



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

51.

Пусть дано: $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{12} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{38}$$

Найдите делимость:

если $a:m$ и $b:n$, то $ab:mn$

Значит:

$$a^2b^2c^2: 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow a^2b^2c^2 = k \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}, k \in \mathbb{N}$$

Если $abc - \min$, то $a^2b^2c^2 - \min$, значит $k=1$, т.к. $a=0, b=0, c=0, k$
 $\Rightarrow a^2b^2c^2: 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow abc = 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{\frac{32}{2}}$

Задача: $abc = 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{\frac{32}{2}}$

$$a^2b^2c^2 = k \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$abc = \sqrt{k} \cdot 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{\frac{32}{2}}$$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $abc \in \mathbb{N}$, $k - \min \Rightarrow k = \sqrt{k} \in \mathbb{N} \Rightarrow k=2$

Задача: $abc = 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{\frac{32}{2}} = 2^{26} \cdot 7^{32}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

в53.

Дано:

окр-ти ω , $\omega \subset S_2$. $R_\omega = 1$; $R_{S_2} = 5$.

радиусы соотвсствующих окр-тий
 $AB \cap \omega = C$; $AC : CB = 2$. $A, B \in S_2$.

AB-хорда S_2

Найти: AB ?

Решение:

1) Пусть центр ω -окр-ти O , а $\omega - O'$, тогда $O'C = 1$, как радиус к

касательной. Пусть $\angle BAO' = \alpha$, $\alpha < \angle BO' = \beta$, тогда $\angle BO'A = 180 - \alpha - \beta$.

Пусть $AB = 8x$, тогда $AC = 2x$; $BC = x$.

2) $\triangle O$ - силуэт.

$$\frac{AB}{2 \sin(180 - \alpha - \beta)} = 5 \Rightarrow AB = 10 \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow 8x = 10 \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow 4x = 5 \sin(\alpha + \beta)$$

$$3) S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x = 4x, \text{ но бокое и основания,}$$

запись $O'B'C$

$$4) O'B = \sqrt{x^2 + 1} - \text{но } T. \text{ Пифагоре, аналогично } OA = \sqrt{49x^2 + 1} \wedge O'CA.$$

$$5) S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \sin(180 - \alpha - \beta) \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} - \text{но узк между сторонами и соравните}$$

$$6) из (3) и (5) \Rightarrow 4x = \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1}, из пункта (2)$$

$$5 \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 = (x^2 + 1)(49x^2 + 1) \quad 7) AB = 8x = 8 \cdot 1 = 8.$$

$$100 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$

Ответ: 8.

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Rightarrow x^2 = \left[-\frac{1}{\frac{99}{49}} \right] \text{ не подходит} \Rightarrow x = 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7 - 7x \quad \text{N4.}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad \checkmark$$

$$2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 7x - 2$$

$$\begin{cases} 7x - 2 < 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{7} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x < \frac{2}{7}$$

$$7x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{7}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 49x^2 - 28x + 4 = 47x^2 - 30x + 3 \leq 0$$

$$D = 900 - 4 \cdot 42 \cdot 7$$

$$3(300 - 4 \cdot 42) = 3 \cdot 112 = 336 \quad ?$$

$$\frac{30 - 4\sqrt{21}}{94} \sim \frac{30 + 4\sqrt{21}}{94}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (7 - 7x)^2 + 2(7 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$$

$$(7 - 7x)^2 + 2(7 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + (2 - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$+ 2 - 2x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 1 \neq 0$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x - 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{7}$$

$$4(2x^2 + 2x + 1) = 49x^2 - 42x + 9$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 42x + 9$$

$$41x^2 - 50x + 5 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 2500 - 4 \cdot 41.5 \geq 0 \Rightarrow 5(500 - 4 \cdot 41) = 5 \cdot 324 = 5 \cdot 10^2$$

$$x = \begin{cases} \frac{25 + 9\sqrt{5}}{41} & \text{no ODO3.} \\ \frac{25 - 9\sqrt{5}}{41} & \text{Неподходящ. т.к. } < \frac{3}{7}. \end{cases}$$

Ошибки: $x=7$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

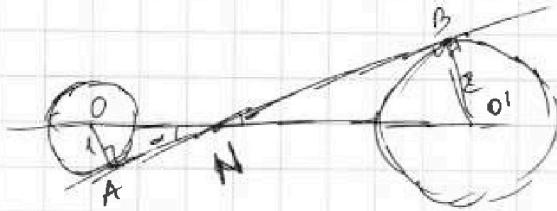
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 2-ой случай касания. Рассмотрим 2-ой случай касания.



