



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



№ [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

№ [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

№ [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

№ [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad ab: 2^{15} 7^{11} \quad bc: 2^{17} 7^{18} \quad ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^{k_1} \cdot 7^{m_1} \cdot x_1 \quad b = 2^{k_2} \cdot 7^{m_2} \cdot x_2 \quad c = 2^{k_3} \cdot 7^{m_3} \cdot x_3 \quad (k_1, m_1, k_2, m_2, k_3, m_3, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N})$$

$$ab: 2^{15} \Rightarrow 2^{k_1} \cdot 2^{k_2} \geq 2^{15} \Rightarrow k_1 + k_2 \geq 15$$

$$ac: 2^{23} \Rightarrow 2^{k_1} \cdot 2^{k_3} \geq 2^{23} \Rightarrow k_1 + k_3 \geq 23$$

$$bc: 2^{17} \Rightarrow 2^{k_2} \cdot 2^{k_3} \geq 2^{17} \Rightarrow k_2 + k_3 \geq 17$$

Имеем:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 \geq 15 \\ k_1 + k_3 \geq 23 \\ k_2 + k_3 \geq 17 \end{cases} \Rightarrow 2(k_1 + k_2 + k_3) \geq 15 + 23 + 17 \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 \geq \frac{55}{2} = 27,5$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 \geq 28$$

$$ac: 7^{39} \Rightarrow abc: 7^{39}$$

$$k_1 + k_2 + k_3 \geq 28 \Rightarrow abc: 2^{28}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow abc: 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Пример на $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

$$a = 2^{10} \cdot 7^{21} \quad b = 2^5 \quad c = 2^{13} \cdot 7^{18}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{21} : 2^{15} \cdot 7^{11} \quad bc = 2^{18} \cdot 7^{18} : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{10+5+13} \cdot 7^{21+18} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Число $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$ и есть пример на

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

v2

$$\text{НОД}(a, b) = 1 \quad a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$$

Если $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ (т.к. $\frac{9}{8}$ несократ.) можно сократить на m , то

$$a+b \equiv 0 \pmod{m} \quad a^2-7ab+b^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a \equiv -b \pmod{m} \quad (-b)^2-7(-b) \cdot b+b^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$b^2+7b^2+b^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$9b^2 \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow 9b^2; m$$

Допустим, что $\text{НОД}(b^2, m) \neq 1$. Тогда $b^2: k$ и $m: k$, $k \in \mathbb{N}$,
 $\Rightarrow b: k$

но $\text{НОД}(a, b) = 1$ не годит $\Rightarrow a \not: k \Rightarrow a+b \not: k \Rightarrow$ не можем

сократить на $m \Rightarrow (b^2, m) = 1 \Rightarrow (b, m) = 1 \Rightarrow 9 \equiv 0 \pmod{m}$

$$9: m \Rightarrow m \leq 9$$

Пример при $m=9$

$$a=4 \quad b=5 \quad : \quad \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{4^2-7 \cdot 4 \cdot 5+5^2} = \frac{9}{16+25-140} = \frac{9}{-99} = \frac{1}{-11}$$

Ответ: $m=9$

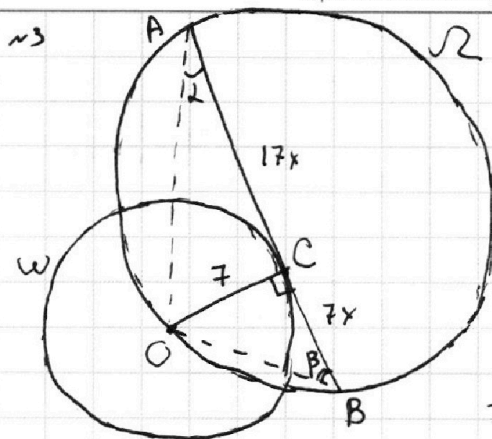
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $AC:CB = 17:7$, $r_\omega = 7$, $r_\Omega = 13$
И-ти: $AB = ?$

Решение:

C - точка касания, OC - радиус \Rightarrow
 $\Rightarrow OC \perp AB$ $OC = r_\omega = 7$

$\angle DAC = \alpha$, $\angle OBC = \beta$

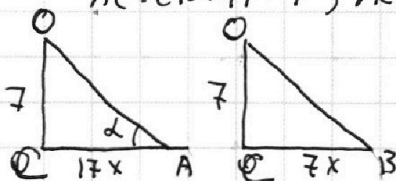
$AC:CB = 17:7$, $AC = 17x$, $CB = 7x$, $AB = 24x$

