



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ДЛ.

По условию:  $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{12} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

По свойству делимости:

если  $a:m$  и  $b:n$ , то  $ab:mn$

Значит:

$$a^2 b^2 c^2: 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 = k \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}; k \in \mathbb{N}$$

Если  $abc = \min$ , то  $a^2 b^2 c^2 = \min^2$ , значит  $k=1$ , т.е.  $a, b, c \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow abc = 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{32}$

~~Ответ:  $abc = 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{32}$~~

$$a^2 b^2 c^2 = k \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$abc = \sqrt{k} \cdot 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{32}$$

т.е.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  $abc \in \mathbb{N}$ ,  $k = \min \Rightarrow \sqrt{k} \cdot 2^{\frac{51}{2}} \in \mathbb{N} \Rightarrow k=2$

Ответ:  $abc = 2^{\frac{96}{2}} \cdot 7^{32} = 2^{48} \cdot 7^{32}$

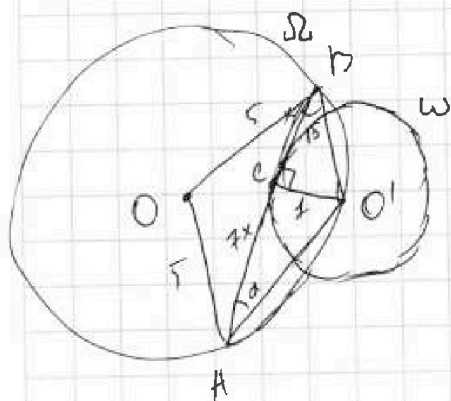
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ω, Ω

Дано:

окр-ти ω, Ω.  $R_ω = 1$ ;  $R_Ω = 5$  -

радиусы соответствующих окр-тей

$AB \cap ω = C$ ;  $AC : CB = 7$ .  $A, B \in Ω$ .

AB - хорда Ω

Найти: AB - ?

Решение:

1) Пусть O - центр Ω-окр-ти, а ω - O', тогда O'C = 1, как радиус к касательной. Пусть  $\angle BAO' = \alpha$ , а  $\angle ABO' = \beta$ , тогда  $\angle BO'A = 180 - \alpha - \beta$ .

Пусть AB = 8x, тогда AC = 7x; BC = x.

2) По т. синусов.

$$\frac{AB}{2 \sin(180 - \alpha - \beta)} = 5 \Rightarrow AB = 10 \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow 8x = 10 \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow 4x = 5 \sin(\alpha + \beta)$$

3)  $S_{\triangle O'BC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x = 4x$ , по высоте и основанию,

4)  $O'B = \sqrt{x^2 + 1}$  - по т. Пифагора, аналогично  $O'A = \sqrt{49x^2 + 1}$  и  $O'CA$ .

5)  $S_{\triangle O'BC} = \frac{1}{2} \cdot \sin(180 - \alpha - \beta) \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1}$  - по углу между сторонами и сторонами

6) Из (3) и (5)  $\Rightarrow 4x = \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1}$ , из пункта (2)

$$5 \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 = (x^2 + 1)(49x^2 + 1) \quad 7) \quad AB = 8x = 8 \cdot 1 = 8.$$

$$100 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$

Ответ: 8.

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Rightarrow x^2 = \left[ \frac{-1}{-49} \pm \sqrt{\frac{99}{49}} \right] \Rightarrow x = 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \quad \text{W4.}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = 2-7x + \sqrt{2x^2+2x+1} \quad \uparrow^2$$

$$2-7x + \sqrt{2x^2+2x+1} \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 7x-2$$

$$\begin{cases} 7x-2 < 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{7} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x < \frac{2}{7}$$

$$\begin{cases} 7x-2 \geq 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 49x^2-28x+4 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{2}{7}$$

$$2x^2+2x+1 \geq 49x^2-28x+4 = 47x^2-30x+3 \leq 0$$

$$D = 900 - 4 \cdot 47 \cdot 3$$

$$3(300 - 4 \cdot 47) = 3 \cdot 112 = 3 \cdot 4^2 \cdot 7$$

$$\frac{30-4\sqrt{21}}{94} \quad \frac{30+4\sqrt{21}}{94}$$

$$2x^2-5x+3 = (2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1} + \cancel{2x^2+2x+1}$$

$$(2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1} + (2-7x) = 0$$

$$\Rightarrow 2-7x=0 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$2-7x + 2\sqrt{2x^2+2x+1} + 1 \neq 0$$