Поэтому

$$ON = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$NO' = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$OO' = 8$ - из условия, тогда

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} = 8 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{8}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{1-\frac{9}{64}}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{55}}{8}} = \frac{3}{\sqrt{55}}, \text{; аналогично } \alpha = \tan^{-1} \frac{3}{\sqrt{55}}.$$

Из соображений симметрии относительно оси абсцисс следует, что существуют параллельные "зеркальные" решения, отличные от исходных, $\Rightarrow \alpha = -\frac{3}{\sqrt{55}}$ для симметричного бисектрисы и $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{63}}$

аналогично первое \Rightarrow

$$\tan \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}, \pm \frac{3}{\sqrt{55}} = \pm \frac{1}{\sqrt{57}} ; \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

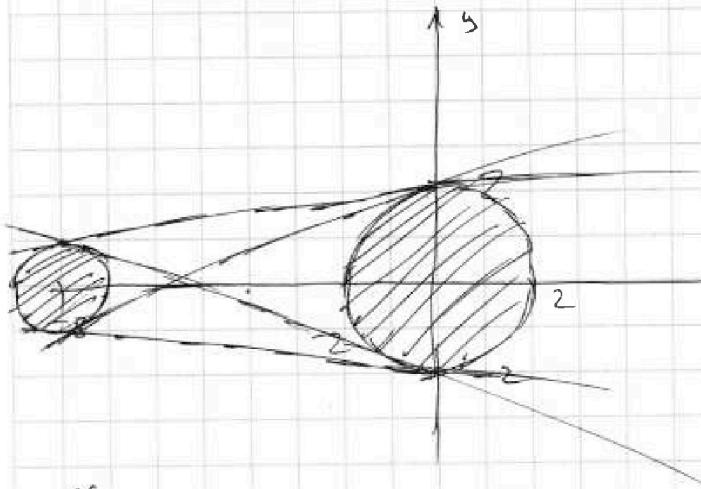


- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

56.



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \quad (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1) (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

(1) - для круга один в с центром
 $b(0;0)$ и радиусом 2, другой
с центром $(-3,0)$ и радиусом 2

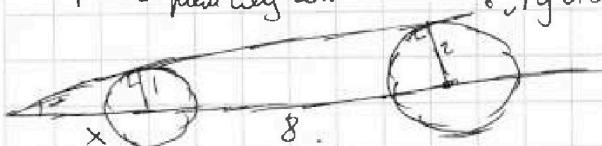
Зарисован на графике второе неравенство (2) - для круга.

Во втором уравнении (1) задает прямую.

По условию надо найти такие a , чтобы существовало такое, что.

Следовательно, можно записать все как показано
ниже для двух кругов.

Рассмотрим случай (1) - $b(\sqrt{5}, 0)$. Тогда x -ось наименее прямой, а y -
расстояние от центра меньший радиус



то касание прямой с осью абсцисс, тогда $\sin\alpha = \frac{l}{x} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{8}$ и то овальный

сторона $\sin\alpha = \frac{2}{x+8} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{2}{x+8} \Rightarrow x+8=16 \Rightarrow x=8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{1-\frac{1}{64}}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{63}}{8}} = \frac{1}{\sqrt{63}}$

из (1)-ого следствует, что $a = \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{63}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$\frac{m^k}{m^2 k^2 - mn} = \frac{k}{mk - n}$$

