



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1 (:-кратно; / - не кратно)

Пусть  $a = k_1 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$  (где  $k_1/2$  и  $k_1/7$ )  
 $b = k_2 \cdot 2^{\beta_2} \cdot 7^{\delta_2}$  (где  $k_2/2$  и  $k_2/7$ )  
 $c = k_3 \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\delta_2}$  (где  $k_3/2$  и  $k_3/7$ )

где  $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \alpha_i, \beta_i, \delta_i \in \mathbb{Z}$   
 $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \alpha_2, \beta_2, \delta_2 \geq 0$   
 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$

Тогда  $ab = k_1 \cdot k_2 \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\beta_2 + \delta_2}$   
 $bc = k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{\beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\beta_2 + \delta_2}$   
 $ac = k_1 \cdot k_3 \cdot 2^{\alpha_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \delta_2}$

Заметим, что т.к. 2 и 7 - простые числа,  
то:  $k_1 \cdot k_2/2$  и  $/7$ ;  $k_2 \cdot k_3/2$  и  $/7$ ;  
 $k_1 \cdot k_3/2$  и  $/7$ ;  $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3/2$  и  $/7$

Тогда из условия следует, что:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 & (11) \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 & (21) \\ \beta_1 + \delta_1 \geq 17 & (12) \\ \beta_2 + \delta_2 \geq 17 & (22) \\ \alpha_1 + \delta_1 \geq 20 & (13) \\ \alpha_2 + \delta_2 \geq 37 & (23) \end{cases}$$

$$a \cdot b \cdot c = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2}$$

(\*) Из условия: (11)+(12)+(13):  $2(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq 51 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 \geq \frac{51}{2} \geq 26$  (т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \alpha_2, \beta_2, \delta_2, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ );  $(k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N})$

Приведем пример  $\alpha_1, \beta_1, \delta_1$  при которых  $\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 = 26$  и условия (11), (12) и (13) выполняются:  $\alpha_1 = 9, \beta_1 = 6, \delta_1 = 11$ .

(\*\*) Из условия: (21)+(22)+(23):  $2(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) \geq 64 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq \frac{64}{2} = 32$ .

Приведем пример  $\alpha_2, \beta_2, \delta_2$  при которых  $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 = 32$  и условия (21), (22) и (23) выполняются: Но из того, что  $\beta_2 \geq 0$  и условия (23) следует, что  $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq \alpha_2 + \delta_2 \geq 37$

Приведем пример  $\alpha_2, \beta_2, \delta_2$  при которых  $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 = 37$  и условия (21), (22) и (23) выполняются.  $\alpha_2 = 20, \beta_2 = 0, \delta_2 = 17$ .

Заметим, что т.к.  $k_1, k_2, k_3$  никак не влияют на делимость, то  $\min abc \in \mathbb{N}$   
 $\ominus 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2}$  (при  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ ).

Из (\*) и (\*\*) видно, что мин.  $\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 = 26$ , а мин.  $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 = 37$ .

$$\Rightarrow \min abc = 2^{26} \cdot 7^{37} \quad (a = 2^9 \cdot 7^{20}, b = 2^6 \cdot 7^0, c = 2^{11} \cdot 7^{17})$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$\frac{a}{b}$  - несократима,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Рассмотрим дробь } \frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a^2+2ab+b^2)-8ab} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2-8ab}.$$

Пусть  $(a+b) = km$ . Тогда, во-первых  $(a+b) \perp (\text{вращено к } c) k$ , во-вторых

$(a+b)^2 = k^2 m^2 : m$ . Так как если наша дробь сократима на  $m$ , то её чис-

литель и знаменатель оба кратны  $m$ . Это есть  $(a+b)^2 - 8ab = k^2 m^2 - 8ab$  - кратно

$m$ . Это возможно только если  $8ab : m$ . Пусть  $8ab = l \cdot m$  ( $8ab \perp l$ ).

И.к.  $(a+b) = km$ , то  $b = km - a \Rightarrow 8ab = 8a \cdot (km - a) = 8aktm - 8a^2 = l \cdot m$ .

