



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1  $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases}$$

1) Если  $\exists$  (например в числе  $a$ )  
есть мн-тель не равный 2 или 7,  
то для поиска минимального  
 $abc$ , мы возьмем  $a$  равное  
числу "а" делённому на этот мн-тель"  
мн-тель; произведение  $abc$  уменьшится, а  
кратность ~~каждой~~ парных произведений не  
на 2 и 7 не изменится.  
Тогда выразим  $a, b$  и  $c$ :

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}; \quad b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}; \quad c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}; \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0$$

$$\begin{cases} ab = (2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2}) : 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc = (2^{\alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_2 + \beta_3}) : 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac = (2^{\alpha_1 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_3}) : 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases} \quad \text{! ГИ-КО}$$

$$2) \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 55, \text{ м.к. } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}, \text{ то} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28. \text{ Для минималь-} \\ \text{ности } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 28. \text{ Пример: } \alpha_1 = 11; \alpha_2 = 4; \alpha_3 = 13 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 15 \geq 15; \alpha_2 + \alpha_3 = 17 \geq 17; \alpha_1 + \alpha_3 = 24 \geq 23 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 11 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 18 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 39 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68; \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34. \text{ - а} \\ \text{это условие уже выполняется} \\ \text{при } \beta_1 + \beta_3 = 39. \text{ Пример:} \end{cases}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \beta_1 + \beta_3 = 39; \quad \beta_1 = 15; \beta_2 = 0; \beta_3 = 24$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 1)  $\frac{a}{b}$  - несократима. Найдем макс.  $m$  на которую можно сократить  $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ ,  $m > 1$   
Если дробь можно сократить на  $m \in \mathbb{N}$ , то  
 $(a+b) : m$  и  $(a^2-7ab+b^2) : m$ . Тогда по усл.  
 $a$  и из выражения  $(a+b) : m \Rightarrow a : m; b : m$   
Если у  $a$  есть общий множитель  $p$  с числом  $m$ , то  
 $(a+b) : m$ , то и  $b : p$ , что невозможно, т.к.  $\frac{a}{b}$  не-  
сократима. С-ко  $\text{НОД}(a; m) = 1; \text{НОД}(a+b; m) = 1$   
(аналогично с  $b$ ).

2)  $(a+b) : m$ . Рассмотрим  $a^2-7ab+b^2 =$   
 $= \underbrace{(a+b)^2}_{:m} - \underbrace{9ab}_{:m} : m$ , с-ко  $9ab$  равно будет  
кратно  $m$ . а т.к.  $\text{НОД}(a; m) = \text{НОД}(b; m) = 1$ , то  
 $9 : m$ . С-ко  $\Rightarrow$  максимальное  $m = 9$   
Пример  $\frac{4}{5}$  - несокр;  $\frac{4+5}{16+25-7 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{41-140} =$   
 $= -\frac{9}{99} = -\frac{1}{11}$   
: $9$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

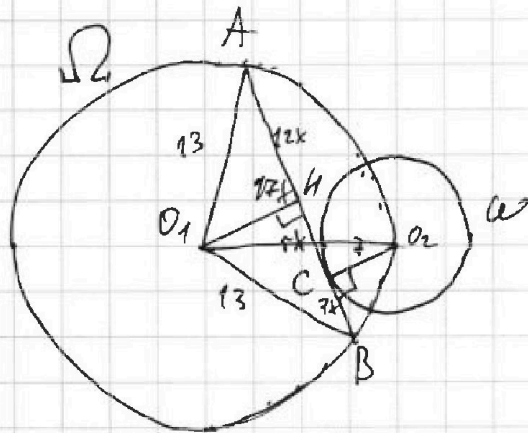
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\Omega_1$ ;  $\omega$  - окружность  
 $\Omega_1(O_1; 13)$ ;  $\omega(O_2; 7)$

$O_2 \in \Omega_1$

AB - хорда  $\Omega_1$  и касательная к  $\omega$  в м C.