$$(a+b) \stackrel{?}{=} 0$$

$$ab \stackrel{?}{=} 0$$

$$a+b \stackrel{?}{=} 0$$

$$(a+b)^2 \stackrel{?}{=} 8ab$$

$$(a+b)^2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$a+b = mk$$

$$(a+b)^2 = mn$$

$$m^2 k^2 = mn$$

$$2b^2 \stackrel{?}{=} mn$$

$$b = \frac{mn}{8a}$$

$$m = \frac{8ab}{a^2 - 8ab}$$

$$mn = 8ab$$

$$a+b = mk$$

$$8ab \stackrel{?}{=} 0 \quad -8ab \stackrel{?}{=} 0$$

$$8ab = mn$$

~~затемнить~~

$$m = \frac{8ab}{a^2 - 8ab}$$

$$mn = 8ab$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

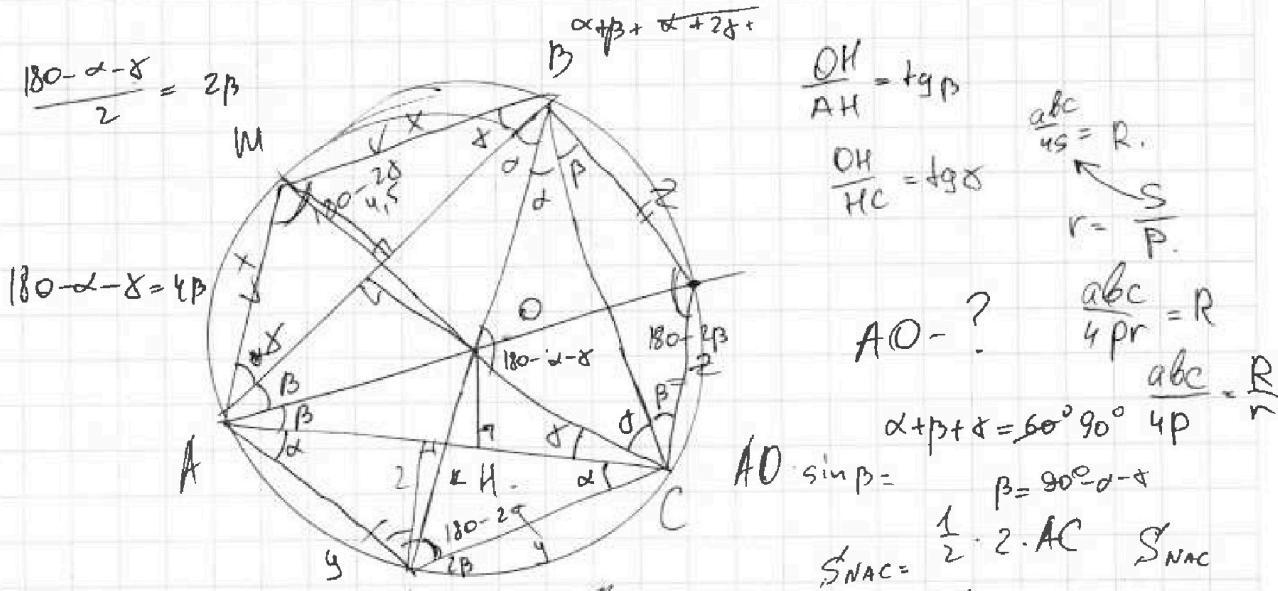
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$180 = 4\beta + \alpha + \gamma$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \beta \cos \beta \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \delta = 2 \cdot \sin \delta = 4,5.$$

$$S_{ABC} = AB \cdot AC \cdot \cos \beta \sin \rho$$

$$\frac{AH}{AB} = \frac{OH}{OB} \quad AC = 2 \cdot y \cos \alpha$$

$$AB = 2R \sin 2\alpha \quad 180 \cdot 4 =$$

$$AC = 2y \cos \alpha \quad 2 \times \cos \alpha = R \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 720^\circ$$

$$BC = 2z \cos \beta \quad x = 2R \sin \alpha$$

$$\text{No: } OM = AN : AB \quad y = 2R \sin \alpha \quad \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

$$2R^2 \sin^2 \alpha = 4,5 \quad z = 2R \sin \beta \quad \boxed{x = \frac{3}{2}y}$$

$$2R \sin^2 \alpha = 2 \quad \sin \beta = \cos(\alpha + \gamma)$$

$$\frac{180 - \alpha - \gamma}{2} + 180 - 4\beta = 180 \quad \frac{\sin \kappa}{\sin \alpha} = \frac{3}{2} \quad \alpha + \beta + 2\gamma + 180 - 2\alpha - \gamma +$$

$$\sin \beta = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma$$

$$180 - \alpha - 2\gamma - \gamma = 180 - \alpha - 3\gamma$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b \equiv 0$$