Это возможно только если  $8a^2 : m$ . Пусть  $8a^2 = n \cdot m$  ( $8a^2 \perp n$ ). Тогда

посмотрим на дробь  $\frac{8ab}{8a^2} = \frac{8 \cdot a \cdot b}{8 \cdot a \cdot a} = \frac{a}{a} = \frac{n \cdot m}{l \cdot m}$ .

При  $m > 1$  получаем, что дробь  $\frac{a}{b} = \frac{n \cdot m}{l \cdot m}$  сократима, это противоре-  
чит условию.

При  $m = 1$  получаем  $\frac{a}{b} = \frac{n}{l}$ . И.к.  $m = 1$  - максимальное значение  $m$ .

~~Пример, когда  $m = 1$  подходит, это, например  $a = 2, b = 1$ . Но очевидно~~

Ответ:  $m = 1$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

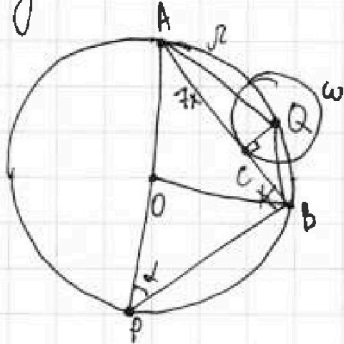
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Портя QR-кода недопустима!



Задача № 3



Пусть  $AC=7x$  и  $CB=x$ .  
Продлим  $AO$  до пересек. с  $\Omega$  в т.  $P$ .

$\angle APB = \alpha$ .  $\angle ABP = 90^\circ$  (AP-диам.) По т. Пифагора:  $PB = \sqrt{AP^2 - AB^2}$   
 $\Rightarrow \cos \alpha = \frac{PB}{AP} = \frac{\sqrt{AP^2 - AB^2}}{AP} = \frac{\sqrt{100 - 64x^2}}{10} = \sqrt{\frac{100 - 64x^2}{100}}$

$\angle AQB = 180^\circ - \alpha$  (4-x-угольник  $APBQ$ -впис.)

$\Rightarrow \cos \angle AQB = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ .

$\Rightarrow$  По т. косинусов для  $\triangle AQB$ :  $AB^2 = AQ^2 + BQ^2 + 2 \cdot AQ \cdot BQ \cdot \cos \alpha$

Заметим, что по т. Пифагора у  $\triangle AQC$  и  $\triangle QCB$ :

$AQ = \sqrt{49x^2 + 1}$ ;  $BQ = \sqrt{x^2 + 1}$ .

$\Rightarrow (8x)^2 = 49x^2 + 1 + x^2 + 1 + 2 \cdot \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{100 - 64x^2}{100}}$

$\Rightarrow 14x^2 - 2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)(100 - 64x^2)}{100}}$  - возведем обе части в квадрат

$(14x^2 - 2)^2 = 4 \cdot \frac{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)(100 - 64x^2)}{100}$

$25 \cdot (14x^2 - 2)^2 = (49x^2 + 1)(x^2 + 1)(100 - 64x^2)$

Раскрыв скобки и приведем подобные, получим:

$3136x^6 - 3136x^2 = 0$

$x^2(3136x^4 - 3136) = 3136x^2(x^4 - 1) = 0$   $\left[ \begin{array}{l} x=0 \text{ - не соотв. условию задачи} \\ x=1 \end{array} \right.$

$\Rightarrow AB = 7x + x = 8x = 8$ .

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + (4x^2 - 3x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = (4x^2 - 3x + 3) \quad (*)$$

$$\nexists 4x^2 - 3x + 3 = 0$$

$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0$ . Значит  $(4x^2 - 3x + 3) > 0$  при любых  $x$ .

Но  $-2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} \leq 0$  при любых  $x$ .

Значит у ур-я  $(*)$  нет решений.

Ответ:  $x = \bar{\phantom{x}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$ . Пусть  $\sqrt{2x^2-5x+3} = a$  ( $a \geq 0$ ) и  $\sqrt{2x^2+2x+1} = b$  ( $b \geq 0$ ). Тогда заметим, что  $a^2 - b^2 = 2-7x$ .