AC = 17x; BC = 7x

Найти:

AB

Решение:

1) Проверим  $O_1H \perp AB$ . ИСАВ. По св-ву высоты, проверим-

кой к радиусу  $AH = HB = 12x$ . И  $AC = 12x - 7x = 5x$

Проверим  $O_1O_2 = 13$

$$169 = 144x^2 + 0,4^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

Замена:  $\sqrt{3x^2-6x+2} = a$ ;  $\sqrt{3x^2+3x+1} = b$ ;  $a, b \geq 0$

Заметим, что  $a^2 - b^2 = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 =$   
 $= 1 - 9x = a - b$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = a-b \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$$

1) При  $a-b=0$ :  ~~$a=b$~~

$a-b = 1-9x=0$ ;  $x = \frac{1}{9}$ . Проверка:

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = \sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{4}{3}} = 0, \text{ Сл-но } x = \frac{1}{9} - \text{ корень}$$

2)  $a+b=1$  ~~или замена~~

~~$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \geq 0$~~

~~$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1+2\sqrt{(3x^2+3x+1)(3x^2-6x+2)} = 1$~~

~~Рассмотрим~~

~~$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$~~

~~Рассмотрим  $\sqrt{3x^2+3x+1}$ .~~

~~Найдем минимум покорневому  
выражению  $\sqrt{3x^2+3x+1}$ . параболы  
ветви вверх; минимум в вершине~~

~~$x_B = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$~~

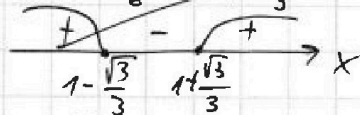
~~$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$~~

ОДЗ:

1.  $3x^2-6x+2 \geq 0$

$D = 36 - 8 \cdot 3 = 12$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$



2.  $3x^2+3x+1 \geq 0$

$D = 9 - 12 = -3 < 0$

Сл-но  $3x^2+3x+1 \geq 0$   
при  $x \in \mathbb{R}$

Ответ:  $\frac{1}{9}$

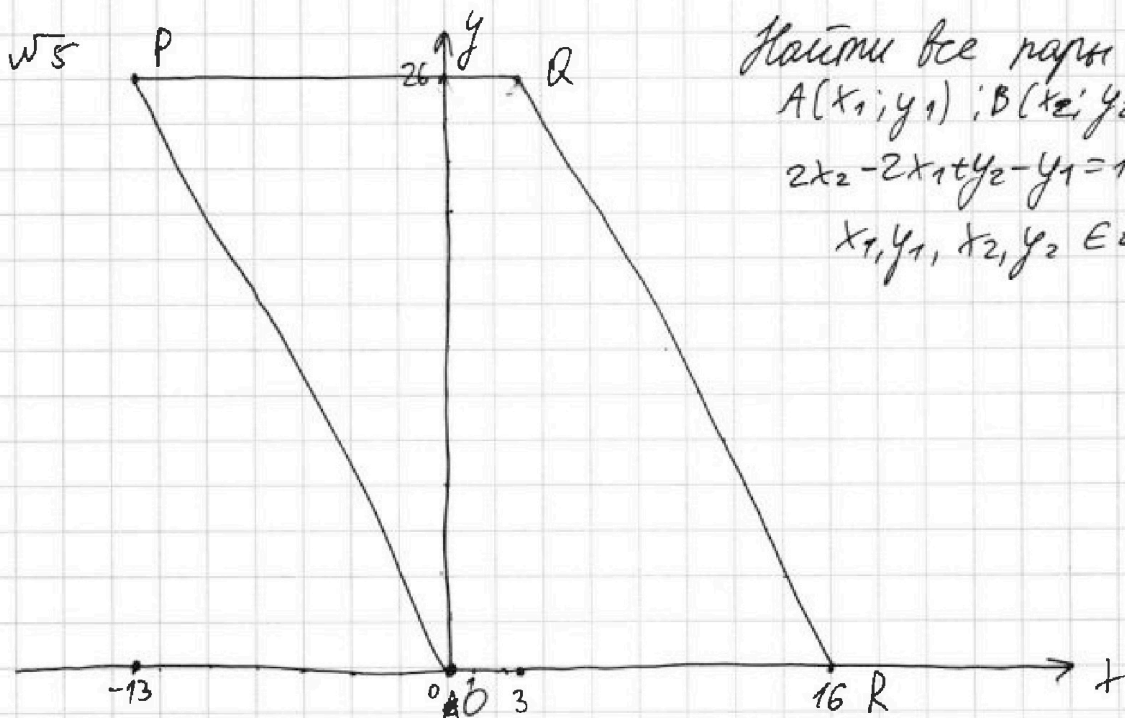
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найти все пары  
 $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$   
 $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$   
 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14 = b, \quad b - \text{параметр. } b \in \mathbb{Z}$$