$$(a-3b)^2 \equiv 8b^2$$

$$a \equiv -b$$

$$a-3b \equiv 2\sqrt{2}b.$$

$$a \equiv 2\sqrt{2}b + 3b.$$

$$(a-3b)^2 \equiv 8b^2 \equiv a+b,$$

$$(a - (3+2\sqrt{2})b)(a - (3-2\sqrt{2})b) \equiv a+b.$$

$$ab =$$

$$a^2 - 6ab + b^2 \equiv 0$$

$$a^2 + b^2 \equiv 6ab.$$

$$a+b \equiv 0$$

$$(a+b)^2 \equiv 8ab$$

$$a+b \equiv 0$$

$$a^2 \equiv b^2$$

$$a^2 \equiv m \cdot b^2$$

$$a = \sqrt{m} \cdot b.$$

$$\Rightarrow a \equiv b.$$

$$a+b \equiv$$

$$\sqrt{a+b} \equiv 0$$

$$a+b = mn.$$

$$\sqrt{a+b}$$

$$a+b = mn, \quad a^2 - 6ab + b^2 = m \cdot n.$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{n} -$$

$$\sqrt{a+b} \equiv 0$$

$$(a+b)^2 - 8ab = mnk.$$

$$85 \equiv 0 \quad m^2 n^2 - 8ab = mnk$$

$$10 = 3 \cdot 5$$

$$m^2 n^2 - mnk - 8ab = 0.$$

~~$$D = k^2 + 32mn^2 ab, \quad D = \frac{k^2}{n^2}$$~~

$$(a+b)^2 = mn, \quad m \cdot n + 8ab$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b = m \cdot n \\ a+b = mn \end{array} \right.$$

$$m^2 n^2 = m \cdot n + 8ab.$$

$$m^2 k^2 - mn - 8ab = 0.$$

$$n^2 + 4k^2 - 8ab$$

$$m = \frac{n}{2k^2} + \sqrt{\frac{n^2}{4k^4} + \frac{8ab}{k^2}}$$

$$m = \frac{n^2 + 32k^2 ab}{2k^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

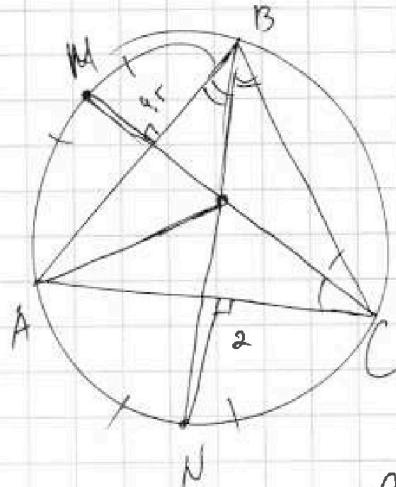
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a+b \equiv 0$$

$$a^2 - 6ab + b^2 \equiv 0$$

$$m^2 k^2 - 2mkb + b^2 - 6 \cdot (mk - b) \cdot b + b^2 \equiv nm.$$

$$m^2 k^2 - 2mkb + b^2 - 6mkb + 6b^2 + b^2 \equiv nm. \quad \begin{matrix} a \neq 0 \\ b \end{matrix}$$

$$m^2 k^2 - 8mkb$$

$$m^2 k^2 - 8mkb + 8b^2 \equiv nm.$$

$$m^2 k^2 - (8kb + n)m + 8b^2 \equiv 0 \quad \begin{matrix} a^2 - 6ab + b^2 \\ a^2 - 6ab + 8b^2 - 8b^2 \end{matrix}$$

$$a^2 - 6ab + 8b^2 \equiv 0$$

$$D = 86ak^2b^2 - 26kbn + n^2 - 32b^2 \equiv 0. \quad \begin{matrix} (a-3b)^2 - 8b^2 \end{matrix}$$

$$(-3b)^2 \equiv 8b^2$$

$$\frac{a+b}{a+b} \quad (-4b)^2 \equiv 8b^2$$

$$(a-3b-2\sqrt{2}b)(a-3b+2\sqrt{2}b)$$

$$s \equiv 0 \quad a=mn$$

$$b^2 = mn \quad b = \sqrt{m \cdot n}$$

$$6b^2 \equiv 8b^2$$

$$\begin{cases} a+b \equiv 0 \\ a^2 - 6ab + b^2 \equiv 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=-b \\ b=mk \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a^2 - 6ab + b^2 \equiv 0 \\ a^2 - 6ab + 8b^2 - 8b^2 \equiv 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a \equiv 0 \\ a \equiv 0 \end{matrix}$$