$$2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{7}$$

$$4(2x^2+2x+1) = 49x^2-42x+9$$

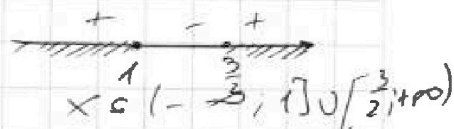
$$8x^2+8x+4 = 49x^2-42x+9$$

$$41x^2-50x+5=0$$

003:

$$2x^2+2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}, p < 0$$

$$2x^2-5x+3 \geq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 2500 - 4 \cdot 41 \cdot 5 = 5(500 - 4 \cdot 41) = 5 \cdot 324 = 5 \cdot 18^2$$

$$X = \begin{cases} \frac{25 + 9\sqrt{5}}{41} & \text{не подходит, т.к. по ООЗ.} \\ \frac{25 - 9\sqrt{5}}{41} & \text{не подходит, т.к. } < \frac{3}{7}. \end{cases} \quad X = \frac{50 \pm 18\sqrt{5}}{82}$$

Ответ:  $x = 7$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

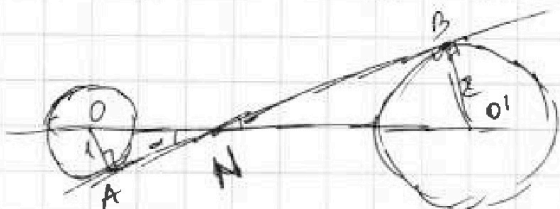
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 2-ой случай касания. Пусть  $\alpha$  - угол наклона прямой



Пусть

$$ON = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$NO' = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$$OO' = 8 - \text{из условия, тогда}$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} ON + NO' = OO' \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} = 8 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{8}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{1 - \frac{9}{64}}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{55}}{8}} = \frac{3}{\sqrt{55}}; \text{ аналогично } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{55}}$$

Из соображений симметрии от почительно оси абсцисс следует, что существуют параметры  $\alpha$  "зеркальные" и для оставшихся случаев,  $\Rightarrow \alpha = -\frac{3}{\sqrt{55}}$  для симметричного варианта и  $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{63}}$

симметрично к первому  $\Rightarrow$

$$\text{Ответ: } \alpha \pm \frac{1}{\sqrt{63}}; \pm \frac{3}{\sqrt{55}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}; \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

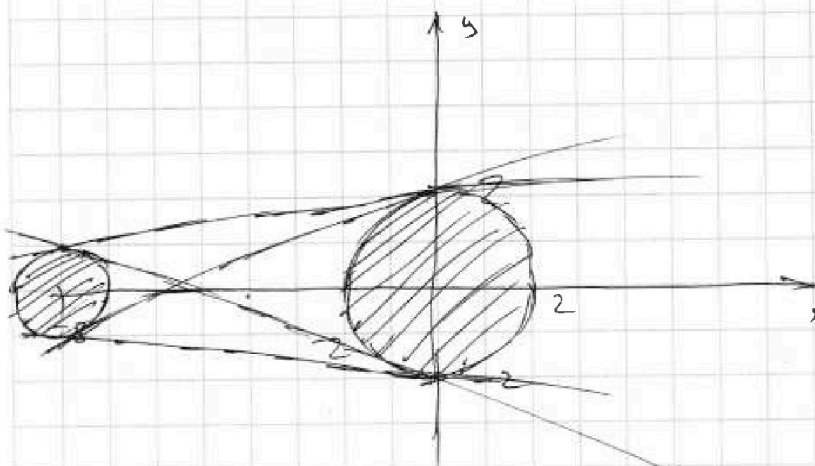
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Поряк QR-кода недопустима!



№6.



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 4) (x^2 + y^2 - 16) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) - прямая с центром  $b(0; 0)$  и радиусом  $a$ , а другой с центром  $(-8, 0)$  и радиусом  $2$

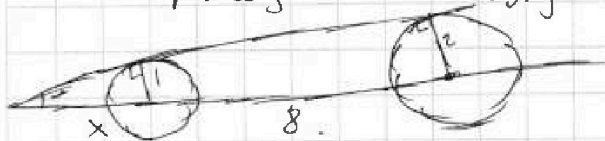
Нарисуем на графике второе неравенство (2) - два круга.

Во второе уравнение (1) задаёт прямую.

По условию надо найти такие  $a$ , чтобы существовал такой, что система имеет решение, такое возможно в случае касания

прямой двух кругов.