$$2x_2 + y_2 - b = 0; \quad 2x_1 + y_1 - b + 14 = 0.$$

$y_2 = -2x_2 + b$ ;  $y_1 = -2x_1 + b - 14$ . С-ко для ~~любо~~  
нужно найти для произвольных  $x_2$  и  $y_2$  лежащих  
на прямой  $y = -2x + b$  все ~~те~~ точки принадлежат прямой  
 $y = -2x + b - 14$ . Пусть  $y$  их координаты  $(x_1, y_1)$

$$y_2 - y_1 = -2x_2 + b + 2x_1 - b + 14$$

$$y_2 - y_1 + 2(x_2 - x_1) = 14 - \text{выполняется условие.}$$

$b \in [0; 32]$ , т.к. точки внутри пар.-ли

при  $b \in [0; 13]$ , для  $y_2 = -2x_2 + b$ , не найдётся внутри  
пар.-ли прямая  $y_1 = -2x_1 + b - 14$ . Для каждого  $b \in [14; 32]$   
найдётся прямая  $y = -2x + b - 14$ . Заметим, что наклоны

$OP$ ;  $QR$  и ~~те~~ прямых  $y = -2x + b$ ;  $y = -2x + b - 14$  равны.

На паралл. прямой внутри или на стороне пар.-ли всего  
13 точек. С-ко всего пар  $\neq 13^2 \cdot (33 - 14) = \neq$   
 $= 169 \cdot 19 = 3211$

Ответ: 3211



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{6} 1) \begin{cases} ax+y-8b=0 & (2) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 & (1) \end{cases}$$

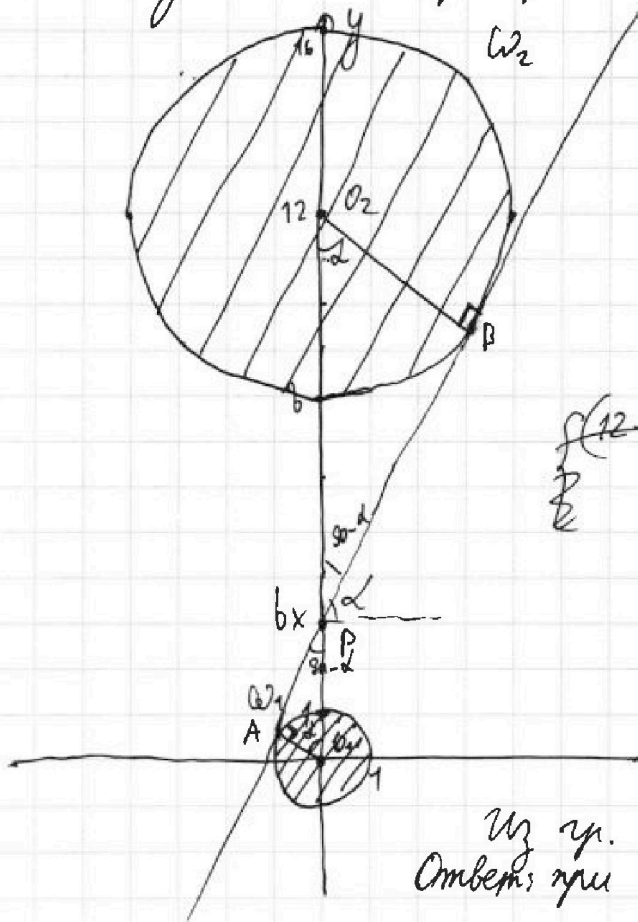
(1):  $x^2+y^2=1$  - окр-сть  $\omega_1(O_1;R_1)$   $O_1(0;0); R_1=1$   
 $x^2+(y-12)^2=16$  - окр-сть  $\omega_2(O_2;R_2)$ ;  $O_2(0;12); R_2=4$

(1).  $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 - \text{внутри } \omega_1 \\ x^2+(y-12)^2 \geq 4 - \text{вне } \omega_2 \\ x^2+y^2 \geq 1 - \text{вне } \omega_1 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 4 - \text{внутри } \omega_2 \end{cases}$$

или границы  $\omega_1; \omega_2$

2)  $ax+y-8b=0$   
 $y = -ax+8b$  - гр. прямая.