$$b^2 \equiv 0 \quad b^2 + 6b^2 + b^2 \equiv 0 \quad 8b^2 \equiv 0$$

$$8b^2 \equiv 0$$

$$b^2 \equiv 0$$

3/5

$$a = kb$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8}{9 - 6 \cdot 3 \cdot 5 + 25} = \frac{8}{-86} = -\frac{4}{43} = -\frac{2}{21.5}$$

$$HOR_1(a:b) = 1 = -56$$

$$\begin{cases} a+b = mk \\ a^2 - 6ab + b^2 = nm, \quad a \equiv -b \\ \end{cases}$$

~~запись~~

$$ab = HOR(a:b)$$

$$a = kb + r$$

$$a^2 - 6ab + b^2$$

$$a^2 - 6ab + 8b^2 - 8b^2$$

L

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

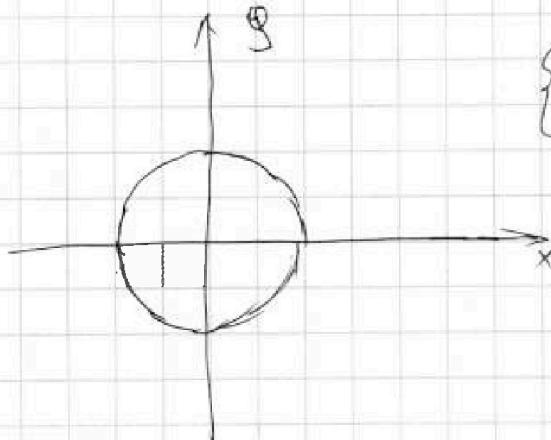
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} a+b=k \\ a^2+bab+b^2=n \end{cases}$$

$$a=b, k \in \mathbb{N}$$

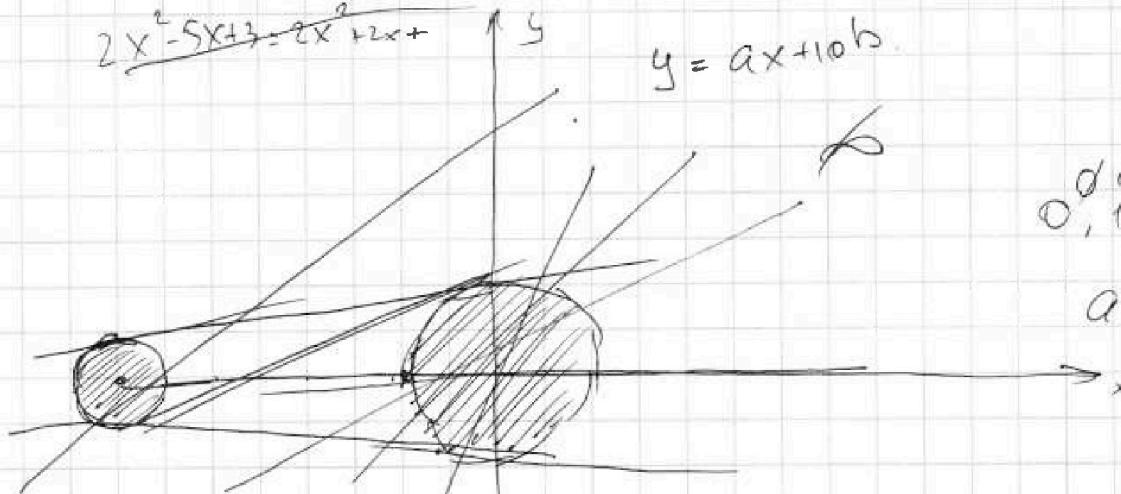
$$\frac{a}{k+b}, k^2b^2 - 6kb + b^2$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x +$$

$$y = ax + 10b$$

0, 1, 2, 3, 4

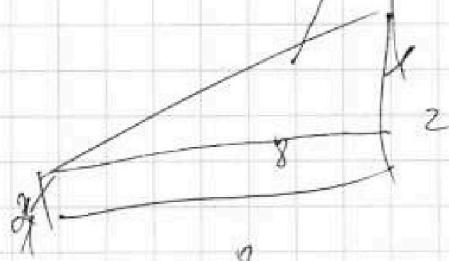
a, b



$$\tan \alpha = \frac{1}{8}$$

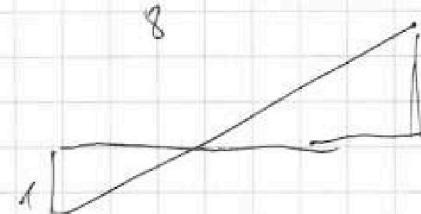
$$a = \frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