Расс-решим задачу (1) - б.т. Пусть  $\alpha$  - угол наклона прямой, а  $x$  - расстояние от центра меньшего круга



до пересечения прямой с осью абсцисс, тогда  $\sin \alpha = \frac{2}{x}$  и по другой стороне  $\sin \alpha = \frac{2}{x+8} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{2}{x+8} \Rightarrow x+8 = 2x \Rightarrow x = 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{8} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{1 - \frac{1}{64}}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{63}}{8}} = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

из (1) - оного следует, что  $a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{63}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$$\frac{mk}{m^2k^2-mn} = \frac{k}{mk-n}$$

$$\begin{cases} (a+b)^1 \equiv 0 \\ 2b^2 \equiv 0 \end{cases}$$

$$2b^2 = mk$$

$$b = \frac{mn}{2a}$$

$$a+b \equiv 0$$

$$a+b = mk$$

$$m^2k^2 = mn$$

$$(a+b)^2 \equiv 8ab$$

$$(a+b)^2 = mn$$

$$m = \frac{n}{k^2}$$

$$(a+b)^2 \equiv 0$$

$$a \equiv -b \quad a^2 \equiv b^2 \quad \begin{cases} a^2+2ab+b^2 \equiv 0 \\ a^2-6ab+b^2 \equiv 0 \end{cases}$$

$$8ab \equiv 0 \quad -8ab \equiv 0$$

$$8ab = mn$$

$$a+b = mk$$

$$m = \frac{8ab}{a+b}$$

$$mn = 8ab$$



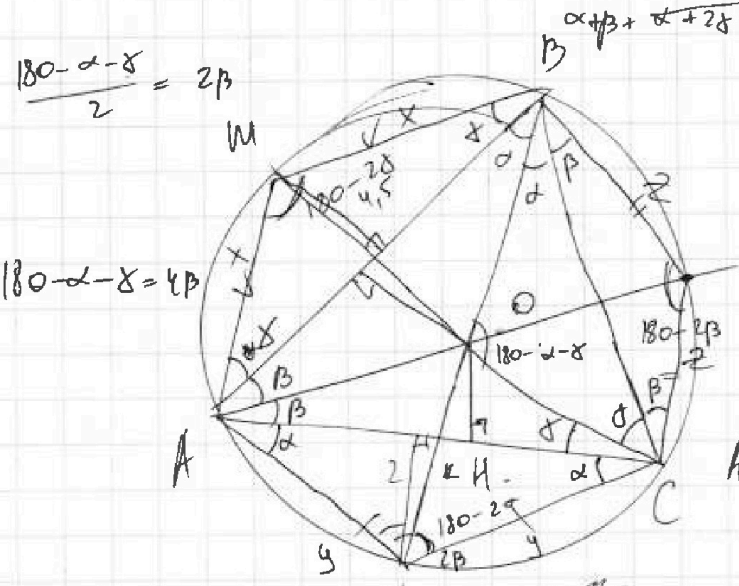
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{180 - \alpha - \gamma}{2} = 2\beta$$

$$180 - \alpha - \gamma = 4\beta$$

$$180 = 4\beta + \alpha + \gamma$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \beta \cos \beta \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \delta = 4,5$$

$$S_{ABC} = AB \cdot AC \cdot \cos \beta \sin \beta$$

$$y \cdot \sin \alpha = 2$$

$$\frac{AH}{AB} = \frac{OK}{OB}$$

$$AC = 2 \cdot y \cos \alpha$$

$$AB = 2x \cos \gamma$$

$$AB = 2R \sin 2\gamma$$

$$180 - \gamma =$$

$$AC = 2y \cos \alpha$$

$$2x \cos \gamma = R \cdot 2 \sin \gamma \cos \gamma = 720^\circ$$

$$BC = 2z \cos \beta$$

$$x = 2R \sin \gamma$$

$$NO:OB = AN:AB$$

$$y = 2R \sin \alpha$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} 2R^2 \sin^2 \gamma = 4,5 \\ 2R \sin^2 \alpha = 2 \end{cases}$$

$$z = 2R \sin \beta$$

$$x = \frac{3}{2}y$$

$$\sin \beta = \cos(\alpha + \gamma)$$

$$\frac{180 - \alpha - \gamma}{2} + 180 - 2\beta = 180$$

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{3}{2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + 180 - 2\gamma + \gamma +$$

$$\sin \beta = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma$$

$$180 - \gamma - 2 = a \equiv b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b \equiv_m 0$$