2) Проверим "граничную" прямую, условной координатой которой является  $\alpha$ , который является мин. возможным для 2 решений системы.

У нее будет условной координатой  $ax$ . При  $a \in [0; a_x)$  система имеет  $\leq 1$  реш.

Для  $a_x$  найдем  $b_x$ .

$$\begin{cases} (12-bx)^2 = R_2^2 + ax = \rho d \\ \rho d = \frac{BP}{R_2} = \frac{AP}{R_1} \end{cases} \begin{cases} BPR_2 = AP \cdot R_2 \\ AP + BP = \end{cases}$$

$$= (R_1 + R_2) \cos \alpha + AP \sin \alpha + BP \sin \alpha$$

$$BP = 4AP. \quad SAP = 5 \cos \alpha + 5AP \sin \alpha$$

$$AP(1 - \sin \alpha) = \cos \alpha$$

$$AP = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} : \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

Из гр.  $b_x = 3, a_x = 2, Q=10$   
 Ответ: при  $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$   
 $y = 14 - 2x$   
 $14 - 2x = 0$   
 $x = 7$

$54 + 8 = 62$   
 $14 - 2x = 0$   
 $x = 7$

$1521$   
 $-168$   
 $3271$

$-13k + b = 26$   
 $k = -2$      $13 - 13$   
 $-2x$   
 $-2x = 14 - 2x$   
 $0 = 14$

$168$   
 $\times 19$   
 $+1521$   
 $69$   
 $32712$   
 $3x +$

$-6x + 2 = 3x + 1$   
 $9x = 1$   
 $x = \frac{1}{9}$

$2 \Delta x + \Delta y = 14$   
 $(x_2 - x_1; 14 - 2(x_2 - x_1))$

$14 - 2x_1 = y_1$   
 $14 - 2x_2 = y_2$   
 $14 + 2x_2 = 3 - 6 + 2$

$3x^2 - 6x + 2$   
 $\frac{6}{6}$      $33 - 14$   
 $\frac{6}{6}$      $33$   
 $\frac{6}{6}$      $-14$   
 $\frac{6}{6}$      $18$

$y_1 = kx_1 + b_1$   
 $y_2 = kx_2 + b_2$   
 $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) + b_2 - b_1$   
 $y_2 - y_1 = -2(x_2 - x_1) + (b_2 - b_1)$   
 $3x^2 - 6x + 1$   
 $-\frac{3}{-6} = \frac{1}{2}$      $3x(x+1)$   
 $3 - 6x + 1$   
 $3 - \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1$   
 $= \frac{3}{4} - 1.5 + 1$

$14 - 2(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$   
 $x_2 - x_1; y_2$

$x_1 \ y_1$   
 $0; 7$   
 $-6; 26$   
 $x_2 \ y_2$   
 $12 \ -12 + (9 - 14) = -4$

$1$      $25$   
 $\frac{75}{75}$   
 $+175$   
 $2,25$

$3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 1$   
 $\frac{3}{4} + 1.5 =$

$14 - 2x_1 = y_1$   
 $14 - 2x_2 = y_2$   
 $14 + 2x_2 = 3 - 6 + 2$

$2 \Delta x + \Delta y = 14$   
 $(x_2 - x_1; 14 - 2(x_2 - x_1))$

$14 - 2x_1 = y_1$   
 $14 - 2x_2 = y_2$   
 $14 + 2x_2 = 3 - 6 + 2$

$3x^2 - 6x + 2$   
 $\frac{6}{6}$      $33 - 14$   
 $\frac{6}{6}$      $33$   
 $\frac{6}{6}$      $-14$   
 $\frac{6}{6}$      $18$

$y_1 = kx_1 + b_1$   
 $y_2 = kx_2 + b_2$   
 $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) + b_2 - b_1$   
 $y_2 - y_1 = -2(x_2 - x_1) + (b_2 - b_1)$   
 $3x^2 - 6x + 1$   
 $-\frac{3}{-6} = \frac{1}{2}$      $3x(x+1)$   
 $3 - 6x + 1$   
 $3 - \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1$   
 $= \frac{3}{4} - 1.5 + 1$