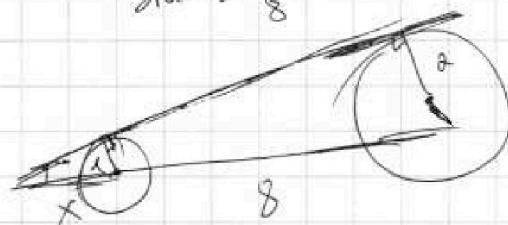


$$\sin \alpha = \frac{1}{10}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{10}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{8}$$



$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+8}$$



$$x+8=2x, \quad x=8.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

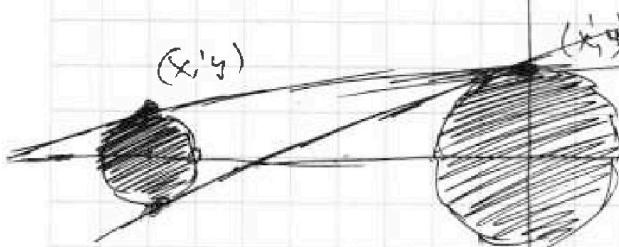
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 10x \quad y = ax + 10b,$$

$$x^2 + y^2$$

$$a = 5 \frac{1}{8}$$



$$\frac{dF(x,y)}{dx} = - \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{y'}{x'}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} \end{array} \right.$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{y^2}{x^2} = \frac{(y')^2}{(x')^2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \quad x$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{(y')^2}{(x')^2}$$

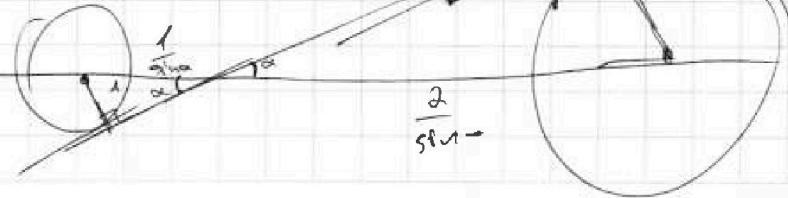
$$\frac{3}{\sin \alpha} = 8$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{8}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{9}{64}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{55}}{8}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$



$$\frac{2}{\sqrt{55}}$$



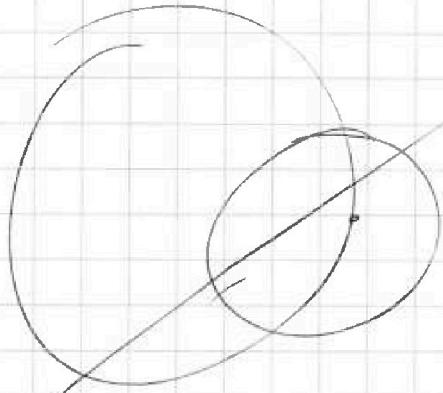
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

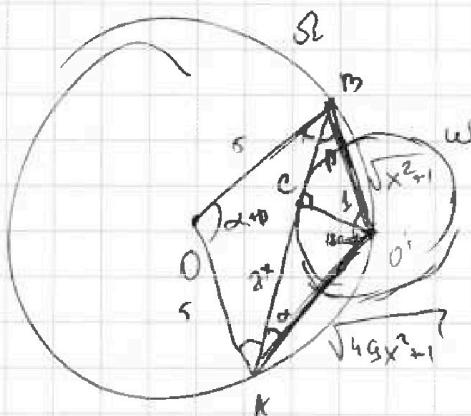
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{2 \cdot \sin(\alpha+\beta)} = r$$

$$AB = 10 \sin(\alpha+\beta) \quad \boxed{4x = 5 \sin(\alpha+\beta)}$$

$$AB = 10 \sin(\alpha+\beta)$$



$$S_{\text{шaded}} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin(\alpha+\beta)$$

$$\frac{180 - \alpha - \beta}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$\angle OAO_1 = 90 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$S_{\text{shaded}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x = 4x$$