По Т. Пифагора $\triangle OAC$

$$OA = \sqrt{289x^2 + 49}$$

По Т. Пифагора $\triangle OBC$

$$OB = \sqrt{49x^2 + 49}$$



$$\sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49}}$$

$$\sin \beta = \frac{7}{7\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

По Т. синусов в $\triangle AOB$

из $\triangle OBC$ $BO = \frac{7}{\sin \beta}$

$$\sin \alpha = \frac{BO}{AB} = \frac{7}{24x} \cdot \sin \beta = 26$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{7}{26} = \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$289x^2 + 49 > 0 \quad x^2 + 1 > 0$$

$$26 = \sqrt{(289x^2 + 49)(x^2 + 1)} \quad \uparrow^2$$

$$676 = 289x^4 + 338x^2 + 49$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

Решим относительно x^2

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{627}{289} \end{cases}, \text{ но } x^2 > 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \quad (\text{т.к. } x > 0, \text{ т.к. это длина})$$

$$x = 1 \Rightarrow 24x = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 4

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x^2$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 - 2\sqrt{(3x^2-6x+2) \cdot$$

$$\cdot (3x^2+3x+1)} = 81x^2 - 18x + 1$$

Ограничения:

$$3x^2-6x+2 \geq 0$$

$$3x^2+3x+1 \geq 0$$

$$-2\sqrt{9x^4+9x^3+9x^2-18x^3-18x-6x+6x^2+6x+2} = 75x^2-15x-2$$

$$4(9x^4-9x^3+9x^2-18x+2) = 5625x^4 + 225x^2 + 4 - 2250x^3 -$$

$$-300x^2 + 60x$$

$$5589x^4 - 2214x^3 - 111x^2 + 132x - 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