$$(a-3b)^2 \equiv_m 8b^2$$

$$a \equiv_m -b$$

$$a-3b \equiv_m 2\sqrt{2}b$$

$$a \equiv_m 2\sqrt{2}b+3b$$

$$a^2 \equiv_m b^2$$

$$a^2 \equiv_m m \cdot b^2$$

$$a = \sqrt{m} \cdot b$$

$$\Rightarrow a \equiv_m b$$

$$\sqrt{a+b} \equiv_m 0$$

$$a+b = mn$$

$$(a-3b)^2 \equiv_m 8b^2 \equiv_m a+b$$

$$(a+b)^2 - 8ab = mk$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = m \cdot k$$

$$(a - (3+2\sqrt{2})b)(a - (3-2\sqrt{2})b) \equiv_m a+b$$

$$m^2 n^2 - 8ab = mk$$

$$10 = 30$$

$$a^2 - 6ab + b^2 \equiv_m 0$$

$$a^2 + b^2 \equiv_m 6ab$$

$$a+b \equiv_m 0$$

$$(a+b)^2 \equiv_m 8ab$$

$$a+b \equiv_m 0$$

$$m^2 n^2 - mk - 8ab = 0$$

$$D = k^2 - 4 \cdot n^2 \cdot 8ab, D = \frac{k^2}{n^2}$$

$$(a+b)^2 = mn, m \cdot n + 8ab$$

$$\begin{cases} a+b = m \cdot k \end{cases}$$

ab =

$$m^2 k^2 = m \cdot n + 8ab$$

$$m^2 k^2 - mn - 8ab = 0$$

$$m = \frac{n}{2k^2} + \sqrt{\dots}$$

$$n^2 + 4k^2 - 8ab$$

$$m = \frac{n + \sqrt{n^2 + 32k^2 ab}}{2k^2}$$

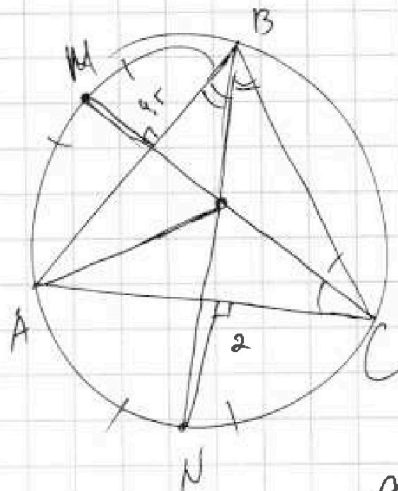
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = kb$$

3,5

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{9-6 \cdot 3 \cdot 5 + 25} = \frac{8}{9-90+25} = \frac{8}{-61}$$

$$= \frac{8}{9-90+25} = \frac{8}{-61} = -\frac{8}{61}$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$ab = \text{НОК}(a, b)$$

$$\begin{cases} a+b = mk \\ a^2-6ab+b^2 = nm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = mk - b \\ a \equiv -1 \pmod{b} \end{cases}$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a^2-6ab+b^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$m^2 k^2 - 2mkb + b^2 - 6(mk-b)b + b^2 = nm$$

$$m^2 k^2 - 2mkb + b^2 - 6mkb + 6b^2 + b^2 = nm$$

$$m^2 k^2 - 8mkb$$

$$m^2 k^2 - 8mkb + 8b^2 = nm$$

$$m^2 k^2 - (8kb + n)m + 8b^2 = 0$$

$$\begin{cases} a^2-6ab+b^2 \\ a^2-6ab+9b^2-8b^2 \end{cases}$$

$$a^2-6ab+9b^2 \equiv 8b^2$$

$$D = 8ak^2b^2 - 26kbn + n^2 - 32b^2 = 0$$

$$(a-3b)^2 - 8b^2$$

$$(a-3b)^2 \equiv 8b^2$$

$$\frac{a+b}{a+b} \equiv 0$$

$$(-4b)^2 \equiv 8b^2$$

$$(k+1)b + n$$

$$6b^2 \equiv 8b^2$$

$$a+b \equiv 0$$

$$a \equiv -b$$

$$a = mn$$

$$b = mk$$

$$a \equiv 0$$

$$(a-3b-2\sqrt{2}b)(a-3b+2\sqrt{2}b)$$

$$\begin{cases} a^2-6ab+b^2 \equiv 0 \\ b^2+6b^2+b^2 \equiv 0 \\ 8b^2 \equiv 0 \end{cases}$$

