



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №1

$a_1: 2^{15} \cdot 7^{11}$     $b_1: 2^{17} \cdot 7^{18}$     $a_2: 2^{25} \cdot 7^{39}$    т.ч.  $a, b, c \rightarrow$

что бы найти минимальное значение произведения, то эти произведения равны, а не делится на эти числа. Нужно из этого и составить систему

$a_2$  - степень двойки в разложении  $a_2, b_2, c_2, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{Z} \geq 0$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 15 \\ b_2 + c_2 = 17 \\ a_2 + c_2 = 23 \\ a_1 + b_1 = 11 \\ b_1 + c_1 = 18 \\ a_1 + c_1 = 39 \end{cases}$$

$\rightarrow 2b_2 = 15 + 17 - 23 = 9$   
 попытка, что это возможно, потому что тогда  $b$  - не целое.

$\Rightarrow$  Нужно увеличить произведения  $a_1, b_1, c_1$  на 2.

(2-знач. число в котором может быть произведение)

Пусть  $b_2 = 5$ , тогда  $2b_2 = 10 > 9$  в этом случае берется то

выполняется  $a_2$ , а мы увеличим на 2 число  $a_1, b_1, c_1$  так, что

$b_2 = 7$ . Но это не решает произведения  $a_1, b_1, c_1 = 7$  нужно все брать в 2 раза

тогда  $a_2 = 5$  является все еще минимальным и тогда  $a_1, b_1, c_1$  берется в 2 раза.

$\Rightarrow a_2 = 10$

$c_1 = 13 \Rightarrow b_1 + c_1 = 18 > 17$

можно получить  $b_2 = 12$

$a_2 = 11$

$a_2 + b_2 = 16 > 15$

$a_2 + b_2 = 16 > 15$

т.ч.  $(a_1 + b_1 + c_1 = 28)$

но так в и получается, но лучше  $a_1 + b_1 + c_1 = 28$

$\rightarrow$  то же можно получить если

случай в первые 3 др. и получим  $a_1 + b_1 + c_1 = \frac{55}{2}$  и округлим до целого аналогично произведем  $7$  (т.ч.  $2$  - взаимно простые числа) и никак округ на округ не выйдет!

~~$a_1 = 11 + 18 - 39 =$~~

$2c_1 = 39 + 18 - 11 \Rightarrow c_1 = 23$

тогда  $a_1 = 39 - 23 = 16$

$\Rightarrow a_1 + b_1 = 11 \Rightarrow$

$16 + b_1 \geq 11$

тогда  $a_1 + b_1 = 0$

$23 + b_1 \geq 18$

$b_1 = 0$

$a_1 = 16$

$c_1 = 23$

$b_1 + a_1 + c_1 = 39$

любое натуральное решение системы округлим до делителей и получим  $a_1, b_1, c_1$  и тогда из полученных вост в систему в виде суммы  $a_1 + b_1 + c_1$  берется кол-во раз и так формируем

$\Rightarrow \min abc = 2^{a_2 + b_2 + c_2} \cdot 7^{a_1 + b_1 + c_1} = 2^{28} \cdot 7^{39}$

← ответ

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\begin{cases} a+b \equiv m \\ a^2-7ab+b^2 \equiv m \pmod{m} \end{cases} \rightarrow (a+b)^2 - 9ab \equiv m \pmod{m}$$

$$\Rightarrow 9ab \equiv m \pmod{m} \text{ т.е. } m \equiv 9$$

Курсивом пометить, сколько раз  $m$  делится на  $9$

пусть  $m = 9k$   $k \in \mathbb{N}$   $k > 1$

$$\Rightarrow a+b = 9k \quad n \in \mathbb{N}$$

$$ab = kn$$

$$a \cdot b$$

$$\rightarrow a = \frac{kn}{b}$$

получается, что сумма взаимно простых  
кратна той же, что и их произведение,  
тогда их сумма  $> 9$



т.к. если  $ab$  -  $a$ -крат,  $b$ -крат, то  $a+b$  -  $ab$ -крат

$a = 9k$  и  $k$  - одной четности

$\Rightarrow$  возможен только вариант  $a$ -чет,  $b$ -чет, тогда

дробь  $\frac{a}{b}$  сократится на 2

чет+кчет = чет  
чет+кчет = чет (X)

$\Rightarrow$  максимальное значение  $m = 9$

ответ

приведем такой пример:  $a = 4$  ;  $b = 5$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{5} \quad \checkmark$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{16-25+25} = \frac{9}{-9} = -1 = \frac{9 \cdot (-1)}{-9 \cdot (-1)} = -\frac{1}{1} \quad \checkmark$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