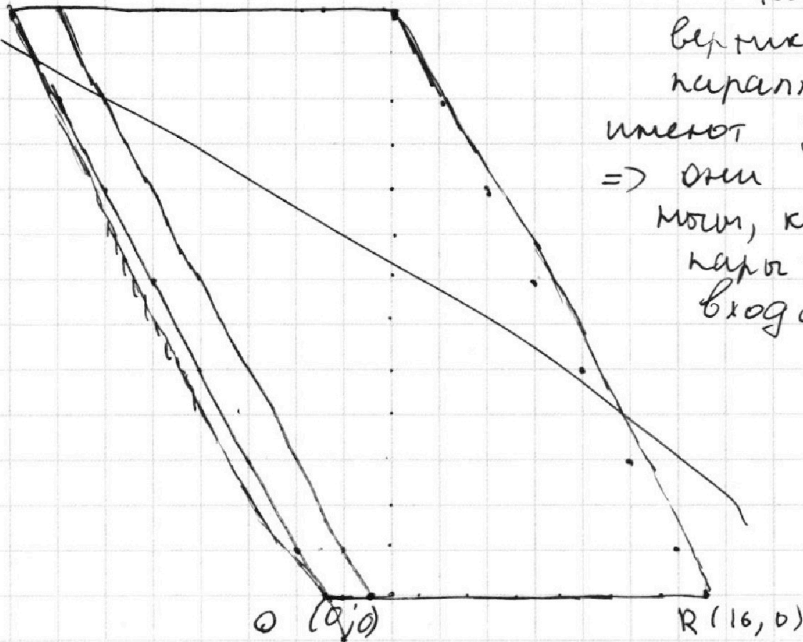


- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

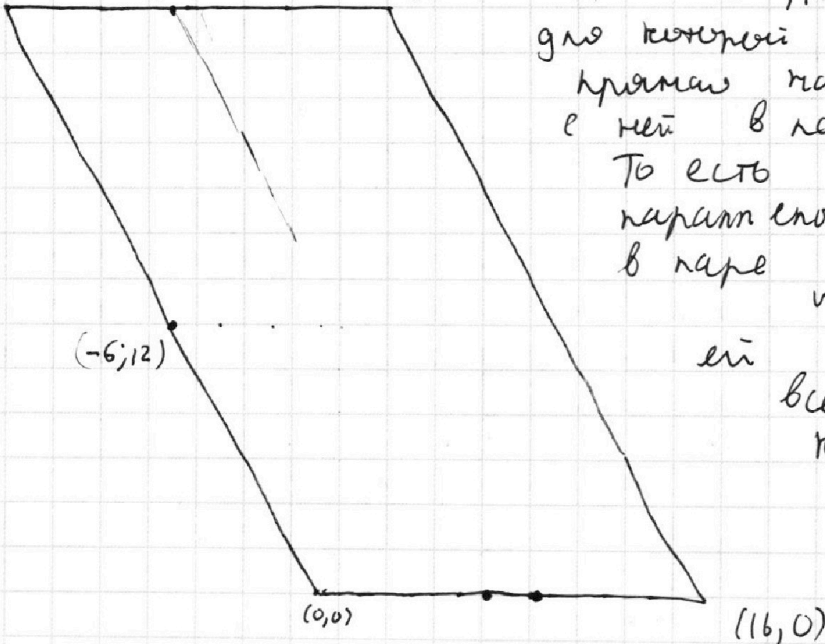
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$P(-13, 26)$ $N(26, 2)$ $(3, 26)$



Также заметим, что
вертикальные стороны
параллелограмма также
имеют угловой коэффициент $\cdot 2 \Rightarrow$
 \Rightarrow они параллельны про-
мым, которые составляют
карты \Rightarrow они тоже туда
входят

$(-13, 26)$ $(-6, 26)$ $(3, 26)$



самая правая
Точка $(-6, 12)$ - первая точка,
для которой существует
прямая шаг 14, стоящая
с ней в паре.
То есть левая сторона
параллелограмма тоже
в паре с $(-6, 26)$, парами
имеющей через

ей

всего 27 точек
коорд. по y

27 · 27 карт
для каждой
карты прямых

Всего таких пар прямых будет 10 (от 0 до 9
по x, если смотреть только стороны $\cdot 1/2$
т.к. по x прямые находятся на расстоянии 7

Ответ: $27 \cdot 27 \cdot 10 = 7290$ карт

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5 (задача 1)

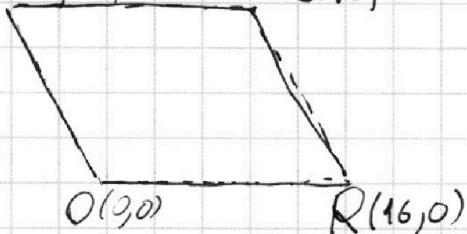
$P(-13; 20)$

$Q(3; 26)$

$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$

с целыми координатами



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$-13 \leq x_1, x_2 \leq 16$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 26$$

Если у нас есть какая-то точка (x_1, y_1) , то

тогда $-2x_1 - y_1 = 14 - y_2 - 2x_2$, где $-2x_1 - y_1$ - фикс.

$$\Rightarrow y_2 + 2x_2 = 14 + 2x_1 + y_1, \text{ это график прямой} \Rightarrow$$

\Rightarrow для точки, точки, которые могут быть (ней в паре лежат на одной прямой)

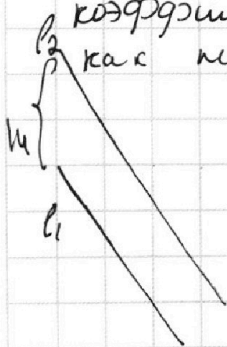
Примем коэф. угла наклона прямой равен

$$k = -2 \quad y_2 = -2 \cdot x_2 + 14 + 2x_1 + y_1$$

Но точки с фикс. $-2x_1 - y_1$ тоже аналогично находятся на одной прямой

То есть: $y_2 + 2x_2 = 14 + \underbrace{2x_1 + y_1}_{\text{прямая}}$

\Rightarrow корректной парой будут являться ^{точки} прямые, которые лежат на двух параллельных прямых (т.е. угловые коэффициенты одинаковые), при этом сумма на 14 больше как показано на рисунке



Каждая точка прямой l_1 с каждой точкой прямой l_2 составляет корректную пару

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (часть 1)

