МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\,(x^2+(y-12)^2-16) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №1

$ab: 2^{15}\cdot 7^{11}$ $bc: 2^{17}\cdot 7^{18}$ $ac: 2^{23}\cdot 7^{39}$ т.п. abc -)

Чтобы найти минимум сначала предположим, что эти произведения равны, а не делятся на эти числа. Исходя из этого и свойств степеней составим систему

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2+b_2=15 \\ b_2+c_2=17 \\ a_2+c_2=23 \\ a_7+b_7=11 \\ b_7+c_7=18 \\ a_7+c_7=39 \end{cases}$$

$\to 2b_2 = 15+17-23 = 9$ понятно, что это невозможно, потому что тогда b - не целое.

a_2 - степень двойки в разложении a, аналогично с a_7, b_2, b_7, c_2, c_7

$a_2, a_7, b_2 \ldots \in \mathbb{Z} \geq 0$

$\Rightarrow$ Нужно увеличить произведение минимум на 2. (2 - мин. число в которое может вырасти произведение)

Пусть $b_2=5$, тогда $2b_2 = 10 > 9$ в этом случае все равенства выполняются, а мы умножим на 2 всего 1 раз, не важно что b_2 т.к. нас интересует произведение abc $\Rightarrow$ куда все входит один раз

Этот случай $b_2=5$ является всё еще минимальным и подходит нам. Убедимся в этом:

$\Rightarrow a_2 = 10$
$c_2 = 13$ $\Rightarrow b_2+c_2 = 18 > 17$ можно получить и $c_2 = 12$, $a_2 = 11$, $a_2+b_2 = 16 > 11$

но как в и говорилось, эти случаи эквиваленты

т.к. $a_2+b_2+c_2 = 28$ — что можно получить если сложить первые 3 ур. и получим $a_2+b_2+c_2 = \frac{55}{2}$ и округлить до след

аналогично произведем 7 (7 и 2 — взаимно простые числа и никак друг на друга не влияют!)

~~$2b_7 = 11+18-39 =$~~

$2c_7 = 39+18-11 \Rightarrow c_7 = 23$ тогда $a_7 = 39-23 = 16$

$\Rightarrow a_7+b_7 = 11 \Rightarrow$ $16+b_7 \geq 11$ тогда $\min b_7 = 0$
$23 + b_7 \geq 18$

$b_7 = 0$
$a_7 = 16$ +
$c_7 = 23$ +

$b_7 + a_7 + c_7 = 39$

Любое подобное решение системы округленное до минимального дает одну и туже сумму т.к. каждый из переменных входит в систему в виде суммы одинаковое кол-во раз и они равноправны

$\Rightarrow \min abc = 2^{a_2+b_2+c_2} \cdot 7^{a_7+b_7+c_7} = 2^{28}\cdot 7^{38}$

Ответ

Задача № 2 $\dfrac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

$$\begin{cases} a+b \vdots m \\ a^2-7ab+b^2 \vdots m \; ; \neq 0 \\ a \not\vdots b \text{ (несократ. дробь)} \end{cases} \rightarrow \underbrace{(a+b)^2}_{\vdots m} - 9ab \vdots m$$

$\Rightarrow 9ab \vdots m$ т.е. $m \vdots 9$

Нужно понять, может ли m ~~(ошибка)~~ быть > 9

пусть $m = 9k$ $k \in N$ $k > 1$

$\Rightarrow a+b = 9kn$ $n \in N$ получается, что сумма взаимно простых

$ab = kl$ кратно тому же, чему и их произведение,

$a \not\vdots b$ $\rightarrow a = \frac{kl}{b} \Rightarrow$ где их сумма > 9

$a+b \vdots 9k$

$ab \vdots k$

$\Rightarrow$ т.к. если ab: a - нечёт, b - нечёт, то $a+b$ - чёт, ab - нечёт

а $9k$ и k — одной чётности

$\Rightarrow$ возможен только вариант a - чёт, b - чёт, но тогда дробь $\frac{a}{b}$ сократима на 2

