



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ab &: 2^4 \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{12} \cdot 7^{12} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned} \rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{51} \cdot 7^{64}, \text{ т.к. } a^2 b^2 c^2 -$$

в. кат. угла, то все ^{крайне} множители входят ^{полностью}

в него в четн. степени, но ~~а~~ т.к. $a^2 b^2 c^2 : 2^{51}$, то

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{52}$$

~~Тогда $a^2 b^2 c^2 : 2^{52} \cdot 7^{64}$, очев., что $a^2 b^2 c^2 > 2^{52} \cdot 7^{64}$~~

$$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

~~Пример: $a = 2^9 \cdot 7^3$~~

~~$b = 2^6 \cdot 7^{10}$~~

~~$c = 2^{11} \cdot 7$~~

Тогда $a^2 b^2 c^2 : 2^{52}$, $abc : 2^{26}$

Т.к. $ac : 7^{37}$, очев., что $abc : 7^{37}$

$\rightarrow abc : 7^{37} \cdot 2^{26}$, $abc \geq 7^{37} \cdot 2^{26}$

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^{10}$

$b = 2^6$

$c = 2^{11} \cdot 7^{27}$

Ответ: $7^{37} \cdot 2^{26}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МОТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

~ 2

Зададим равносильно т.е., чтобы найти НОД
($a+b$; $a^2-6ab+b^2$)
Пусть их НОД равен k , тогда

$$\begin{cases} a+b \equiv 0 \\ \quad \quad \quad km \\ a^2-6ab+b^2 \equiv 0 \\ \quad \quad \quad km \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \equiv -b \\ \quad \quad \quad km \\ a^2+b^2 \equiv 6ab \\ \quad \quad \quad km \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-b)^2+b^2 \equiv -6b^2 \\ \quad \quad \quad km \end{cases}$$

$$2b^2 \equiv -6b^2 \\ \quad \quad \quad km$$

$$8b^2 \equiv 0 \rightarrow 8b^2 : km, \text{ аналогично получаем,}$$

что $8a^2 : km$, но по усл. НОД $(a;b) = 1$
отсюда $8 : km$, ~~$k \leq 8$~~ $m \leq 8$

Пример: $a=1, b=7$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{1-42+49} = \frac{8}{8} = 1$$

Ответ: $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

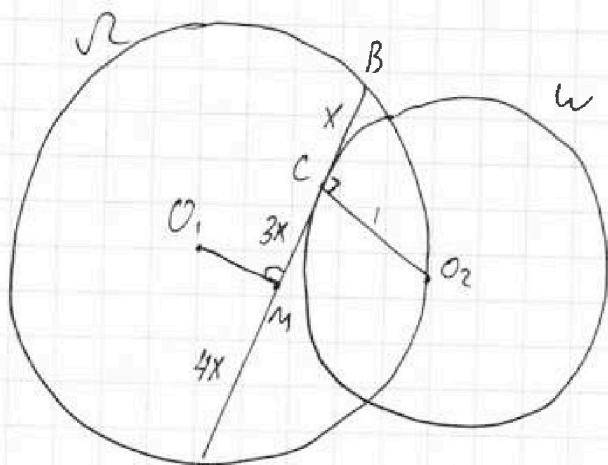
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 3

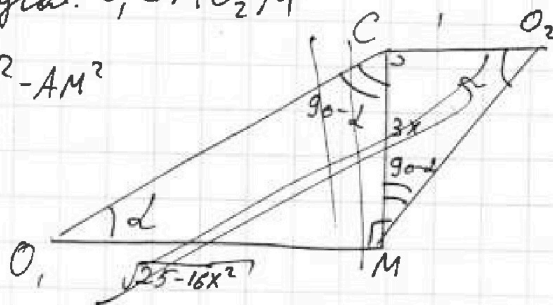


- 1) O_1 и O_2 - центры окр. Ω и Υ соотв., M - сер. AB , пусть $AC = 9x$, тогда $BC = x$
 2) $\triangle AOB$ р-б. ($AO_1 = OB = 5$) \rightarrow мед. $O_1M \perp AB$, $AM = 4x$, $CM = 3x$
 $CO_2 \perp AB$ т.к. $CO_2 \perp AB$ - кас.