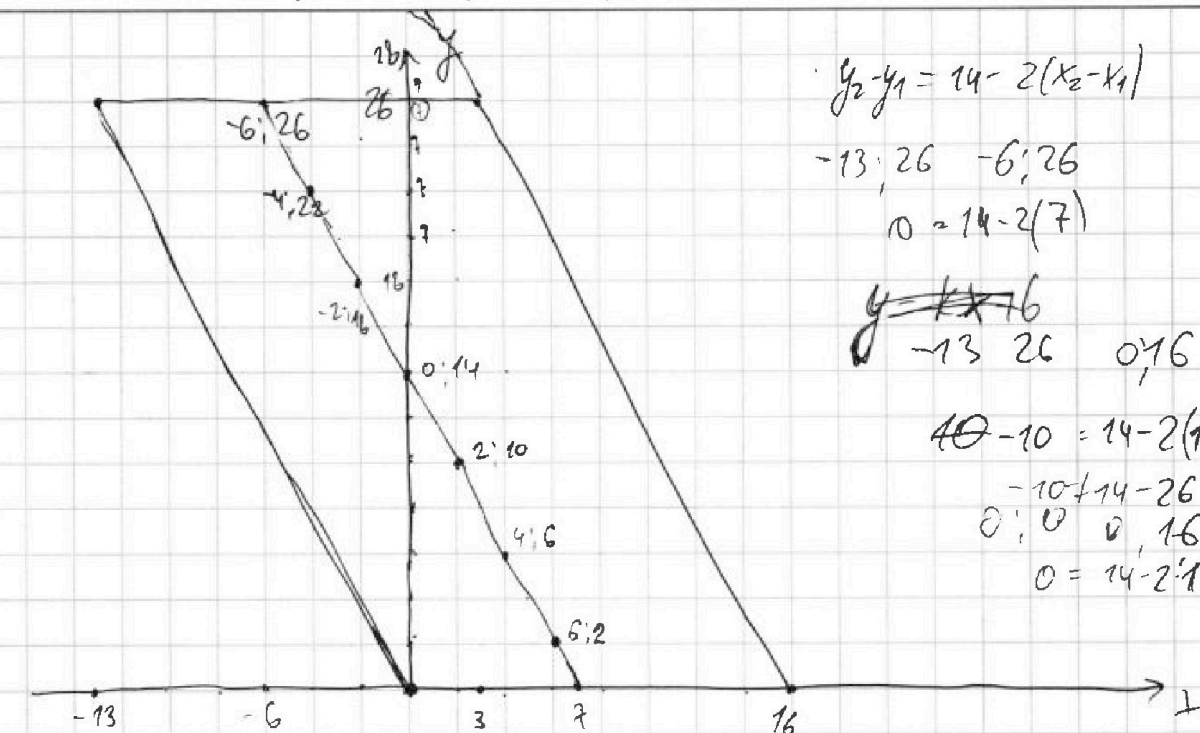
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_2 - y_1 = 14 - 2(x_2 - x_1)$$

$$\begin{matrix} -13; 26 & -6; 26 \\ 0 = 14 - 2(7) \end{matrix}$$

$$y = \cancel{16} \\ -13 \quad 26 \quad 0; 16$$

$$\begin{matrix} 40 - 10 = 14 - 2(13) \\ -10 + 14 - 26 \\ 0; 0 \quad 0; 16 \\ 0 = 14 - 2 \cdot 16 \end{matrix}$$

$$y_1 = y_2 \quad 2(x_2 - x_1) = 14 \\ x_2 - x_1 = 7$$

$$2 \Delta x = 14 - \Delta y \\ \Delta x \in [-25; 25]$$

$$y_2 + 2x_2 - 7 = y_1 + 2x_1 + 7 \\ k_2 x_2 + b_2 + 2x_2 - 7 = k_1 x_1 + b_1 + 2x_1 + 7$$