чёт + нечёт = нечёт

чёт * нечёт = чёт (X)

$\Rightarrow$ максимальное значение $m = 9$ → ответ

приведём такой случай: $a = 4$; $b = 5$ $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ ✓

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{16+25-7\cdot 20} = \frac{9}{-99} = \frac{9\cdot(1)}{-9\cdot(11)} = -\frac{1}{11}$$ ✓

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

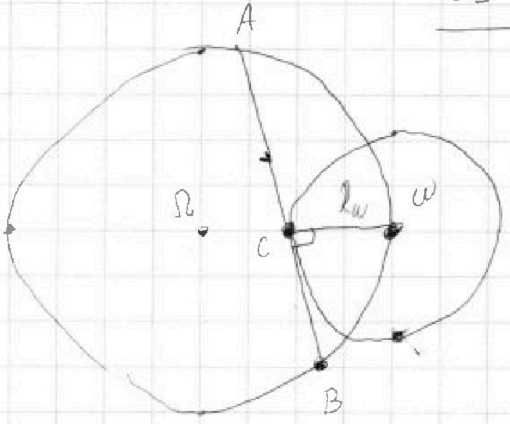
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

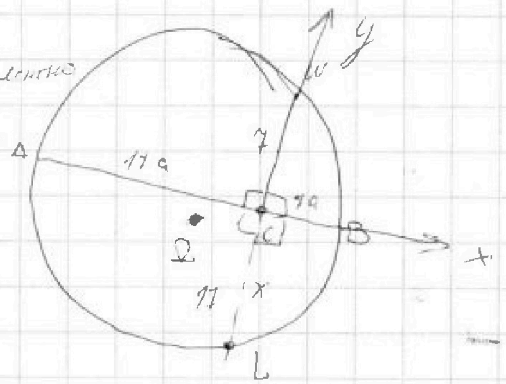
МФТИ

Задача №3

$\frac{AC}{CB}=\frac{17}{7}$ $R_\omega = 7$ $R_\Omega = 13$ | $AB-?$



Эквивалентно $\sim$



Продлим прямую ωC до пересеч. с окружностью в т. L

~~т.к. это безу пересеч. хорды~~ $\cancel{\Rightarrow \frac{17a}{7a}=\frac{x}{7} \Rightarrow x=17}$

$\Rightarrow \frac{17a}{x}=\frac{7}{7a} \Rightarrow 17a^2 = x$

введем оси

$W(0;7)$ $B(7a;0)$ $A(-17a;0)$ - лежат на окр радиуса 13 с коорд Ω_x; Ω_y

$a-?$

$$\Rightarrow \begin{cases} W: (0-\Omega_x)^2+(7-\Omega_y)^2=13^2 \Rightarrow \Omega_x^2 = 13^2-(7-\Omega_y)^2 \\ B: (7a-\Omega_x)^2+\Omega_y^2=13^2 \\ A: (17a+\Omega_x)^2+\Omega_y^2=13^2 \end{cases}$$

3 неизв. 3 ур.

$\Rightarrow 7a-\Omega_x = 17a+\Omega_x \Rightarrow 2\Omega_x = -10a$

$\Omega_x = -5a$

$\Rightarrow (7a+5a)^2+(7-\sqrt{25a^2-13^2})^2=13^2 \Rightarrow 7-\Omega_y = \sqrt{25a^2-13^2} \Rightarrow \Omega_y = \sqrt{25a^2-13^2}$

$12^2a^2+49+25a^2-13^2-14\sqrt{25a^2-13^2}=13^2$

$\Rightarrow a^2(12^2+25)+49-2\cdot13^2 = 14\cdot\sqrt{25a^2-13^2}$ $\uparrow^2$ кв. ур относ $a^2=t$