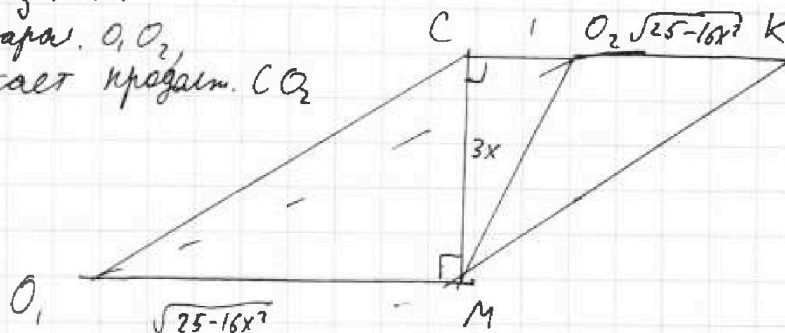
Сделаем вычисл. с помощью четырехугол. O_1CMO_2M

3) Из прямоуг. $\triangle O_1MA$ $O_1M^2 = O_1A^2 - AM^2$
 $= 25 - 16x^2$

$O_1M \perp CM$, $CO_2 \perp CM \rightarrow O_1M \parallel CO_2$
 $CO_2 = 1$ (т.к. рад.)



Пусть $\angle CO_1M = \alpha$, тогда $\angle CO_1O_2 = \alpha$
 $O_1O_2 = 5$ т.к. радиус Ω
 в трап. O_1CO_2M из т. M
 проведем прямую, паралл. O_1O_2 ,
 пусть она пересекает продолж. CO_2
 O_1O_2 в т. K
 CO_2





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$O_1 O_2 // MK$, $O_1 M // O_2 K \rightarrow O_1 O_2 KM$ - парал.

$O_1 O_2 = MK = 5$, Рассмотрим треугольн. $\triangle CMK$

$O_2 K = O_1 M = \sqrt{25 - 16x^2}$

Рассмотрим треугольн. $\triangle CMK$; $CM^2 + CK^2 = MK^2$

$$9x^2 + (1 + \sqrt{25 - 16x^2})^2 = 25$$

$$9x^2 + 1 + 2\sqrt{25 - 16x^2} + 25 - 16x^2 = 25$$

$$9x^2 + 1 + 2\sqrt{25 - 16x^2} = 16x^2$$

$$4(25 - 16x^2) = (7x^2 - 1)^2$$

$$100 - 64x^2 = 49x^4 - 14x^2 + 1$$

$$43x^4 - 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$x^2 = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{98}, \text{ т.к. } x^2 > 0, \text{ и } x > 0$$

$$x^2 = \frac{-50 + \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{98} = \frac{-50 + \sqrt{21904}}{98}, \text{ т.к. } x^2 > 0, \text{ то}$$

$$x^2 = \frac{-50 + \sqrt{21904}}{98}, \text{ тогда } x = \sqrt{\frac{\sqrt{21904} - 50}{98}}$$

$$AB = 8x = 8 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{21904} - 50}{98}}$$

Ответ: $2\sqrt{\frac{\sqrt{21904} - 50}{98}} \cdot 8\sqrt{\frac{\sqrt{21904} - 50}{98}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+52x+1} = 2-7x \quad N 4$$

Заметим, что $(2x^2-5x+3) - (2x^2+52x+1) = 2-7x$, а т.к.

~~у нас оба корня, то оба~~
Пусть $\sqrt{2x^2-5x+3} = X$, $\sqrt{2x^2+52x+1} = Y$

$$\sqrt{X} - \sqrt{Y} = X^2 - Y^2 \quad \text{Пусть } 2x^2-5x+3 = X, \\ X+Y - 2\sqrt{XY} = \quad \quad \quad 2x^2+52x+1 = Y$$

$$\sqrt{X} - \sqrt{Y} = X - Y \\ X+Y - 2\sqrt{XY} = X^2 - 2XY + Y^2, \quad \text{пусть } X+Y = u, \sqrt{XY} = v \geq 0$$

$$u - 2v^2 = u^2 - 4v^2$$

$$u^2 - u - 4v^2 + 2v = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+16v^2-8v}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{(4v-1)^2}}{2} = \frac{2v}{1-2v}$$