$$b \equiv 0$$

$$b^2+6b^2+b^2 \equiv 0$$

$$8b^2 \equiv 0$$

$$9 \equiv 0$$

$$a = mn$$

$$b^2 = m \cdot n$$

$$b = m \cdot \sqrt{n}$$

$$b^2 \equiv 0$$

$$8b^2 \equiv 0$$

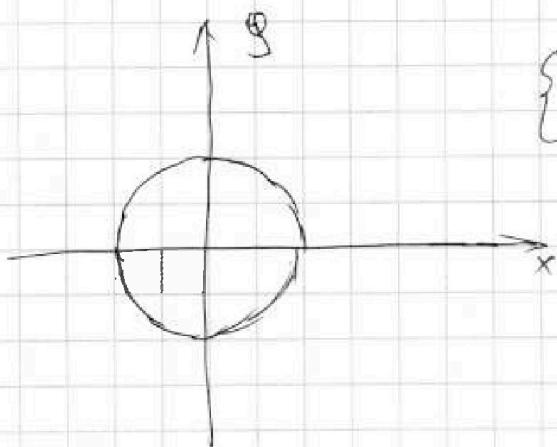
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

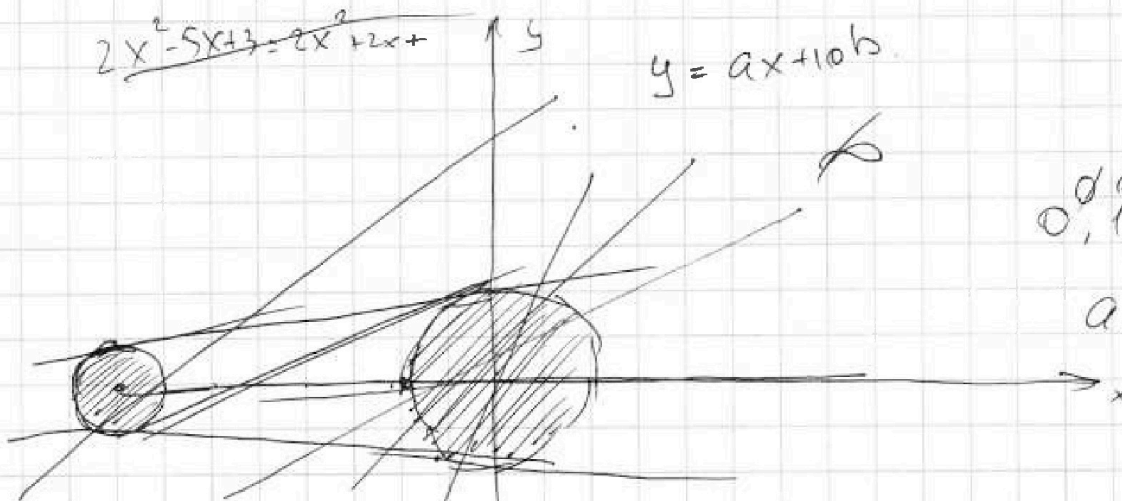


$$\begin{cases} a \cdot b = km \\ a^2 + 6ab + b^2 = nm \end{cases}$$

$$a = b \quad a = kb, k \neq \frac{1}{N}$$

$$a \frac{kb+b}{k^2b^2 - 6kb + b^2}$$

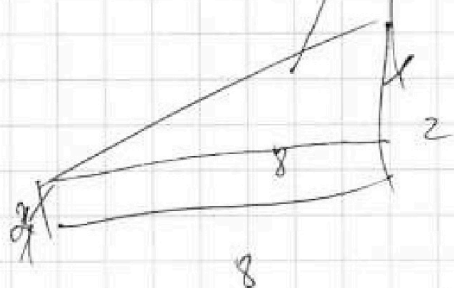
$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x +$$



$$y = ax + 10b$$

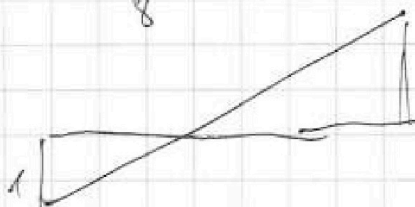
$$0, 1, 3, 4$$

$$a, b$$



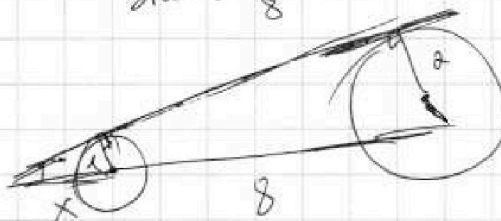
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{8} \\ a &= \sqrt{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{x}, \quad x+8 \\ \sin \alpha &= \frac{2}{8} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+8}$$



$$x+8 = 2x \quad x = 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

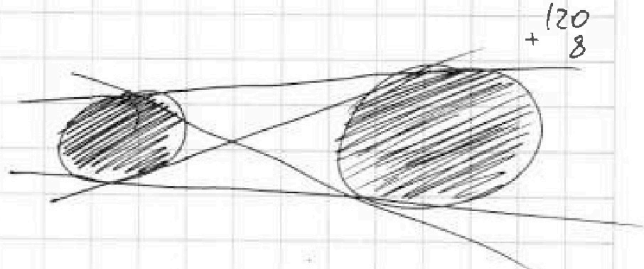
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