$t^2(12^2+25)^2+(49-2\cdot13^2)^2+2$

подберём $a=2 \Rightarrow AB=(17+7)a=24\cdot2=48$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4 $\underbrace{\sqrt{3x^2-6x+2}}_{a} - \underbrace{\sqrt{3x^2+3x+1}}_{b} = 1-9x$ $\Rightarrow a^2-b^2 = 3x^2-6x+2-3x^2-3x-1 = 1-9x$

$\Rightarrow a-b = a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$\Rightarrow (a-b)(a+b-1)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \quad I \\ a+b=1 \quad II \end{array}\right.$

I $a=b \Rightarrow \sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1} \;|\;^2 \Rightarrow \cancel{3x^2}-6x+2 = \cancel{3x^2}+3x+1 \Rightarrow 1=9x \Rightarrow x=\frac{1}{9}$

проверим: $\sqrt{3\cdot\frac{1}{9^2}-6\cdot\frac{1}{9}+2} - \sqrt{3\cdot\frac{1}{9^2}+3\cdot\frac{1}{9}+1} \vee 1-9\frac{1}{9}=0$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{3\cdot 9}-\frac{2}{3}+2} \vee \sqrt{\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{3}+1} \Rightarrow \sqrt{\frac{1-18+2\cdot 27}{3\cdot 9}} \vee \sqrt{\frac{1+9+27}{3\cdot 9}} \Rightarrow \sqrt{\frac{37}{3\cdot 9}} = \sqrt{\frac{37}{3\cdot 9}}$ $\emptyset$

$x=\frac{1}{9}$

II $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=1-9x \end{cases}$ $\ominus$ (начальное ур.) $\Rightarrow 2b=9x \Rightarrow b=\frac{9}{2}x \Rightarrow \sqrt{3x^2+3x+1} = \frac{9}{2}x \;|\;^2$

$3x^2+3x+1 = \frac{81}{4}x^2 \;|\cdot 4 \rightarrow (12-81)x^2+12x+4=0 \Rightarrow$ ~~$69x^2+3x+1=0$~~ ~~$D=9+4\cdot 69$~~

$\Rightarrow -69x^2+12x+4=0 \quad D=12^2+4\cdot 4\cdot 69 = 4^2\cdot(3^2+69)$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-12-4\sqrt{78}}{-69\cdot 2} = \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$; $x_2 = \frac{6-2\sqrt{78}}{69}$

Единственное место, где могли возникнуть лишние корни – возведение в квадрат.
Проверим, чтобы подкоренное выражение было неотрицательно

$3x_1^2+3x_1+1 \vee 0 \Rightarrow \frac{3\cdot(36+4\cdot 78+24\sqrt{78})}{69^2} + \frac{3(6+2\sqrt{78})}{69}+1 > 0$ $\emptyset$

$3x_2^2+3x_2+1 \vee 0 \quad \frac{3\cdot(36+4\cdot 78-24\sqrt{78})}{69^2} + \frac{3(6-2\sqrt{78})}{69}+1 \vee 0$

$\Rightarrow \frac{1044-72\sqrt{78}+1242-414\sqrt{78}+69}{69} \vee 0 \;|\cdot 69 \Rightarrow 2286+69 \vee 486\sqrt{78}$

$2355 \vee 486\sqrt{78}$ $\sqrt{64}=8$

$2355 < 486\cdot 8 < 486\cdot\sqrt{78}$

$\Rightarrow <0$

тогда подходит только 1 корень $\Rightarrow$ X

$\Rightarrow$ Ответ: $x=\frac{1}{9}$; $\frac{6+2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