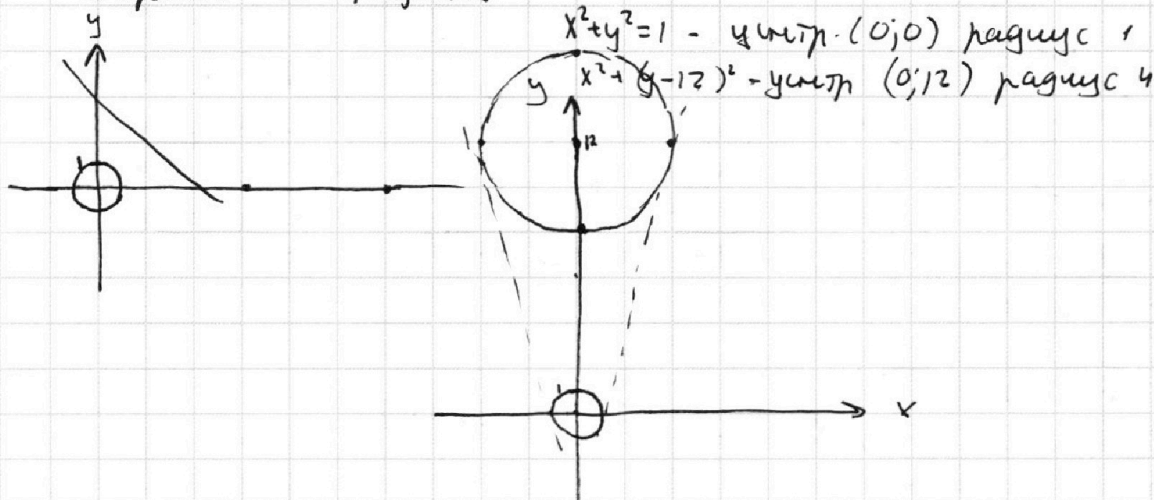
$$\begin{cases} ax+у-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \le 0 \end{cases}$$

(1) Рассмотрим сначала пер-во (2)

$$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \le 0 \quad (2) \quad x^2+y^2=1 \quad x^2+(y-12)^2=16 \quad \text{— нулевые точки}$$

— графики — окр. с рад 1 и 4

Нарисуем эти графики



В точках на окружности (2) замечается, внутри окружности — отрицательного (т.к. графики не пересекаются, а внутри окр. отриц., вне — полож.) \Rightarrow неравенство имеет бесконечно много решений, и это точки на окружностях и внутри них.

(1) это график — прямая

Если прямая пересечет хотя бы одну из окружностей, то будет бесконечно много решений у системы, т.к. ~~каждая~~ подойдут все точки прямой внутри окружности, а по условию нужно ровно 2 решения \Rightarrow прямая не пересекает окружности, если прямая не касается окружности, то тогда с той окружностью нет ни одного решения. Прямая может касаться окружн. ровно в одной точке. Нам нужно 2 решения \Rightarrow \Rightarrow 2 точки касания $\Rightarrow ax+у-8b$ — прямая, которая является касательной к обеим окружностям.

У двух непересекающихся окружностей ровно 2 общие касательные.

Тогда у уравнений ниже должно быть по одному решению

$$ax+у-8b = x^2+y^2-1$$

$$ax+у-8b = x^2+(y-12)^2-16$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (часть 2)

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} + 8b - 1 - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 8b - \frac{a^2}{4} - \frac{5}{4} = 0$$

Должно быть равно нулю радиуса, а это график окр. \Rightarrow

\Rightarrow такое может быть только при радиусе 0

$$\Rightarrow 8b - \frac{a^2}{4} - \frac{5}{4} = 0$$

$$b = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{5}{4}\right) : 8$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2} \quad y = \frac{1}{2}$$

$$ax + y - 8b = x^2 + (y - 12)^2 - 16. \text{ Подставим } x \text{ и } y$$

$$a \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} - 8b = \frac{a^2}{4} + \frac{23^2}{4} - 16$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{527}{4} + 16 = 8b$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{483}{4} = 8b$$

$$b = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{5}{4}\right) : 8 = \left(\frac{a^2}{4} - \frac{483}{4}\right) : 8$$

$$\frac{a^2}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{OB}{\sin \alpha} = 2 \cdot 13 \quad \frac{OA}{\sin \beta} = 2 \cdot 13 \quad \frac{AB}{\sin(180 - \alpha - \beta)} = 2 \cdot 13 \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right)$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{26} \quad \sin \beta \cdot \sin \alpha = 26 \quad AB = 26 \cdot \sin(180 - \alpha - \beta) = ?$$

$$2 \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

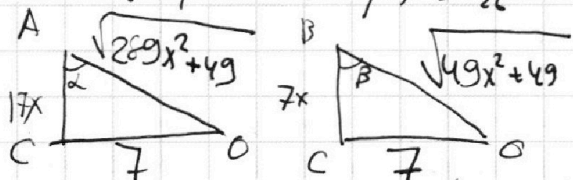
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \beta \sin \alpha + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \beta \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta + \cos \beta \sin \alpha$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} = \frac{87}{26}$$