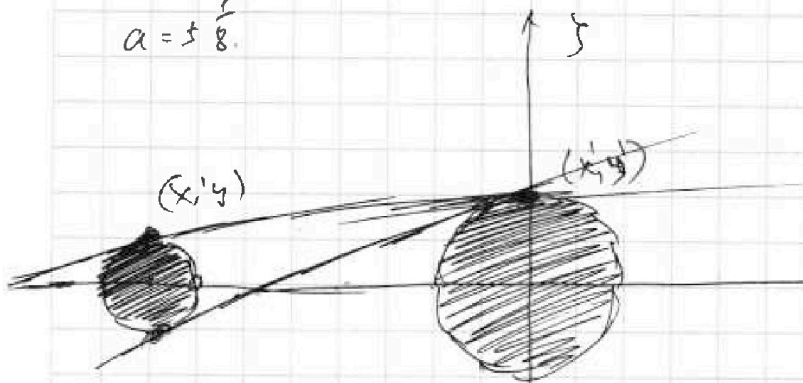
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$y = 10x$~~   $y = ax + 10b$   
 $x^2 + y^2$



$a = 5/8$



~~$y = 10x$~~   $ky_0^2 = \frac{119}{64}$

$y = ax + 10b$   
 $ky_0^2 = \frac{2 - \frac{9}{64}}{1 - \frac{9}{64}}$

$\frac{dF(x,y)}{dx} = - \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$

$y' = ax' + 10b$

$1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$   
 $tg^2 \alpha = \frac{1}{1 - \sin^2 \alpha} - 1$   
 $tg^2 \alpha = \frac{2 - \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$

$tg \alpha = - \frac{y'}{x'}$   
 $tg^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$

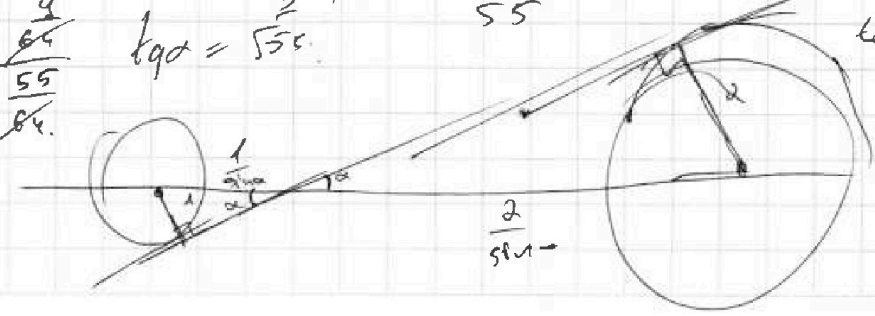
$\frac{y'}{x'} = \frac{y'}{x'} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$   
 $\frac{y^2}{x^2} = \frac{(y')^2}{(x')^2}$

$\frac{3}{\sin \alpha} = 8$   
 $\sin \alpha = \frac{3}{8}$   
 $tg \alpha = \frac{3}{\sqrt{1 - \frac{9}{64}}}$

$\frac{y}{x+8} = \frac{y'}{x'}$   
 $tg^2 \alpha = \frac{\frac{9}{55}}{\frac{64}{55}}$

$1 - \frac{(x+8)^2}{x^2} = \frac{64}{55}$   
 $tg \alpha = \frac{3}{\sqrt{55}}$

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$   
 $tg \alpha = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{55}}{8}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$





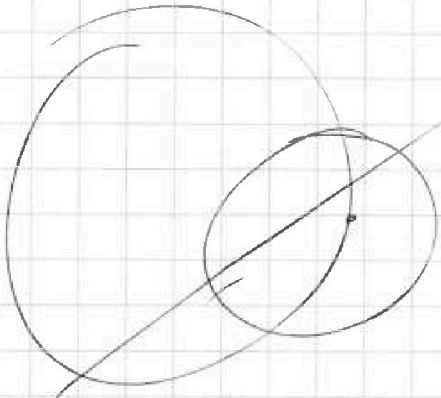
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!