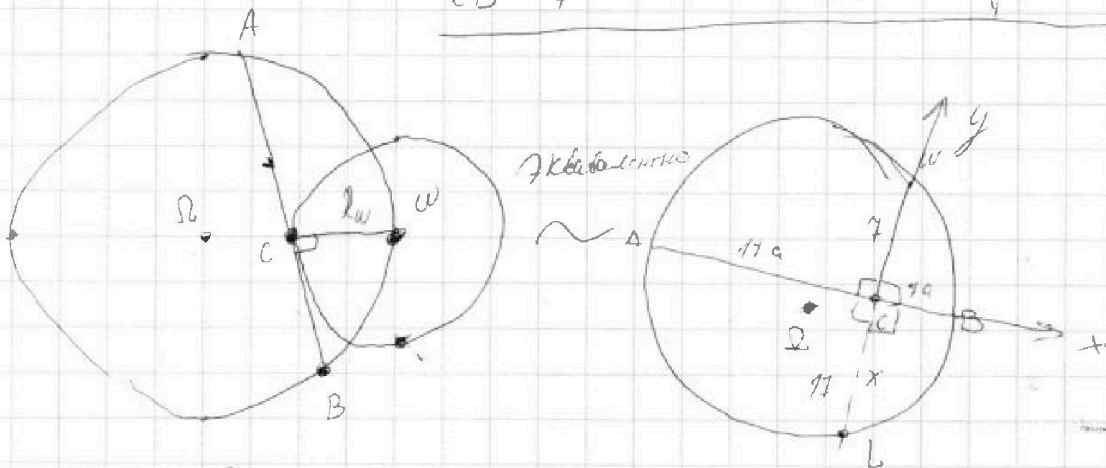
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



Задача № 3

$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7} \quad R_{\omega} = 7 \quad R_{\Omega} = 13 \quad | \quad AB = ?$$



Продолжим  $AB$  до пересечения с окружностью в  $T, L$ .

т.к. это секущая хорды  $\Rightarrow \frac{7a}{7a \cdot x} = \frac{x}{7} \Rightarrow x = 17$

$$\Rightarrow \frac{7a}{x} = \frac{x}{7a} \Rightarrow 7a^2 = x$$

везде по оси

$\omega(O', 7)$   $B(7a; 0)$   $A(-17a; 0)$  - диаметр  $AB$  радиуса 13

$\rightarrow \omega: (0 - \Omega_x)^2 + (7 - \Omega_y)^2 = 13^2 \Rightarrow \Omega_x^2 = 13^2 - (7 - \Omega_y)^2$  с координатами  $\Omega_x, \Omega_y$

$B: (7a - \Omega_x)^2 + \Omega_y^2 = 13^2$

$A: (17a + \Omega_x)^2 + \Omega_y^2 = 13^2$

3 крив. 3 ур.

$$\Rightarrow 7a - \Omega_x = 17a + \Omega_x \Rightarrow 2\Omega_x = -10a$$

$$\Omega_x = -5a$$

$$\Rightarrow (7a + 5a)^2 + (7 - \sqrt{25a^2 - 13^2})^2 = 13^2 \Rightarrow 7 - \Omega_y = \sqrt{25a^2 - 13^2} \Rightarrow \Omega_y = 7 - \sqrt{25a^2 - 13^2}$$

$$12^2 a^2 + 49 + 25a^2 - 13^2 - 14\sqrt{25a^2 - 13^2} = 13^2$$

$$\Rightarrow a^2(12^2 - 25) + 49 - 2 \cdot 13^2 = 14 \cdot \sqrt{25a^2 - 13^2} \quad \uparrow^2 \quad \text{кв. ур относ } a^2 = 1$$

$$2^2(12^2 - 25) + (49 - 2 \cdot 13^2) = 2 \quad \text{неудачно } a = 2 \Rightarrow AB = 17 + 7a = 24 \cdot 2 = 48$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_a \quad \underbrace{\hspace{10em}}_b$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = 1 - 9x$$

$$\Rightarrow a - b = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\Rightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b & \text{I} \\ a + b = 1 & \text{II} \end{cases}$$

I  $a = b \Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \Rightarrow 1 = 9x \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

Проверка:  $\sqrt{3 \cdot \frac{1}{9} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} \stackrel{!}{=} 1 - 9 \cdot \frac{1}{9} = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1} \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{1 - 1 + 2 \cdot 2}{3 \cdot 3}} - \sqrt{\frac{1 + 1 + 2 \cdot 2}{3 \cdot 3}} \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{9}} - \sqrt{\frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} - \sqrt{\frac{3}{9}} = 0$$