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \frac{14}{26}$$



$$\sin \beta = \frac{7}{\sqrt{49x^2 + 49}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49}}$$

$$\sin \beta \cdot \sin \alpha = \frac{7}{26} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49}}$$

$$26 = \sqrt{(x^2 + 1)(289x^2 + 49)}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x^2$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 81x^4 - 18x^2 + 1$$

$$-2\sqrt{9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x - 6x + 6x^2 + 6x + 2} = 75x^2 - 15x - 2$$

$$4(9x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 18x + 2) = 5625x^4 - 225x^2 + 4 - 2250x^3 - 300x^2 + 60x$$

$$5589x^4 - 2214x^3 + 216x^2 - 114x^2 + 132x - 4 = 0$$

$$3^5 \cdot 23 \quad 3^3 \cdot 2 \cdot 11 \quad 37 \cdot 3 \quad 3^5 \cdot 2 \cdot 11$$

Handwritten calculations and numbers:

- $x^2 + 1 > 0$
- 289
- $2214 \cdot 9$
- $54 \cdot 18$
- $621 \cdot 9$
- $54 \cdot 81$
- $9 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 23$
- $3^5 \cdot 23$
- $19 \cdot 57$
- $1246 \cdot 13$
- $236 \cdot 54$
- 82
- $12 \cdot 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

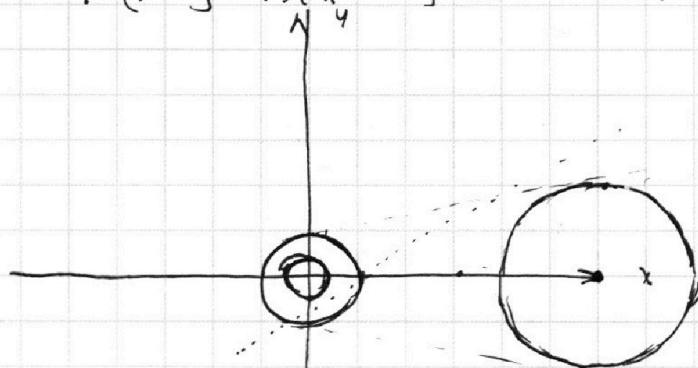
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sim 6 \quad \begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$



$$x^2+y^2-1 \leq 0 \vee x^2+y^2-16 \leq 0$$

Подходят пары (x,y) которые лежат внутри окружностей и на их контурах

Решениями второго уравнения являются

$ax+y-8b=0$ - прямая \Rightarrow все точки ее пересечения и внутри окружностей

решениями \Rightarrow если прямая пересекает, то решения действительное число \Rightarrow прямая не должна пересекать \Rightarrow она может либо касаться, либо не пересекать, но не

\Rightarrow прямая касается обеих окружностей

$$ax+y-8b = x^2+y^2-1$$

$$ax+y-8b = x^2+(y-12)^2-16$$

$$x^2-ax+y^2-y+8b-1=0$$

$$x^2-ax+(y-12)^2-y+8b-16=0$$

$$x^2-ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$x^2-ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} + 8b - 1 = 0$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} + 8b - 1 = 0$$

$$ax+y-8b = x^2+y^2-1$$

$$ax+y-8b = x^2+(y-12)^2-16$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} + 8b - 1 = 0$$

другие решения

это возможно только когда

$$-\frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\frac{16}{64} \cdot 10 = \frac{527}{64} \cdot 483$$

$$\frac{23}{23} \cdot \frac{69}{69} = \frac{45}{529} \cdot \frac{9}{9} + \frac{2}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\text{MOD}(a, b) = 1 \quad a \in \mathbb{N} \quad b \in \mathbb{N} \quad \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$ Алгоритм Евклида

$\text{MOD}(a+b; a^2 - 7ab + b^2) = \text{MOD}(a^2 - 7ab + b^2; a+b) \cdot x$
 $= \text{MOD}(a^2 - 7ab + b^2; a^2 - 7ab + b^2 - a - b) = \text{MOD}(35; 147)$