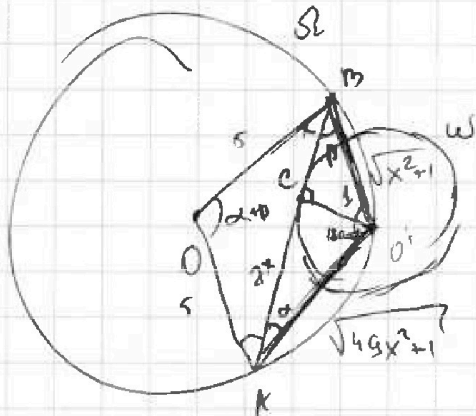


$$\frac{AB}{2 \cdot \sin(\alpha + \beta)} = r$$

$$AB = 10 \sin(\alpha + \beta) \quad \boxed{4x = 5 \sin(\alpha + \beta)}$$

$$AB = 10 \sin(\alpha + \beta)$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin(\alpha + \beta)$$



$$\frac{180 - \alpha - \beta}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$\angle OAK = 90 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$S_{AOK} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x = 4x$$

$$2500 + 49$$

$$S_{KOB} = \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{49x^2 + 1}$$

$$4x = \frac{1}{2}$$

$$5 \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta)) \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{49x^2 + 1}$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99^{100-1}$$

$$10 = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \quad 49x^4 + 50x^2 + 99 = 0$$

$$100 = (x^2 + 1)(49x^2 + 1)$$

$$x^2 = 1 \quad | \quad x =$$

$$100 = 49x^4 + x^2 + 49x^2 + 1$$

$$x^2 + 1 = \frac{50}{49}$$

$$100 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$32x^2 = 25 \left( 1 - \sqrt{\frac{7x^2-1}{(49x^2+1)(x^2+1)}} \right) \cdot \sqrt{\dots}$$

$$\frac{3}{25} \cdot \frac{7}{175}$$

$$\frac{175}{25}$$

$$32x^2 = 25 \sqrt{\dots}$$

$$32x^2 \sqrt{\dots} = 25 (\sqrt{\dots} - 7x^2 + 1)$$

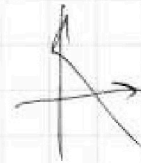
$$32x^2 \sqrt{\dots} = 25 \sqrt{\dots} - 175x^2 + 25$$

$$(32x^2 - 25) \sqrt{\dots} = 25(1 - 7x^2)$$

$$(32x^2 - 25)$$

$$(32x^2 - 25)^2 \cdot (49x^2 + 1)(x^2 + 1) = 625(1 - 7x^2)^2$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$



$$\frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}} \cdot 4x - 5 - \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}} \cdot 4x + 2 \geq 0$$

$$(4x - 5) \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - (4x + 2) \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 0$$

$$(4x - 5) \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq (4x + 2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

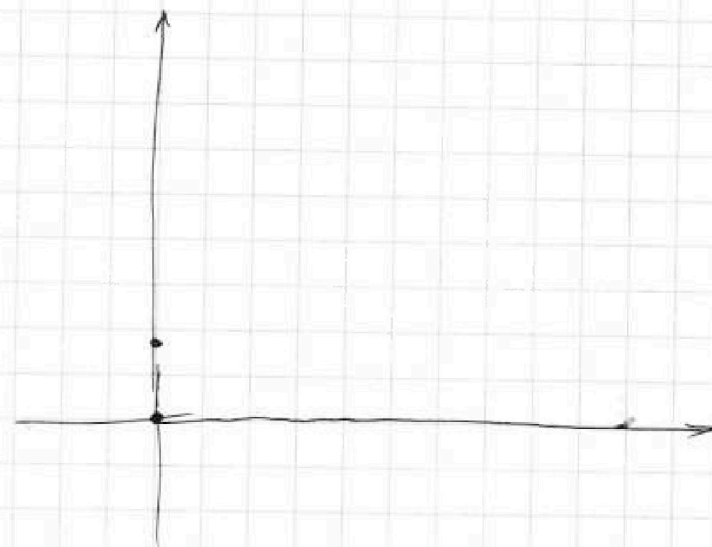
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

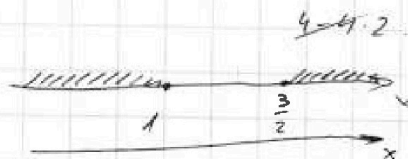


3:

$$2x^2 + 5x + 3 \geq 0$$

$25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$   
 $\frac{5 \pm 1}{4} = \frac{3}{2}$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$



$$2 - 2x \geq 0$$

$$2 \geq 2x$$

$$x \leq \frac{2}{2}$$

$$\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

$$2a + b = 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

QR3:

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2-7x) + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$$

$$(2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -7x + 2$$

$$(2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + (2-7x) = 0$$

$$2-7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 1 = 0$$

$$2\sqrt{\quad} = 7x - 3 \quad x \geq \frac{3}{7}$$

$x \in (-\infty; 0] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$

$2-7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$

$2 = 7x$   
 $x = \frac{2}{7}$

$$4(2x^2 + 2x + 1) = 49x^2 - 42x + 9$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 42x + 9$$

$$41x^2 - 50x + 5 = 0$$

$$2500 - 4 \cdot 41 \cdot 5$$

$$5(500 - 4 \cdot 41)$$

$$5 \cdot 324 = 5 \cdot 18^2$$

$$x = \frac{42 \pm \sqrt{176}}{82}$$

$$\frac{50 \pm 18\sqrt{5}}{82} = \frac{25 \pm 9\sqrt{5}}{41}$$

$$\frac{3}{7} < \frac{25 + 9\sqrt{5}}{41}$$

$$\frac{117 \pm 4}{128} = 4.2$$

$$1 < \frac{25 + 9\sqrt{5}}{41} < \frac{3}{2}$$

$$123 \wedge 175 \rightarrow 63\sqrt{5}$$

$$63\sqrt{5} \rightarrow 52$$

$$41 < 25 + 9\sqrt{5} < \frac{123}{2}$$

$$16 < 9\sqrt{5} < \frac{73}{2}$$

$$\frac{16}{9} < \sqrt{5} < \frac{73}{18}$$

$$\frac{25 \pm 18}{41}$$

$$\frac{25 \pm 18}{41}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

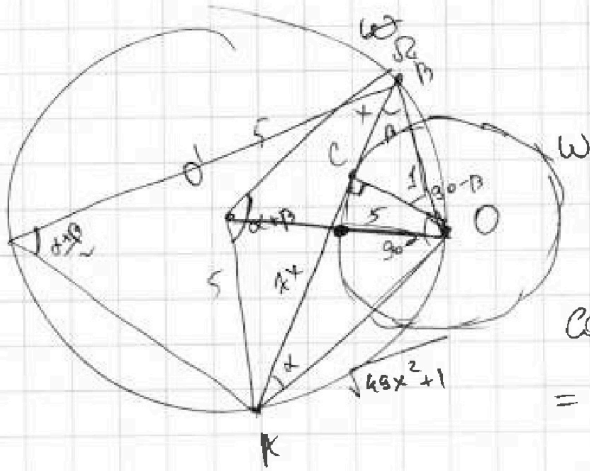
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**



AB?

$$S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot 1 = 4x$$

$$(49x^2+1)(x^2+1) =$$

$$\cos(\alpha+\beta) = 49x^4$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$AB^2 = 25 \cdot 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos(\alpha+\beta)$$

$$AB^2 = 25 \cdot 50 (1 - \cos(\alpha+\beta)) = \frac{7x^2 - 1}{\sqrt{49x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1}}$$

$$64x^2 = 50 \left( 1 - \frac{7x^2-1}{\sqrt{49x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1}} \right)$$

$$32x^2 = 25 \left( 1 - \frac{7x^2-1}{\sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)}} \right) \cdot \sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)}$$

$$32x^2 \sqrt{\dots} = 25 \sqrt{\dots} - 7x^2$$

$$\sqrt{32x^2 - 25} = \sqrt{32x^2 - 25} =$$

$$\frac{AB}{2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = 5$$

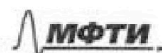
$$AB = 10 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$8x = 10 \cdot \frac{1 - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\begin{array}{r} 14 \\ +17 \\ +20 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ +17 \\ +37 \\ \hline 64 \end{array}$$

a, b, c

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$a = km$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{32}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{32}$$

$$15:3 \quad b = gn$$

$$6:2 \quad ab = (kg)mn$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$a:m \Rightarrow ab:mn$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +17 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ +17 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{32}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +20 \\ \hline 34 \\ +17 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$abc = 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{\frac{64}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$36-4=32$$

W1

a, b не соизм

$$\frac{a+b}{b^2 \left( \frac{a^2}{b^2} - 6 \frac{a}{b} + 1 \right)}$$

$$\text{НОД}(a;b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} =$$

$$\begin{cases} a+b = km & b = km - a \\ a^2 - 6ab + b^2 = nm \end{cases} \quad ; k \neq 0, k, n \in \mathbb{N}$$

$$a^2 - 6a(km - a) + (km - a)^2 = nm$$

$$a^2 - 6akm + 6a^2 + k^2 m^2 - 2akm + a^2 = nm$$