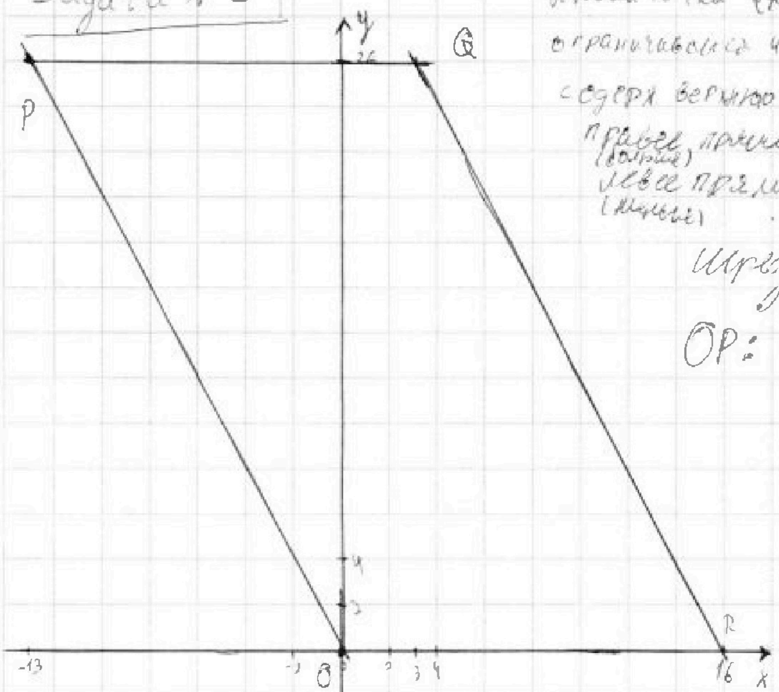
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

Любая точка (x, y), находящаяся в пар-ме ограничивающим 4-мя уравнениями. Ниже прямой, содерж. верхнюю сторону, выше пр. содерж. нижн. ст. правее прямой, содержащ. боковую ст. (больше) левее прямой, содерж. прав. ст. (меньше)



Через 2 т. найдём ур. прямы

OP: $0 = 0\cdot k + b \Rightarrow b = 0$

$26 = -13\cdot k + 0 \Rightarrow k = \frac{-26}{13} = -2$

$\Rightarrow y = -2x$

QR имеет такой же наклон, к-ку. и OP (пар-м, стороны $\parallel$)

$\Rightarrow 26 = -2\cdot 3 + b \Rightarrow$

$b = 32$

$\Rightarrow y = -2x + 32$

$\Rightarrow$ получим систему

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 26 \\ y \geq -2x \\ y \leq -2x+32 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y \in [0, 26] \\ y + 2x \in [0; 32] \end{array}$$

Нам требуется найти A, B удовлетворяющие ур.

$$2x_2 + y_2 - (2x_1 - y_1) = 14$$

т.к. x, y – целые $\Rightarrow$ и каждая из пар $2x_2 + y_2$ принимает целые знач. от 0 до 32.

т.е. возможные пары.

$14 - 0 = 14$ $\rightarrow$ от [14 до 32]

$15 - 1 = 14$

$16 - 2 = 14$

$\vdots$

$32 - 18 = 14$

$\Big\}$ 19 $\rightarrow$ всего 19 пар $\leftarrow$ ответ.