$\text{MOD}(147, 35) = (112, 35) = (77, 35) = (7, 35) = (28, 7) - (21, 7) = (14, 7) - (7, 7)$

$\text{MOD}(a^2 - 7ab + b^2; a+b) = \text{MOD}(a^2 - 7ab + b^2 - a - b; a+b)$

$a^2 - 7ab + b^2 - k(a+b) = a+b$

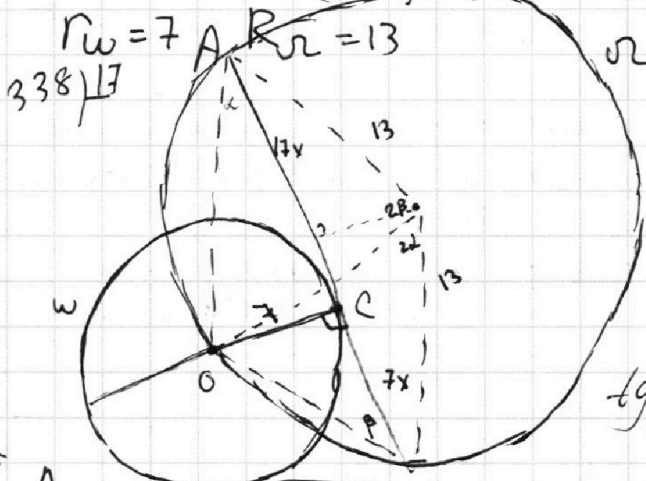
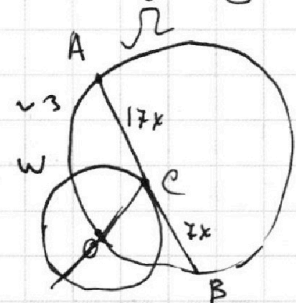
$a^2 - 7ab + b^2 - (k+1)(a+b) = 0$

$a+b = x \quad ab = y$

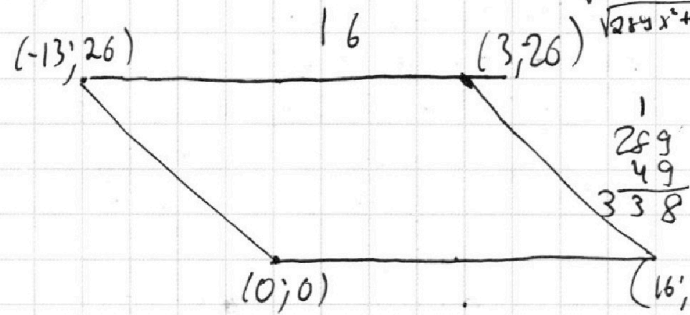
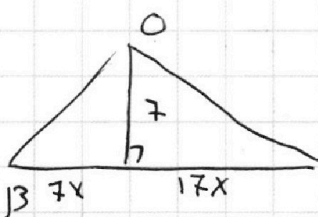
$x^2 - 2y - 7y - (k+1)x = 0$

$a+b : m$
 $a^2 - 7ab + b^2 : m$
 $(a^2 - 2ab + b^2) - 5ab + a + b$
 $(a-b)^2 - 5ab + a + b$

35 147
 $\frac{147}{35} = 4 \frac{7}{5}$
 $\frac{147}{5} = 29 \frac{2}{5}$
 $\frac{147}{2} = 73 \frac{1}{2}$



$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$
 $OB = \frac{7 \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$
 $OA = \frac{7}{\sin \alpha}$
 $\tan \beta = \frac{1}{x} \quad \tan \alpha = \frac{7}{17x}$



$A(x_1, y_1)$
 $B(x_2, y_2)$
 $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$
 $2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$
 $m = k \cdot x$

$a+b \equiv 0 \pmod{m}$

$a^2 - 7ab + b^2 \equiv 0 \pmod{m}$

$b^2 + 7b^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{m}$

$b : m, \text{ то } a \not\equiv m \Rightarrow$

$a \equiv -b$

$b^2 - 7 \cdot b \cdot (-b) + b^2 \equiv 0 \pmod{m}$

$9b^2 \equiv 0 \pmod{m}$

$\Rightarrow a+b \not\equiv m \Rightarrow$

$\Rightarrow b \not\equiv m$

$(b, m) = 1$

$b :$

$m \leq 9$
 $\frac{25}{140} = \frac{25}{16} = \frac{25}{41}$

$4+5$
 $4^2 - 7 \cdot 4 \cdot 5 + 5^2$
 $16 - 140 + 25 = -99$
 $x+2y=26$
 $y+2x$

$2 \cdot \dots \cdot 2$
 $0 \cdot \dots \cdot 0$
 $0+26 \quad 0-26$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$ $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$ $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$ $abc: 2^{23} \cdot 7^{39}$ $-\frac{55}{15} \cdot 27,5$