$x = \frac{1}{9}$

II  $\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 1 - 9x \end{cases}$  (начальное ур)  $\Rightarrow 2b = 9x \Rightarrow b = \frac{9}{2}x \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \frac{9}{2}x^2$

$$3x^2 + 3x + 1 = \frac{81}{4}x^2 \cdot 4 \Rightarrow (12 - 81)x^2 + 12x + 4 = 0 \Rightarrow -69x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow -69x^2 + 12x + 4 = 0 \quad D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 4^2 \cdot (3^2 + 69)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-12 - 4\sqrt{78}}{-69 \cdot 2} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}; \quad x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

Если ответное нецелое, можно проверить лишние корни - возведем в квадрат. Проверим, чтобы полученное выражение было неотрицательно

$$3x_1^2 + 3x_1 + 1 > 0 \Rightarrow \frac{3 \cdot (36 + 4 \cdot 78 + 24\sqrt{78})}{69^2} + \frac{3(6 + 2\sqrt{78})}{69} + 1 > 0$$

$$3x_2^2 + 3x_2 + 1 > 0 \Rightarrow \frac{3(36 + 4 \cdot 78 - 24\sqrt{78})}{69^2} + \frac{3(6 - 2\sqrt{78})}{69} + 1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1044 - 72\sqrt{78} + 1944 - 44\sqrt{78} + 69}{69} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{2286 + 69 \sqrt{486\sqrt{78}}}{2355 + 486\sqrt{78}} > 0 \quad \sqrt{69} = 8$$

$$2355 < 486 \cdot 8 < 486 \cdot \sqrt{78} \Rightarrow \text{KO}$$

тогда подходит только 1 корень  $\Rightarrow$  X

$\Rightarrow$  Ответ:  $x = \frac{1}{9}; \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

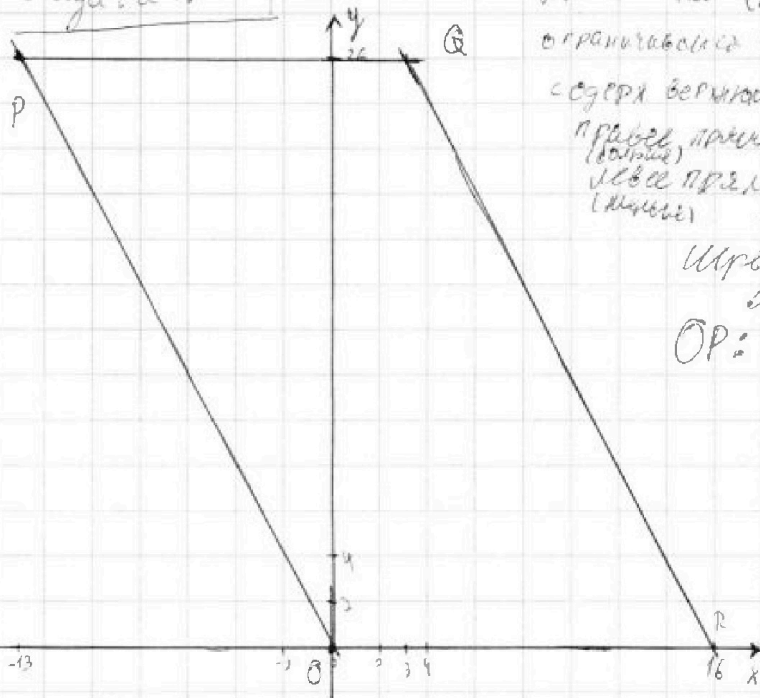
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5



Любая точка  $(x, y)$ , находящаяся в пар. м. ограничена 4-мя уравнениями. Или прямой, содержащей большую сторону, выше пр. сохрм. накл. и (больше) правее прямой, содержащей боковую ст. (меньше) левее пр. прямой, содержащей прав. ст.

Шаг 1. Кр. ст. и пр. прямой

ОР:  $0 = 0 \cdot k + b \Rightarrow b = 0$   
 $26 = -13 \cdot k + 0 \Rightarrow k = \frac{-26}{-13} = 2$   
 $\Rightarrow y = 2x$

QR имеет такой же наклон, как и ОР (пар. м., стороны II)

$\Rightarrow 26 = -2 \cdot 3 + b \Rightarrow$   
 $b = 32$   
 $\Rightarrow y = -2x + 32$

$\Rightarrow$  Полюс штрих

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 26 \\ y \geq -2x \\ y \leq -2x + 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in [0, 26] \\ y + 2x \in [0, 32] \end{cases}$$

Наша задача найти A, B удовлетворяющие ст.