$$\begin{matrix} -13 & 26 & 3 & 26 \\ 0 = 14 - 2(3 + 13) \end{matrix}$$

$$y_2 - y_1 = -2x_2 - b + 2x_1 - 14 + b \\ 14 + y_2 - y_1 =$$

$$y_2 - y_1 + 2(x_2 - x_1) = 14$$

$$\begin{matrix} 26 \\ 2\Delta x = -12 \\ \Delta x = -6 \end{matrix}$$

$$\Delta x \in [-25; 25]$$

$$\begin{matrix} 16 - 13 \\ 25 \\ -13 - 16 \\ y_1 + 2x_1 + 14 = 2x_2 + y_2 = b \\ \begin{cases} y_1 + 2x_1 + 14 + b = 0 \\ y_2 + 2x_2 + b = 0 \end{cases} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} y_1 = -2x_1 + 14 - b \\ y_2 = -2x_2 - b \end{matrix}$$

$$x_1 y_1 \quad y = (-2x_1 - b) + 14$$

$$x_2 y_2 \quad y = (-2x_2 - b) + 14$$

$$y_1 + 2x_1 + 14 = 2x_2 + y_2$$

$$y_1 = -2x_1 - 14 - b$$

$$y_2 = -2x_2 - b$$

$$y_2 - y_1 + 2(x_2 - x_1) = 14$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



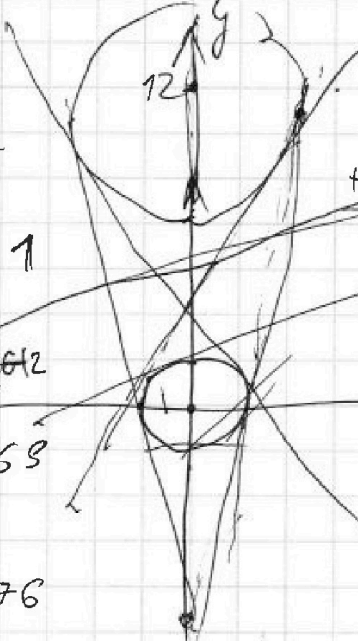
$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = -ax + 8b$$

$$144x^2 + (-ax + 8b)^2 = 169$$

$$144x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 = 169$$

$$(144 + a^2)x^2 - 16abx + 64b^2 - 169 = 0$$



$$\begin{cases} 25x^2 + y^2 + 14y = 120 \\ 144x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

$$119x^2 + 14y = 49$$

$$y = \frac{119x^2 - 49}{14}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ \times 2 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$y = \frac{17x - 7}{2}$$

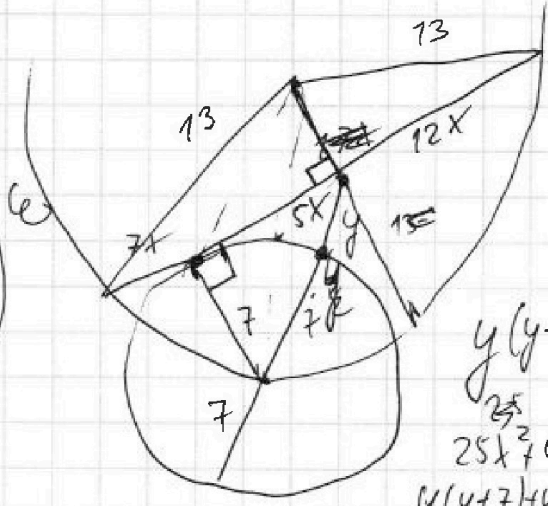
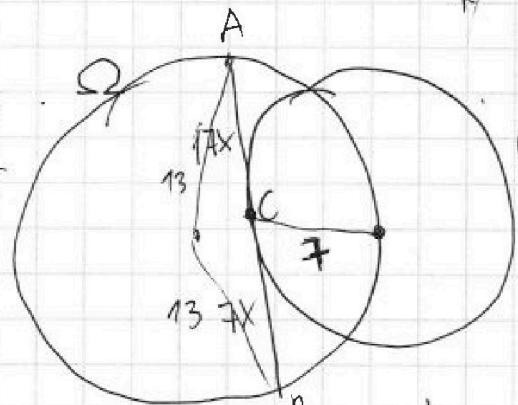
$$11 - 18 = -7$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 7 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$144x^2 + \frac{(17x-7)^2}{4} = 169$$

$$576x^2 + 289x^2 - 238x + 49 = 676$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array}$$