$a = 2^{k_1} \cdot 7^{m_1} \cdot x_1$, $b = 2^{k_2} \cdot 7^{m_2} \cdot x_2$, $c = 2^{k_3} \cdot 7^{m_3} \cdot x_3$

$ab = 2^{k_1+k_2} \cdot 7^{m_1+m_2}$ $bc = 2^{k_2+k_3} \cdot 7^{m_2+m_3}$ $ac = 2^{k_1+k_3} \cdot 7^{m_1+m_3}$

$k_1+k_2 \geq 15$ $m_1+m_2 \geq 11$ $k_2+k_3 \geq 17$ $m_2+m_3 \geq 18$ $k_1+k_3 \geq 23$ $m_1+m_3 \geq 39$

$2(k_1+k_2+k_3) \geq 15+17+23$ $k_1+k_2+k_3 \geq \frac{55}{2} = 27,5$ $k_1+k_2+k_3 \geq 28$

$2(m_1+m_2+m_3) \geq 11+18+39$ $m_1+m_2+m_3 \geq \frac{68}{2} = 34$

$a = 2^{15} \cdot 7$ $b = 2 \cdot 7$ $c = 2^8 \cdot 7$ $a = 7^2 \cdot 2$ $b = 2$ $c = 7^{18} \cdot 2$

$k_1+k_2+k_3 - k_1 - k_3$

$a+b \geq 15$ $b+c \geq 17$ $a+c \geq 23$ $a+b+c \geq 27,5 \geq 28$

$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$ $a = 2^{10} \cdot 7^{21}$ $c = 2^{13} \cdot 7^{18}$ $b = 2^5$ 5625

$ab = 2^0 \cdot 7^{21} \cdot 2^5 = 2^{15} \cdot 7^{21}$ $bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$ $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$ $214 = 9 - 6 = 3$

2) 4

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$ Ограничения: $3x^2-6x+2 \geq 0$ $3x^2+3x+1 \geq 0$

$3x^2-6x+2 - 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} + 3x^2+3x+1 = 81x^2-18x+1$ $3x^2+3x+1 \geq 0$

$-2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 75x^2-15x-2$ $75x^2-15x-2 \leq 0$

$4(9x^4+9x^3+3x^2-18x-6x+2) = 5625x^4$ $75x^2-15x-2 \leq 0$

$3x^2-6x+2 \geq 0$ $3x^2+3x+1 \geq 0$ $75x^2-15x-2 \leq 0$

$\Delta/4 = 9-23 = -14$

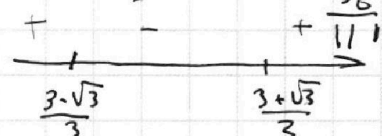
$\Delta = 9-12,10$

$\Delta = 225 + 2 \cdot 4 \cdot 75 = 825 = 5^2 \cdot 33$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{3}$

$\frac{75}{36} - \frac{5625}{36}$

$x_{1,2} = \frac{15 \pm 5\sqrt{33}}{150}$



$4(9x^4-9x^3+9x^2-18x+2) = 5625x^4 + 225x^2 + 4 - 2 \cdot 75 \cdot 15 \cdot 7x^3 - 4 \cdot 75x^2 + 60x$

$36x^4 - 36x^3 + 36x^2 - 72x + 8 = 5625x^4 - 75x^2 - 2250x^3 + 60x + 4$

$5589x^4 - 2214x^3 - 111x^2 + 132x + 4 = 0$

$\Delta = 169^2 + 627 \cdot 289$

$x_1, 0$ $x_2, 1$ $x_3, 2$ $x_4, 3$

$3, 2, 1$

Если у нас есть

x_1, y_1 $-2x_1 - y_1 = 14 - 2x_2 - y_2$

$-2x_1 - y_1 = 14 - 2x_2 - y_2$