дальше нельзя т.к. ≤ 32

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

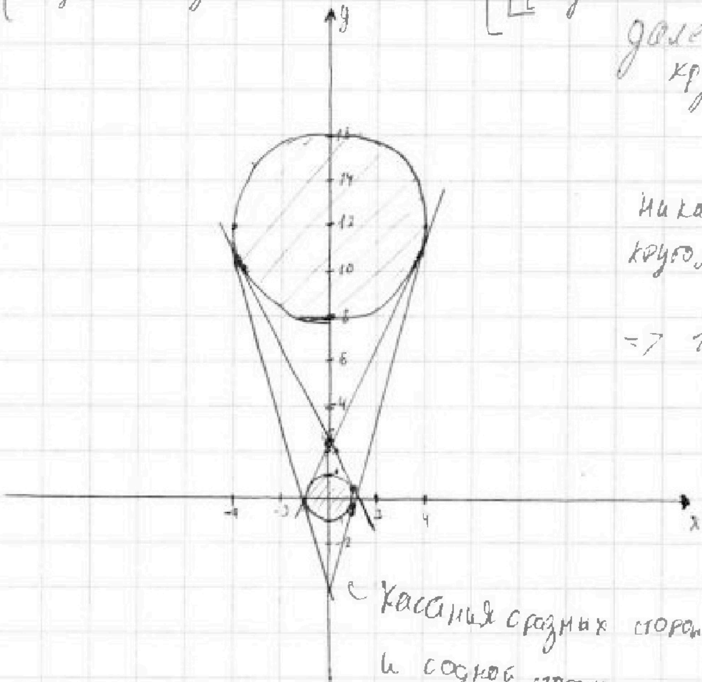
$\Leftrightarrow$

$y = 8b - ax$ — это прямая

$\begin{cases} x^2+y^2\ge 1^2 \\ x^2+(y-12)^2\le 4^2 \end{cases}$ — область вне круга $R=1$ $O(0,0)$; — область внутри круга $R=4$ $O(0,12)$

$\begin{cases} x^2+(y-12)^2\ge 4^2 \\ x^2+y^2\le 1^2 \end{cases}$ — область вне круга $R=4$ $O(0;12)$; — круг $R=1$ $O(0;0)$

далее будет показано, что эти круги никак не пересекаются т.е. просто области координат



Никакая прямая не может иметь $2^{-ух}$ точки с кругом либо касание (1 точка) либо хорда — бесконечно много

=> что бы в нашей системе было ровно 2 решения. нужно рассмотреть 2 разных способа касания, каждый из которых даёт 2 симметричных относ оси y решения

с касания с разных сторон второе симметрично относ $x\to -x$ и с одной стороны

Запишем ур. касания, как расстояние от точки центра до прямой = радиусу

прямая $ax+1y-8b=0$ $\quad O_1(0,0)$ $\quad O_2(0;12)$ $\quad R_1=1$ $\quad R_2=4$

O_1: $\dfrac{|a\cdot x_{O_1}+1\cdot y_{O_1}-8b|}{\sqrt{a^2+1^2}}=1 \Rightarrow \dfrac{8|b|}{\sqrt{a^2+1^2}}=1 \Rightarrow 8|b|=\sqrt{a^2+1}$, $\sqrt{a^2+1^2}>0$

O_2: $\dfrac{|a\cdot x_{O_2}+1\cdot y_{O_2}-8b|}{\sqrt{a^2+1^2}}=4 \Rightarrow |12-8b| = 4\sqrt{a^2+1}$, $\sqrt{a^2+1^2}>0$

$\Rightarrow \begin{cases} 8|b|=\sqrt{a^2+1} \\ 4|3-2b| = 4\sqrt{a^2+1}\end{cases} \Rightarrow 8|b| = |3-2b| = 2|b-\frac{3}{2}|$

1) $b\ge\frac{3}{2} \Rightarrow 8b=-3+2b \Rightarrow 6b=-3$, $b=-\frac{1}{2}$ $\varnothing$ т.к. $b\ge\frac{3}{2}$

2) $b\in[0;\frac{3}{2}) \Rightarrow 8b=-2b+3 \Rightarrow 10b=3 \Rightarrow b=\frac{3}{10}$ ✓

3) $b\le 0$ $-8b=3-2b \Rightarrow -6b=3$ $b=-\frac{1}{2}$ ✓

$\Rightarrow \left[\begin{aligned} 8\left|\tfrac{3}{10}\right| &= \sqrt{a^2+1} \quad \uparrow^2 \\ 8\left|-\tfrac{1}{2}\right| &= \sqrt{a^2+1} \quad \uparrow^2 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} \left(\tfrac{12}{5}\right)^2 &= a^2+1 \\ 16 &= a^2+1 \end{aligned}\right.$