1) $u = 2v$

$$X+Y = 2\sqrt{XY}$$

$$X^2+2XY+Y^2 = 4XY$$

$$(X-Y)^2 = 0$$

$$X = Y$$

$$2x^2-5x+3 = 2x^2+52x+1$$

$$2 = 7x$$

$$x = \frac{2}{7}$$

2) $X+Y = 1-2\sqrt{XY}$

$$X^2+Y^2+2XY = 1-4\sqrt{XY}+4XY$$

$$(X+Y)^2 = 1-4\sqrt{XY}$$

$$u = 1-2v, \quad \text{обе функции}$$

монотонны, есть не более
одного решения

$$X+Y = 1-2\sqrt{XY}$$

$$1-X-Y = 2\sqrt{XY}$$

$$1+X^2+Y^2-2X-2Y+2XY = 4XY$$

$$1+X^2+Y^2-2X-2Y-2XY = 0$$

$$X+Y = 1-2\sqrt{XY}$$

$$1-X-Y = 2\sqrt{XY}$$

Заметим, что пара $(1; 0)$ и $(0; 1)$

явл. реш. данно ур., то есть а

также то, что какое ур. не может

иметь более 2 пар реш. т.к.

при возвед. в кв. мы получим ур.

$$1+X^2+Y^2-2X-2Y-2XY = 0, \quad \text{а и если}$$

решать его отн. X, оно квадрат. и имеет

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Не более 2 реш., кот. я перечислил выше
делаю обратн. зам. найдем

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 1 & \text{или} & \begin{cases} 2x^2 - 5x + x + 3 = 0 & \textcircled{3} \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 & \textcircled{1} \end{cases} \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 & \textcircled{1} & \begin{cases} 2x^2 + 5x + 1 = 1 & \textcircled{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} \quad 2x^2 \textcircled{2} \quad (x+1)^2 + x^2 = 0 \\ & \begin{cases} x = -1 & - \text{реш. нет} \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{2} \quad 2x^2 + 2x = 0 \\ & 2x(x+1) = 0 \\ & x = 0 \text{ или } x = -1 \end{aligned}$$

из этих двух реш.
ур. $\textcircled{3}$ удов. только
 $x = -1$

Сделаем проверку корней:

$$x = \frac{2}{7} : \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3} - \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{4}{7} + 1} = 0$$

$$\begin{aligned} x = -1 : \sqrt{2+5+3} - \sqrt{\frac{-62}{49} + 3} &= \sqrt{\frac{36}{49} + 1} \\ 2 - \frac{62}{49} &= \frac{36}{49} \quad - \text{верно} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = -1 : \sqrt{2+5+3} - \sqrt{2-2+1} &= 9 \\ \sqrt{10} &= 10 \quad - \text{очев., нет} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

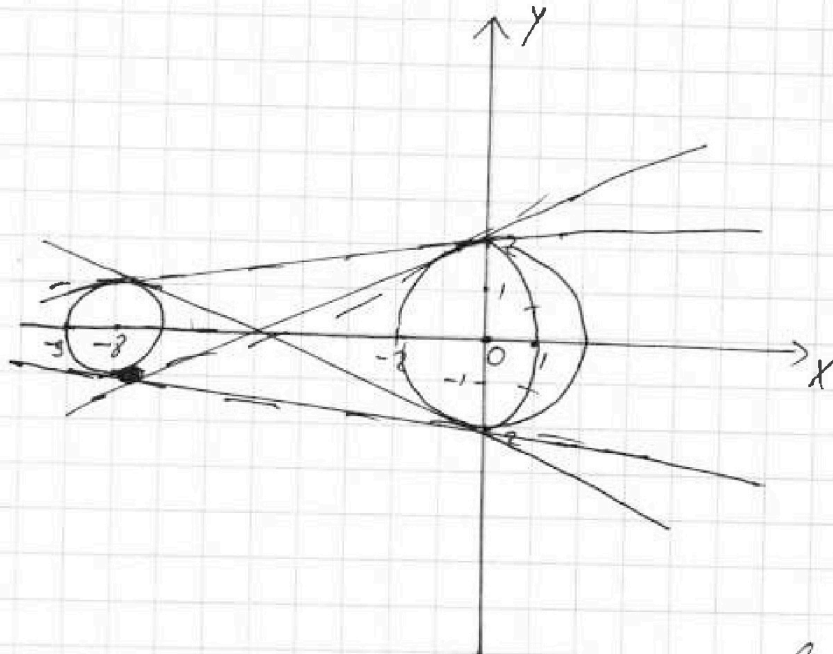
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad \textcircled{2} \end{cases} \sim 6$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ - окр. с центром $(-8; 0)$ и рад. = 1

