^4 - 36x^3 + 36x^2 - 42x + 8$$

$$\sqrt{t^2 + b} = \sqrt{t^2 + 2bt + b^2}$$

$$3x^2 - 6x = -1$$

$$3x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$D = 36 - 12 = 24$$

$$t = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$t^2 = 3x^2 - 6x + 2$$

$$t^2 + 9x = 3x^2 + 3x + 2$$

$$t^2 + 9x - 1 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$t^2 = 3x^2 + 3x + 1 - 9x + 1$$

$$\sqrt{t^2 + (-9x + 1)} \cdot -t = -9x + 1$$

$$b^2 + 2bt - b = 0$$

$$b(b + 2t - 1) = 0$$

$$b = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + (9x - 1) = -(9x - 1)$$

$$3x^2 - 6x + 2 = t$$

$$9x - 1 = b$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{b+t} = -b$$

$$t - 2\sqrt{(b+t)t} + b+t = b^2$$

$$2t + b - b^2 = 2\sqrt{(b+t)t}$$

$$t = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$t^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$t^2 - 9x + 1 = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\sqrt{t^2 - 9x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{a}{b}$  несократима

$\frac{a}{b}$  - несократима

$$\frac{a+b}{a^2+4ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-2ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-2ab}$$

$\frac{b}{a}$  несократима.

$\frac{2ab}{a+b} = [M]$

$m = a+b$

$[5+4]$

или

$\frac{2ab}{a+b} = x$

$\frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{x}$

$\frac{a}{b}$  - несократимо  
 $a \neq b = \frac{2ab}{a+b}$  - да

$\frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{x}$

$(a+b)$

$\frac{2ab}{a+b}$

$\frac{2ab}{x} = [a+b]$

не может иметь одну  
 $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{a+b}$  делится

$\frac{4 \cdot 5 - 4}{5 \cdot 4}$

$\frac{a}{b}$  - несократима

$2ab = x(a+b)$

$2ab = xa + xb$

$\frac{ab}{a+b} \leftarrow$  не может делиться

$xa - 2ab + xb = 0$

$xa - 4ab - 5ab + 5b = 0$

$\frac{45}{9} = \frac{4+5}{4+5}$

$a(x-4b) + b(5x-5a)$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{a+b}{ab}$

$\frac{3 \cdot 2}{3+2} = \frac{4 \cdot 3}{3+4}$

$\frac{ab}{a+b} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



abc

$$b = 2^5 \Rightarrow a = \frac{2 \cdot 7^7 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}}{2^5} = 2^{11} \cdot 7^{18}$$

$$\frac{ab}{2^{15} \cdot 7^{11}} = x \quad \begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{matrix}$$

$$\frac{bc}{2^{17} \cdot 7^{18}} = y$$

$$\frac{ac}{2^{23} \cdot 7^{39}} = z \quad c = \frac{2^{25} \cdot 7^{39}}{2^{11} \cdot 7^{18}} = 2^{12} \cdot 7^{18}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$b+c \geq 16 \quad ab$$

$$a+c+2b \geq 29$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$a+b \geq 11 \quad 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$= x \cdot \frac{2^{17} \cdot 7^{18}}{2^{15} \cdot 7^{11}} = 1$$

$$\frac{ac}{2^{23} \cdot 7^{39}} = 1$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$2(a+b+c) \geq 68$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x$$

$$a+y \geq 23$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2^{17} \cdot 7^{18}}{2^{23} \cdot 7^{39}} = \frac{1}{2^6 \cdot 7^{18}}$$

$$a+b+c \geq 34$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$b+c \geq 17$$

$$b \geq -5$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a+b \geq 15$$

$$2a+2b+2c \geq 55$$

$$2^6 \cdot 7^{18} b = a \quad b$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2^6 \cdot 7^{18}}$$

$$2(a+b+c) \geq 55$$

$$\frac{ab}{2^{15} \cdot 7^{11}} = ab$$

$$b \cdot 2^6 \cdot 7^{18} = a$$

$$a+b+c \geq \frac{55}{2} = 27,5$$

$$\frac{2^6 \cdot 7^{18} b^2}{2^{15} \cdot 7^{11}} = 1$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x$$

$$a+b+c \geq 27,5$$

$$b^2 = \frac{2^{15} \cdot 7^{11}}{2^6 \cdot 7^{18}}$$

$$\frac{b \cdot 2^6 \cdot 7^{18}}{2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x} = \frac{a}{ab}$$

$$a+b+c = 28$$

$$b^2 = \frac{2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x}{2^6 \cdot 7^{18}} = \frac{2^9 \cdot x}{7^7}$$

$$x = 2 \cdot 7^7$$

$$b^2 = 2^{10}$$

$$b = 2^5$$

$$abc = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot 2^5 = 2^{28} \cdot 7^{39}$$