2500 + 49.

$$S_{\text{shaded}} = \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha+\beta) \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49x^2+1}$$

$$4x = \frac{1}{2}$$

$$5 \sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha+\beta)) \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49x^2+1}$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99^{(100-1)}$$

$$100 = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49x^2+1} \quad 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$100 = (x^2+1)(49x^2+1)$$

$$x^2 = L \quad x =$$

$$100 = 49x^4 + x^2 + 49x^2 + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = L \\ x = \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 1 + x = \frac{50}{49} \end{array}$$

$$100 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$32x^2 = 25 \left(1 - \frac{7x^2 - 1}{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)} \right) \cdot \sqrt{\quad} \quad -$$

$$\frac{3}{25}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 7 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$\cancel{32x^2} \cancel{25}$$

$$32x^2 \sqrt{\quad} = 25 \left(\sqrt{\quad} - 7x^2 + 1 \right)$$

$$32x^2 \sqrt{\quad} = 25 \left(\sqrt{\quad} - 175x^2 + 25 \right)$$

$$(32x^2 - 25) \sqrt{\quad} = 25(1 - 7x^2)$$

$$\cancel{32x^2}$$

$$(32x^2 - 25)^2 \cdot (49x^2 + 1)(x^2 + 1) = 625(1 - 7x^2)^2$$



$$\sqrt{12x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = ? - ?x,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}} \cdot 4x - 5 - \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}} \cdot 4x + 2 \geq 0$$

$$(4x - 5) \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - (4x + 2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 0$$

$$(4x - 5) \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq (4x + 2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

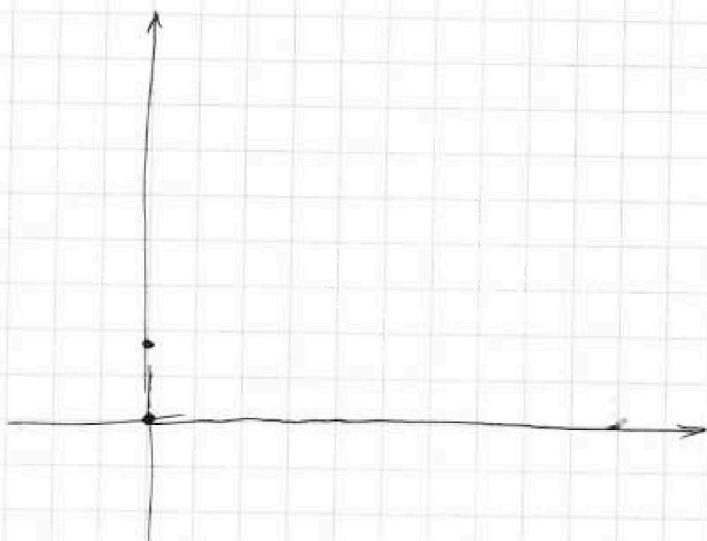
5

6

7

МФТИ

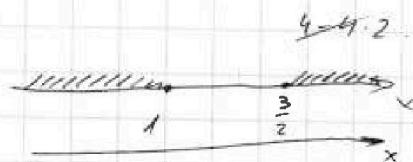
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 3:

$$25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \\ 2x^2 + 5x + 3 \geq 0 \\ \frac{5 \pm 1}{4} = \left[\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2} \right]$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$



$$2 - 2x \geq 0$$

$$2 \geq 2x \\ x \leq \frac{2}{2}$$

$$\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

2a + b = 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

023:

$$x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty \right)$$

$$2-7x + \sqrt{2x^2+2x+1} \geq 0.$$

$$2 = 7x \\ x = \frac{2}{7}$$

16

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &= (2-7x) + \sqrt{2x^2+2x+1} \\ 2x^2 - 5x + 3 &= (2-7x) + 2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1} + 2x^2+2x+1 \\ (2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1} &= -7x + 2 \\ (2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1} + (2-7x) &= 0 \end{aligned}$$

$$2\sqrt{2x^2+2x+1} + 1 = 0 \\ 2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x - 3 \quad x \geq \frac{3}{2}$$