~~Получается, что случай касания с одной стороны никогда не выполняется~~

$\cancel{\left(\frac{12}{5}\right)^2 = a^2 + 1 + \frac{9\cdot 32}{50} \Rightarrow a^2 = \frac{12^2}{25} - 1 - \frac{9\cdot 32}{50} = 288 - 50 -}$

$a^2 = \frac{12^2}{5^2} - 1 = \frac{119}{5^2} \Rightarrow a = \pm\frac{\sqrt{119}}{5}$

$a^2 = 15 \Rightarrow a = \pm\sqrt{15}$

Ответ: $a = \frac{\sqrt{119}}{5};\ -\frac{\sqrt{119}}{5};\ \sqrt{15};\ -\sqrt{15}$

Это 4 прямых, которые мы искали, других случаев нет.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

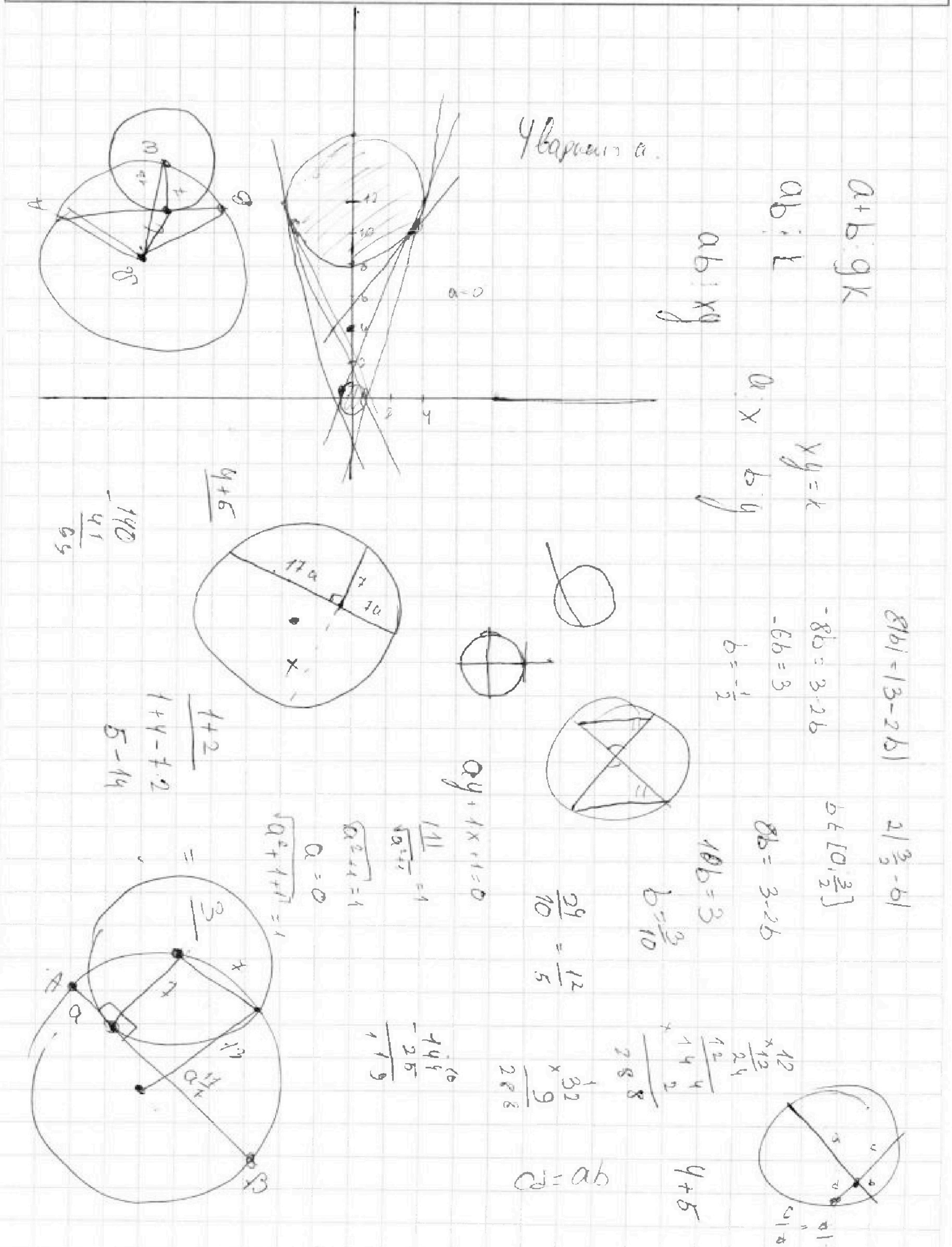
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=14$