$x^2 + y^2 = 4$ - окр. с центром $(0; 0)$ и рад. = 2



Из $\textcircled{2}$ -ке следует, что как π удов. обл., внутри окружностей.
 $\text{DD } ax - 10b = y$, чтобы $ax - 10b$ - прямая
 чтобы пр. имело равно 2 реш., нужно, чтобы
 прямая касалась каждой из окружностей, если
 она прямая пересекает хотя бы одну окр., то реш.
 будет беск. много.
 Так же заметим, что ось x явл. осью симметрии,
 поэтому, если нам подходит a_0 , то и $-a_0$ тоже

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

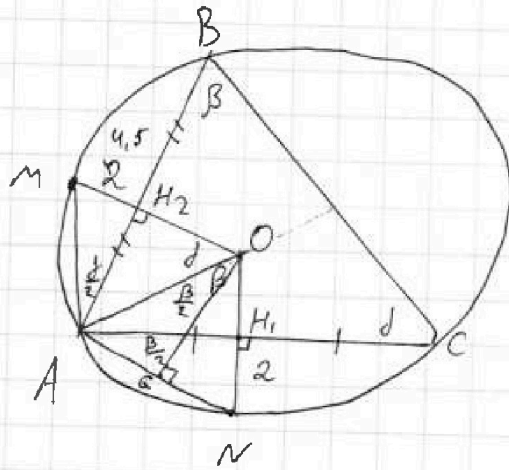
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Т.к. M и N — ср. т. дуг, то они — ср. перпенд. к AB и AC , N — ср. перпенд. к AC , M — ср. перпенд. к AB , но O (центр окружности) тоже лежит на ср. перпенд., а аналогично N и O лежат на ср. перпенд., тогда $OM \perp AB$, $OM \perp AB = H_2$, $MH_2 = 4,5$ из усл., аналог. $AC \perp ON$, $ON = 2$

2) Пусть r — радиус окр. с центром O , $\angle ABC = \beta$, тогда

$\angle AON = \beta$ т.к. N — ср. дуги AC и $\angle AON$ центр., аналог.