$$4(2x^2+2x+1) = 49x^2 - 42x + 9.$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 42x + 9.$$

$$\begin{array}{c} 1,6 \\ \hline 9 \\ \times 16 \\ \hline 144 \\ 90 \\ \hline 55 \end{array} < 55 < \frac{93}{18}$$

$$41x^2 - 50x + 5 = 0$$

$$2500 - 4 \cdot 41 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \hline 176 \\ 176 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \\ \hline 18 \\ 18 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \hline 185 \\ 185 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$5(500 - 4 \cdot 41)$$

$$5 \cdot 324 = 5 \cdot 18^2$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 9 \\ \hline 188 \end{array}$$

$$\frac{50 \pm 18\sqrt{5}}{82} = \frac{25 \pm 9\sqrt{5}}{41} \quad \begin{array}{r} 41 \\ \hline 15 \\ \times 15 \\ \hline 225 \\ 225 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{3}{7} \approx \frac{25 + 9\sqrt{5}}{41} \quad \frac{117 + 4}{123} = 4 \cdot 2 \quad 1 < \frac{25 + 9\sqrt{5}}{41} < \frac{3}{2} \quad 123 - 50 = 73$$

$$123^2 - 178^2 = 63\sqrt{5}.$$

$$63\sqrt{5} > 52$$

$$41 < 25 + 9\sqrt{5} < \frac{123}{2}$$

$$16 < 9\sqrt{5} < \frac{23}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

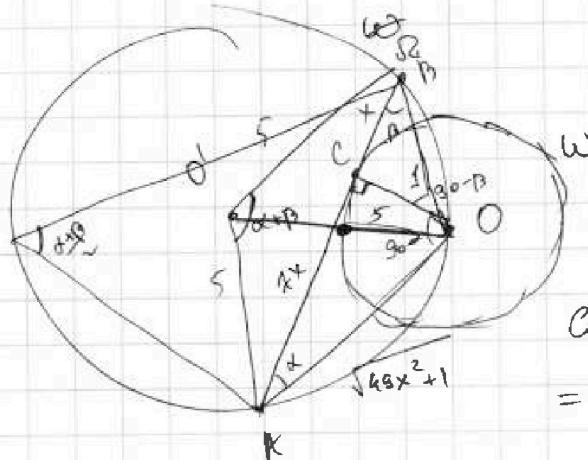
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AB?

$$S_{\text{коло}} = \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot 1 = 4x$$

$$(49x^2+1)(x^2+1) =$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} =$$

~~не
равно~~

$$q = 2R \sin \alpha$$

$$R = \frac{\alpha}{2 \sin \alpha}$$

$$AB^2 = 25 \cdot 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos(\alpha+\beta)$$

$$AB^2 = 2850(1 - \cos(\alpha+\beta))$$

$$64x^2 = 50(1 - \frac{7x^2-1}{\sqrt{49x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1}})$$

$$32x^2 = 25(1 - \frac{\sqrt{49x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)}}) \cdot \sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)}$$

$$32x^2 = 25 - 2x^2$$

$$\cancel{32x^2 - 25} = \cancel{(32x^2 - 25)} =$$

$$\frac{AB}{2 \sin(\frac{\alpha+\beta}{2})} = 5$$

$$AB = 10 \sin(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

$$8x = 10 \cdot 8 \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha+\beta)}{2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$a = km$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{32}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{32}$$

$$15 : 3 \quad b = gn$$

$$6 : 2 \quad ab = (kg) mn.$$

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 17 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$a : m \Rightarrow ab : mn$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 17 \\ \hline 31 \\ + 10 \\ \hline 41 \\ + 12 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$abc : 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{32}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 20 \\ \hline 34 \\ + 17 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$36 - 4 = 32$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

W1

$$a, b \text{ не совр} \quad b \left(\frac{a^2}{b^2} - 6 \frac{a}{b} + 1 \right)$$

$$H \log(a:b) = t,$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \begin{cases} a+b = km & b = km - a \\ a^2 - 6ab + b^2 = nm & : b \in k, n \in N \end{cases}$$

$$a^2 - 6a(km - a) + (km - a)^2 = nm.$$

$$a^2 - 6akm + 6a^2 + k^2 m^2 - 2akm + a^2 = nm.$$