$y_2\le 26$

$y_1\le 26$

$y_1\ge -\frac{26}{13}x=-2x$

$y\le -2x+32$

$y=-\frac{26}{13}x$

$y=-\frac{26}{13}x+b$

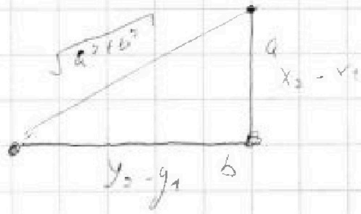
$26=-\frac{\cancel{26}2}{13}\cdot 3+b$

$b=26\cdot\left(1+\frac{3}{13}\right)$

$=32+\cancel{6}$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

$\frac{1}{a-7b+\frac{b^2}{a}}$



$a\,\vdots\,b$

$ab\,\vdots\,k$

$a+b\,\vdots\,9k$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$

$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=14$

$9a+b=14$

$\frac{a+b}{ab}\,\vdots\,9$

$a\le 8$

$b\le$

$a\le 16$

$b\le 26$

$a+b\,\vdots\,m$

$a^2-7ab+b^2\,\vdots\,m$

$\frac{a}{b}-$

$9ab\,\vdots\,m$

$b\,\vdots\,9k-a$

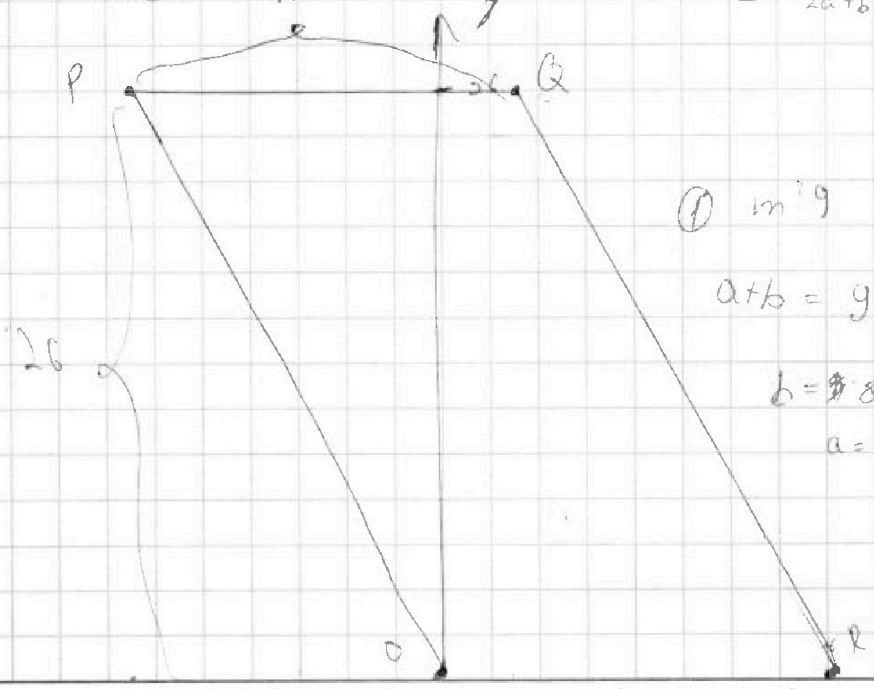
$a\,\vdots\,\frac{\cancel{k}}{b}$

$\Rightarrow 9k-a\,\vdots\,\frac{k}{b}$

$2a\le 32$

$(a+b)^2-9ab\,\vdots\,m$ 16

$2a+b\le 58$



① $m\,\vdots\,9$

$a+b=900$

$b=\cancel{8}\,899$

$a=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$
$bc: 2^{17} \cdot 7^{15}$
$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$