пусть $\angle C = \gamma$, $\angle AOM = \gamma$

из $\triangle AOH_1$: $AO \cdot \cos \beta = OH_1$
 $r \cdot \cos \beta = r - 2$

из $\triangle AOH_2$: $AO \cdot \cos \gamma = r - 4,5$

$r \cdot \cos \gamma = r - 4,5$

из т. Синусов для $\triangle ABC$: $AB = 2R \sin \gamma$, $AC = 2R \sin \beta$



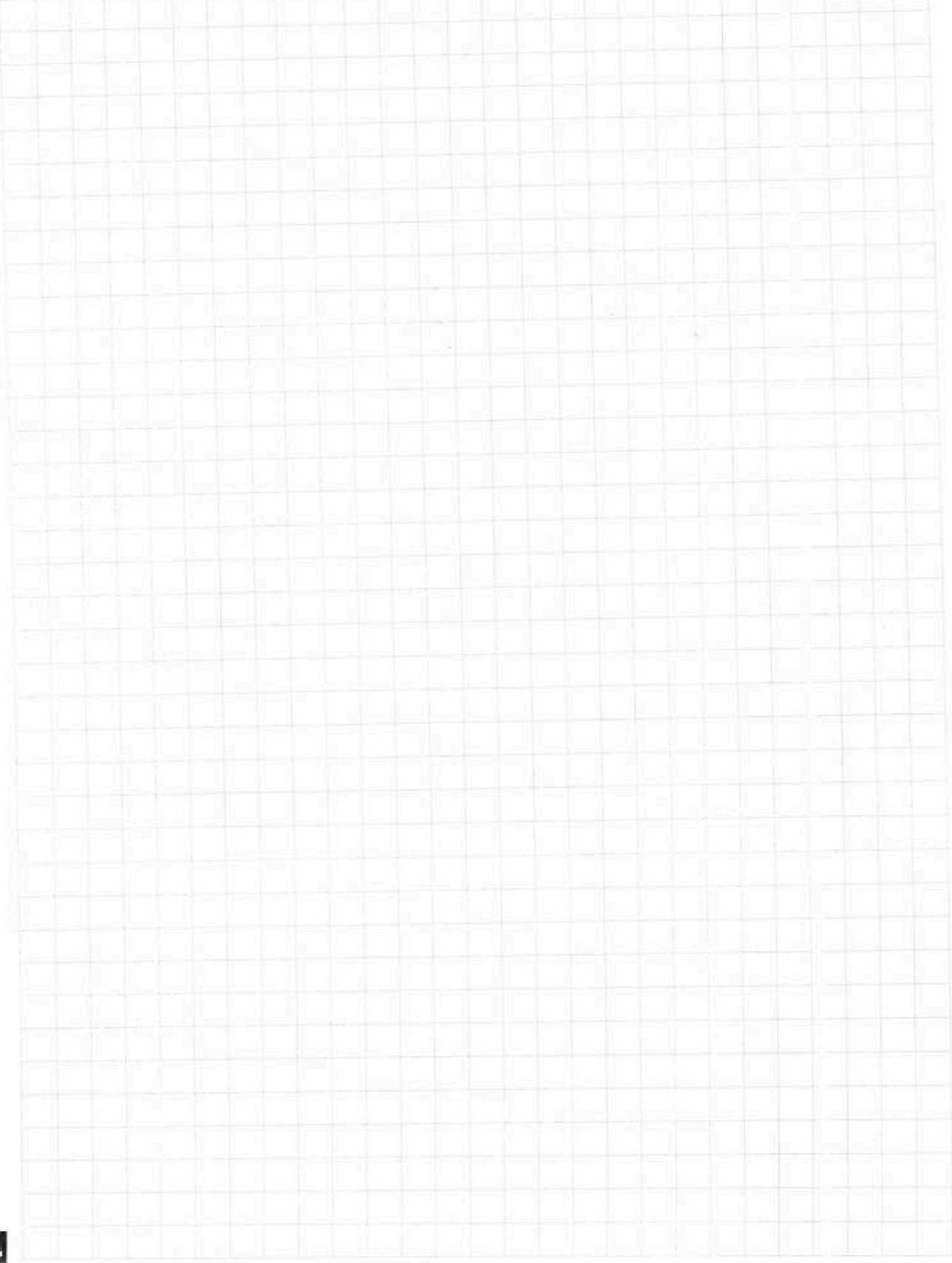
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

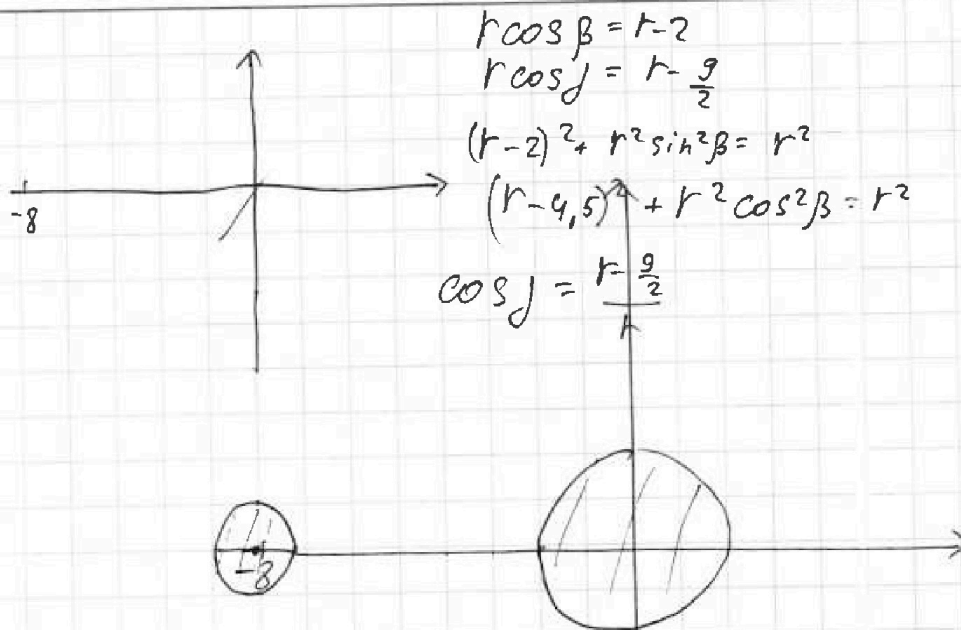
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - 10b = y$$