$2x_2 + y_2 - (2x_1 - y_1) = 14$

т.к.  $x, y$  - целые  $\Rightarrow$  и каждая из пар  $2x_2 + y_2$  принимает целые значения от 0 до 32.

т.е. возможные пары.

- 14 - 0 = 14
- 15 - 1 = 14
- 16 - 2 = 14
- ...
- 32 - 18 = 14

$\rightarrow$  от [14 до 32]

19  $\rightarrow$  всего 19 пар  $\leftarrow$  ответ.

Удобнее всего т.к.  $\leq 32$







На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Прямые,  $l \neq 0$  и другая прямая с расстоянием  $a$  от которой никогда не выпадает  $a$~~

$$\left(\frac{12}{5}\right)^2 = a^2 + 1 + \frac{9 \cdot 32}{50} \Rightarrow a^2 = \frac{12^2}{25} - 1 - \frac{9 \cdot 32}{50} = 288 - 50 -$$

$$a^2 = \frac{12^2}{5^2} - 1 = \frac{119}{5^2} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{119}{25}}$$

$$a^2 = 15 \Rightarrow a = \pm \sqrt{15}$$

Ответ:  $a = \frac{\sqrt{119}}{5}, -\frac{\sqrt{119}}{5}, \sqrt{15}, -\sqrt{15}$


это 4 прямых, которые мы искали,  
других существует.



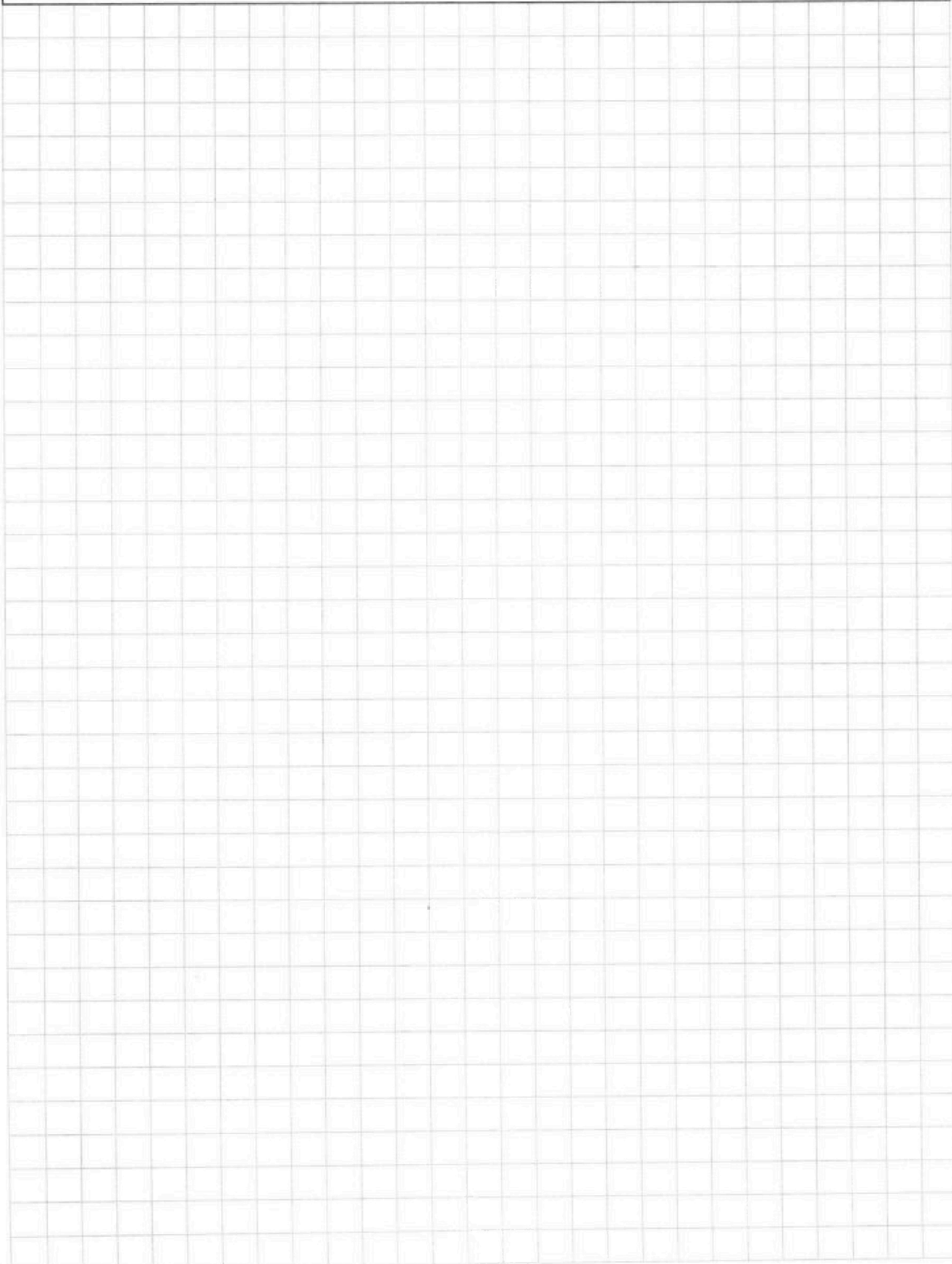
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Увариана.