53×53: 159, 265

55 → 27,5

$a_2 + b_2 = 15$
$b_2 + c_2 = 17$ ⊕ $a_2 + c_2 + 2b_2 = 32$
$a_2 + c_2 = 23$

$2b_2 = 32 - 23 = 9$

$b_2 = 5$ $c_2 = 12$
$a_2 = 11$

$c_7 = \frac{39+7}{2} = 23$

$a_7 = 39 - 23$

69×69: 621, 414, 4761

$81 - 12 = 69$

16×12: 32, 16, 192

$4761 - 192 = 4569$

$\underbrace{\sqrt{3x^2-6x+2}}_{a} - \underbrace{\sqrt{3x^2+3x+1}}_{b} = 1-9x$

$a^2 - b^2 = \cancel{3x^2} - 6x + 2 - \cancel{3x^2} - 3x - 1$
$= 1 - 9x$

$\Rightarrow a - b = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$\Rightarrow (a-b)(a+b-1) = 0$

$81 - 12 = 69$

$a = b$

$\sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1}$ $)^2$

$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$

$9x = 1$

$x = \frac{1}{9}$ проверим:

$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{9^2} - \frac{1}{9} \cdot 6 + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{9^2} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} \vee 0$

$\sqrt{\frac{3}{3 \cdot 3 \cdot 9} - \frac{2}{3} + 1} \vee \sqrt{\frac{3}{3 \cdot 3 \cdot 9} + \frac{1}{3} + 1}$

$\sqrt{\frac{1 - 18 + 2 \cdot 27}{3 \cdot 3 \cdot 9}} \vee \sqrt{\frac{1 + 9 + 27}{3 \cdot 3 9}}$

$\sqrt{\frac{37}{3 \cdot 3 9}} = \sqrt{\frac{37}{3 \cdot 3 \cdot 9}}$

$a + b = 1$

$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$ ⊖
$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 - 9x$

$2\sqrt{3x^2+3x+1} = 9x$ $)^2$

$3x^2 + 3x + 1 = \frac{81}{4}x$ $| \cdot 4$

$3x^2 +$

$12x^2 + 12x + 4 = 81x$

$12x^2 - 69x + 4 = 0$

$D = 69^2 - 4 \cdot 4 \cdot 12 = 4569$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

73×73: 219, 511, 5329

63×63: 189, 378, 3969

67×67: 469, 402, 4589

$69 \times 4 = 276$, $276 + 9 = 285$

$285 : 5 = 57$

$y = -ax + 8b$

$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{285}}{-2 \cdot 69}$

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$69 + 9 = 78$

$39 \mid 13$

$3 \cdot 2 \cdot 13$

$\frac{-12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{-6 + 2\sqrt{78}}{69}$

$x^2 = \frac{6^2 + 4 \cdot 78 - 4 \cdot 6\sqrt{78}}{69^2}$

$$\sqrt{\frac{3(6^2 + 4 \cdot 78 - 4 \cdot 6\sqrt{78})}{69^2} - \frac{6 \cdot (-6 + 2\sqrt{78})}{69} \cdot 12}$$

$78 \times 4 = 312$, $312 + 36 = 348$, $348 \times 3 = 1044$, $1044 + 1242 = 2286$, $2286 + 69 = 2355$

18×69: 162, 108, 1242

$69 \times 6 = 414$, $414 + 72 = 486$, 486×8 = 88