$$y(y+7) = 25x^2$$

$$25x^2 + 49 = (y+7)^2$$

$$y(y+7) + 49 = (y+7)^2$$

$$y^2 + 7y + 49 = y^2 + 14y + 49$$

$$\sqrt{y^2 + 49} + \sqrt{49 + 49} = 13$$

$$MI_1 + MI_2 = 5x$$

$$17x^2 - 49$$

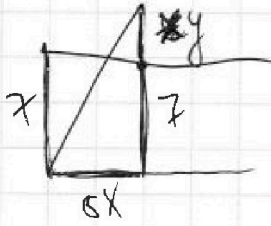
$$(5x)^2 + (y+7)^2 = 169$$

$$144x^2 + y^2 = 169$$

$$25x^2 + y^2 + 14y + 49 = 169$$

$$144x^2 + y^2 = 169$$

$$169x^2 + 2y^2 + 14y + 49$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



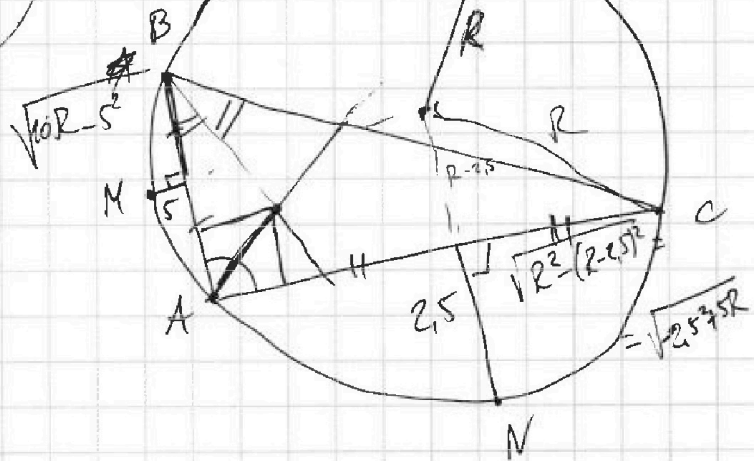
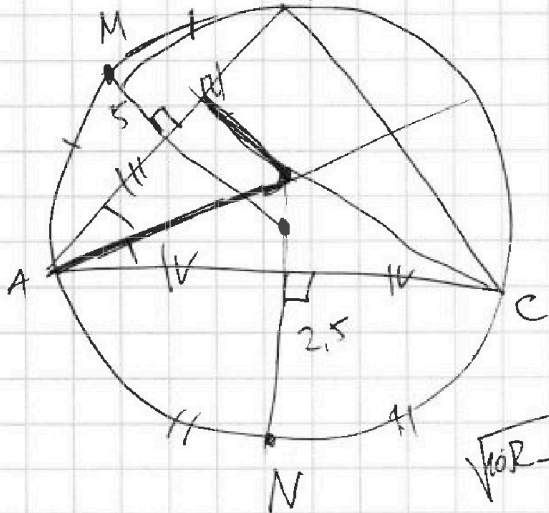
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$576x^2 + 288x^2 - 238x + 48 - 676 = 0$$

$$865x^2 - 238x - 627 = 0$$

$$24x - ?$$



$$\begin{array}{r} \sqrt{576} \\ 288 \\ \hline 865 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 676 \\ -49 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$17-6=11$$

$$\begin{array}{r} 1713 \\ -13 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 865 \overline{) 15} \\ \underline{5} \\ 36 \\ \underline{35} \\ 75 \end{array}$$

$$119$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = a$$

$$a^2 = 3x^2 - 6x + 2$$

$$b^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$a^2 - b^2 = -9x + 1$$

$$y_1 = kx + b$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x + 1$$

$$k(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

$$y_1 + y_2$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1)$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3 \cdot \frac{1}{9} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{5}{3} \quad S = B + \frac{P}{2} - 1$$

$$3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 1 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}(3x^2 + 3x + 1) = 1$$

$$2\sqrt{\dots} = 3x - 6x^2$$

$$4(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1) = 9x^2 - 36x^3 + 36x^4$$

$$4(9x^4 - 9x^3 - 3x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1) = x(x - \frac{1}{2}) \leq 0$$

$$36x^4 - 36x^3 - 48x^2 - 12x + 4 = 36x^4 - 36x^3 - 48x^2 - 12x + 4 = 8x^2$$

$$57x^2 + 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 57 = 144 + 912 = 1056 = 8^2 \cdot 166$$