$a+b: gk$

$ab: l$

$a: x$

$xy = k$

$b: y$

$ab: xy$

$8|b| = |3-2b|$

$-8b = 3-2b$

$b = -\frac{1}{2}$

$2|\frac{3}{5}-b|$

$b \in [0, \frac{3}{2}]$

$8b = 3-2b$

$ay + 1x + 1 = 0$

$\frac{111}{\sqrt{242}} = 1$

$\sqrt{242} = 1$

$a = 0$

$\sqrt{a^2 + 1 + 1} = 1$

$b = \frac{3}{10}$

$10b = 3$

$b = \frac{3}{10}$

$\frac{29}{10} = \frac{12}{5}$

$\frac{144}{-25} = \frac{1}{9}$

$ab = a^2$

$a = 0$

$\frac{144}{-25} = \frac{1}{9}$

$\frac{12}{x+2} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

$\frac{12}{14} = \frac{1}{2}$

$\frac{28}{8}$

$\frac{1}{32} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{288}$

$\frac{144}{59} = \frac{41}{59}$

$\frac{4+6}{1+2} = \frac{5-14}{1+4-1 \cdot 2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$t = 0$   
 $558 \text{ м} = 9$   
 $006 = 900$   
 $6 \text{ м} \text{ (1)}$

$20 + 6 = 58$

$20 \leq 58$

$b \leq 26$

$a \leq 16$

$a \geq 8$

$9a + b = 14$

$a \leq 8$   
 $a \leq 16$   
 $a \leq 9k$

$= 3218$

$b = 26 \cdot (1 + \frac{13}{2})$

$26 = -\frac{26}{13} \cdot 3 + b$   
 $y = -\frac{26}{13}x + b$

$y = -\frac{26}{13}x$

$\frac{26}{13}$



$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$9ab = m$

$10 + b)^2 - 9ab = m$

$a^2 - 10ab + b^2 = m$

$a + b = m$

$\frac{a^2 - 10ab + b^2}{a + b} = \frac{a - 10b + b^2}{1}$

$y \leq -2x + 32$

$y_2 \geq -\frac{26}{13}x = -2x$

$y_1 \leq 26$

$y_2 \leq 26$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 2 \\ 73 \\ \times 73 \\ \hline 219 \\ 511 \\ \hline 5329 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 63 \\ \times 63 \\ \hline 189 \\ 378 \\ \hline 3969 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 67 \\ \times 67 \\ \hline 469 \\ 402 \\ \hline 4589 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 69 \\ \times 4 \\ \hline 276 \\ 9 \\ \hline 285 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \times 5 \\ 25 \\ \hline 35 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 57 \\ \hline \end{array} = 306$$

$$ax + y - 8x = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 12) - 16) \leq 0$$

$$x_1 = \frac{-3 \pm \sqrt{225}}{-2 \cdot 69}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 69 \\ \cdot 9 \\ \hline 78 \end{array} \quad \begin{array}{r} 39 \\ 13 \\ \hline 3 \cdot 2 \cdot 13 \end{array}$$

$$\frac{-12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{-6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x^2 = \frac{6^2 + 4 \cdot 78 - 4 \cdot 6 \sqrt{78}}{69^2}$$

$$\sqrt{\frac{3(6^2 + 4 \cdot 78 - 4 \cdot 6 \sqrt{78})}{69^2} - \frac{6 \cdot (-6 + 2\sqrt{78})}{69} - 12}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 78 \\ \times 4 \\ \hline 312 \\ 36 \\ \hline 398 \\ \times 3 \\ \hline 1044 \\ + 1242 \\ \hline 2286 \\ + 69 \\ \hline 2355 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 18 \\ \times 69 \\ \hline 162 \\ 108 \\ \hline 1242 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 69 \\ \times 6 \\ \hline 414 \\ + 72 \\ \hline 6486 \\ + 8 \\ \hline 88 \end{array}$$