$$(a+b ; a^2 - 6ab + b^2)$$

$$a = \frac{y}{x} - b$$

$$49 - 42 + 1$$

$$5 \quad 2$$

$$\sqrt{25 + 4}$$

$$169 - 6 \cdot 13 \cdot 3 + 9$$

$$(r-2)^2 + \frac{AC^2}{4} = r^2 \quad 2r \cdot \sin \beta$$

$$r \cos \beta = r - 2$$

$$r \cos \gamma = r - 4,5$$

$$\frac{AC^2}{4} = \frac{(r^2 - (r-2)^2) \cdot 4}{\sqrt{2 \cdot (2+r) \cdot 4}} = AC$$

$$(r-2)^2$$

$$a^2 + b^2 = 6ab$$

$$2a^2 = -6a^2$$

$$2a^2 + 6a^2 : k$$

$$2a^2 + 8a^2 : k$$

$$8b^2 : k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2^{10} \quad a = 2^{10}$$

$$b = 2^4$$

$$c = 2^{10}$$

$$a = 2^8$$

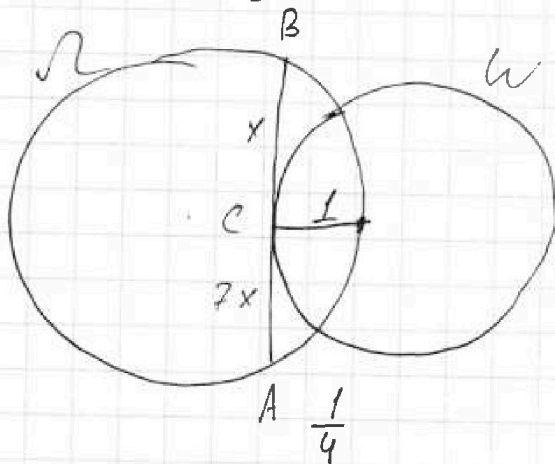
$$b = 2^6$$

$$c = 2^{11}$$

$$3^7 \quad a = 2^9$$

$$+ 14 \quad b = 2^8$$

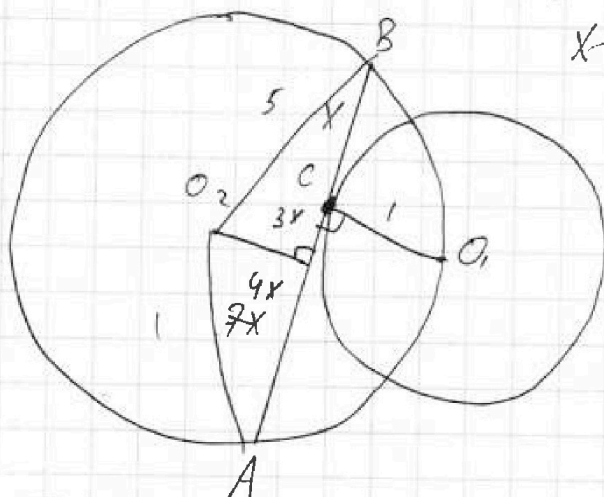
$$\hline 51 \quad c = 2^{11}$$



dit.

$$\frac{5 \pm 1}{24} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$25 - 21$$



$$x^2 + 2 + (x-1)^2$$

$$2(x-1)^2 + 1 - x$$

$$a = 7^{25}$$

$$b = 7^8$$

$$c = 7^{30}$$

$$L + B + J = 32$$

$$L + B = 10$$

$$B + J = 17$$

$$L + J = 37$$

$$L = 20$$

$$3y(4-y)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{(x - \frac{3}{2})(x-1)} - \sqrt{(x+1)^2 + x^2} = 2 - 7x$$

$$(x - \frac{3}{2})(x-1) = (2 - 7x + \sqrt{(x+1)^2 + x^2})^2$$

$$x^2 + x(-2-y) - 2y + 1 + y^2 = 0$$

$$\frac{2+y \pm \sqrt{4+4y+y^2+8y-4-4y^2}}{2} = \frac{2+y \pm \sqrt{12y-3y^2}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