$$= 1056 = 8^2 \cdot 166$$

$$x = \frac{-12 \pm 8\sqrt{166}}{57}$$

$$2x_2 + y_2 = -(2x_1 + y_1) = 14$$

$$16 \cdot 26$$

$$46 \cdot 26 + 16$$

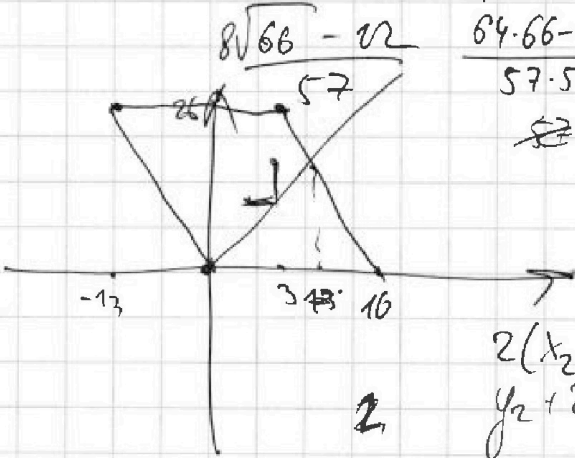
$$+ 216$$

$$+ 26$$

$$476$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$$

$$y_2 + 2x_2 = 14 + y_1 + 2x_1$$



2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2^1 \cdot 6^1 \cdot c$      $ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$      $bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$      $16+25-7 \cdot 4 \cdot 5$     2    4  
 $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$      $a+b$      $(km+n)^2$      $17+23+45=55$      $d_1=11$      $d_3=13$   
 $a^2-7ab+b^2 = km^2+kn^2+kn^2$      $d_2=4$     7    49  
 $ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}$      $bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18}$      $ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$      $\frac{1}{2}$      $\frac{3}{7}$     1  
 $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$      $\frac{4}{5}$      $\frac{9}{9}$      $\frac{1}{2}$      $\frac{3}{7}$     1  
 $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$      $a = 2^{d_1} \cdot 7^{\beta_1} \cdot k_1$   
 $a+b \equiv 0 \pmod{m}$      $b = 2^{d_2} \cdot 7^{\beta_2} \cdot k_2$   
 $(a+b)^2 \equiv 0 \pmod{m}$      $c = 2^{d_3} \cdot 7^{\beta_3} \cdot k_3$   
 $9ab \equiv 0 \pmod{m}$      $abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot k_1 k_2 k_3$   
 $9ab : m$      $32$      $29$      $d_1+d_2 \geq 15$   
 $9ab = km \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$      $d_2+d_3 \geq 17$   
 $(km+n)^2 = 2^{23} \cdot 7^{39}$      $d_3+d_1 \geq 23$   
 $\frac{km}{m} + \frac{kn}{m} = \frac{2^{23} \cdot 7^{39}}{m}$      $2(d_1+d_2+d_3) \geq 55$   
 $\beta_1+\beta_2 \geq 11$      $d_1+d_2+d_3 \geq 28$   
 $\beta_2+\beta_3 \geq 18$   
 $\beta_3+\beta_1 \geq 39$   
 $2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \geq 66$   
 $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 34$   
 $39$   
 $\beta_1=15$   
 $\beta_3=24$

$a^2 - 7ab + b^2$   
 $D = 49b^2 - 4b^2 = 45b^2$   
 $a = \frac{7b \pm 3b\sqrt{5}}{2}$

$9ab : (a+b)$   
 $\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99}$   
 $a+b=45$   
 $22^2+23^2=484+529$   
 $3x^2-6x+2$      $+9x = 1 + \sqrt{3x^2+3x+1}$

$3x^2 - 6x + 2 + 81x^2 + 18x\sqrt{3x^2+3x+1} = 2 + 3x^2 + 3x + 2\sqrt{3x^2+3x+1}$   
 $81x^2 - 6x + 2 + 18x\sqrt{3x^2+3x+1} = 2 + 3x^2 + 3x + 2\sqrt{3x^2+3x+1}$   
 $81x^2 - 9x + 2 + 18x\sqrt{3x^2+3x+1} = 2\sqrt{3x^2+3x+1}$   
 $70$      $-3x-6x^2=2$      $D=9-4 \cdot 2 \cdot 6$