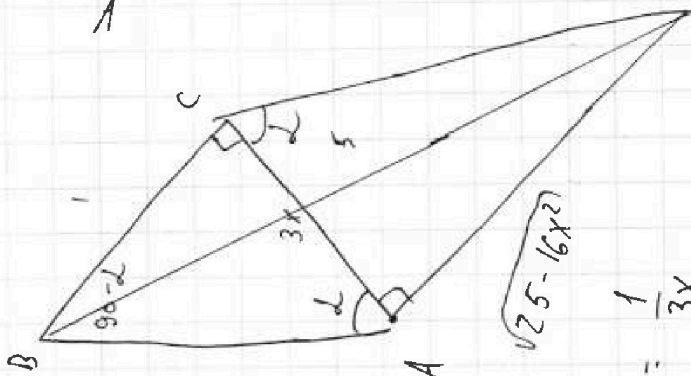
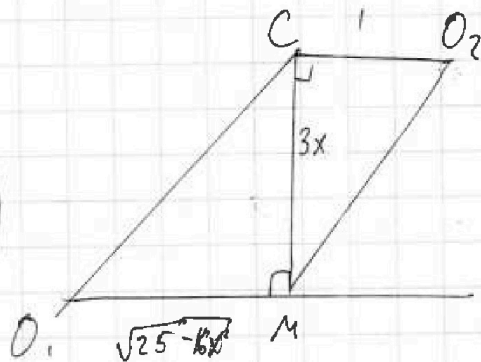
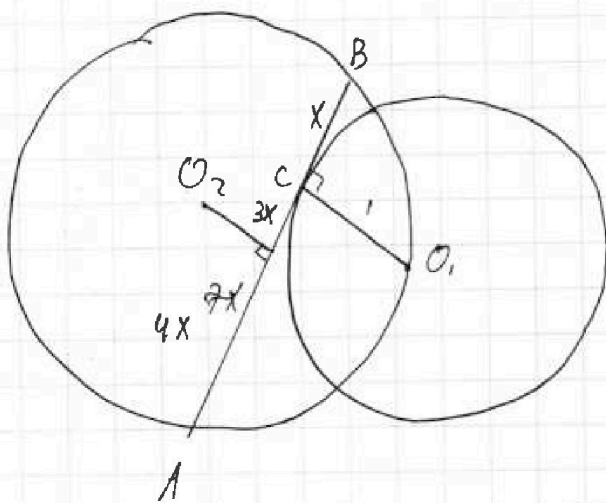
$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad | \quad \text{НОД} : 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{(x+1)^2 + x^2} = 2 - 7x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2 - 7x + \sqrt{(x+1)^2 + x^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$\text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = ?$$



2x

p

r

o

o

$$\pm g d = \frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{3x} = \frac{1}{3x}$$

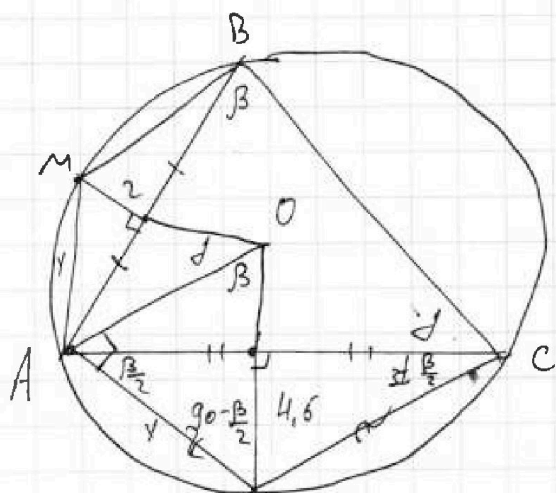
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



147.

$$2x^2 - 4x = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$2\sqrt{4x^2 - 3x + 4} - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 4 - 28x + 49x^2$$

$$25x - 45x^2 = 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$$

$$4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 = 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 - 11x + 3$$

$$625x^2 - 50 \cdot 45x^3 + 45^2x^2$$

$$x + y = 4$$

$$\sqrt{xy} = v$$

$$u - 2v = u^2 - 4v^2$$

$$u^2 - 4 - 4v^2 + 2v = 0$$

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16v^2 - 8v}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{(4v - 1)^2}}{2} = \frac{1 \pm |4v - 1|}{2} = 1 - 2v$$

$$x + y = 2\sqrt{xy}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4xy$$

$$x = y$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = x - y$$

$$x + y - 2\sqrt{xy} = x^2 + y^2 - 2xy$$

$$u - u^2 = v - v^2$$

$$u(u - 1) = v(v - 1)$$

$$u(1 - u) = v(1 - v)$$