Т.е.  $a-b = a^2 - b^2 \Rightarrow (a-b) = (a-b)(a+b)$

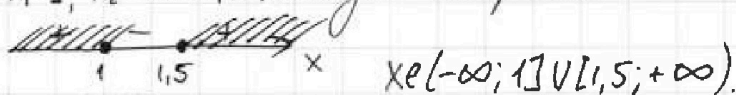
1. ОДЗ: а)  $\sqrt{2x^2-5x+3} \Rightarrow 2x^2-5x+3 \geq 0$

✗ (рассмотрим)  $2x^2-5x+3=0$

$D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4}$

$x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{2} = 1,5$ . Методом интервалов:



б)  $\sqrt{2x^2+2x+1}$ .  $2x^2+2x+1 \geq 0$

✗  $2x^2+2x+1=0$

$D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0$

$\Rightarrow 2x^2+2x+1 > 0$  при любом  $x$ .

2.  $(a-b) = (a-b)(a+b)$ .

Случай 1.  $(a-b) = 0$ .

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}$ .

$2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1$ .

$5x+2x = 3-1=2$

$7x=2$

$x = \frac{2}{7}$  - подходит под ОДЗ

Случай 2.  $(a-b) \neq 0$

$(a-b) = (a-b)(a+b) \quad | : (a-b)$

$1 = a+b$

$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$ . Возведем обе части в квадрат:

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поня QR-кода недопустима!

Задача №6

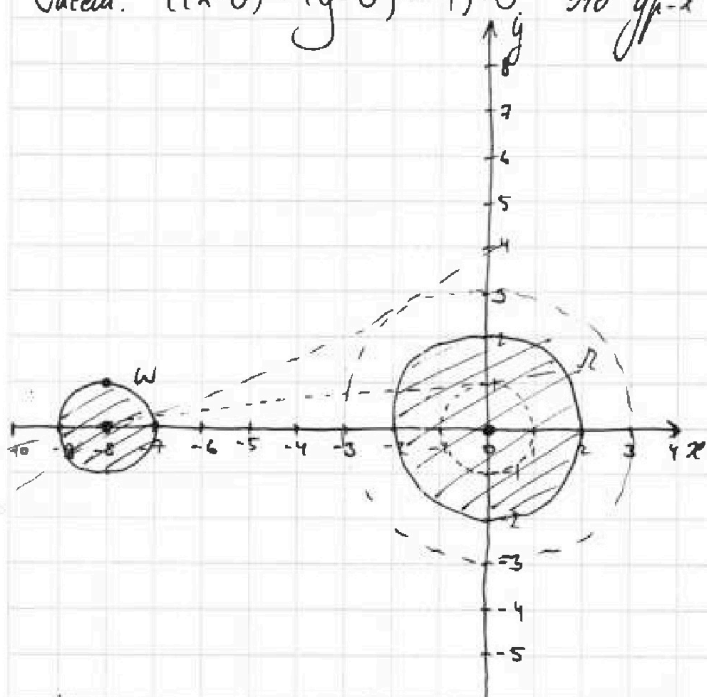
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (\neq) \end{cases}$$

Рассм.  $((x+8)^2 + (y-0)^2 - 1) = 0$ . Это ур-е окр. с центром  $(-8; 0)$  и радиусом 1.

Рассм.  $((x-0)^2 + (y-0)^2 - 4) = 0$ . Это ур-е окр. с центром  $(0; 0)$  и радиусом 2.

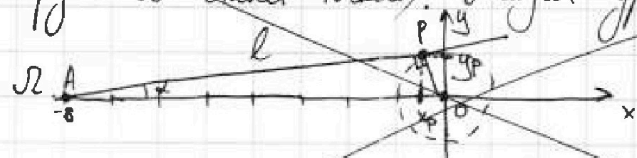
Области внутри и границы окружностей соответствуют неравенству  $(\neq)$ .

Есть всего 4 прямые, которые пересекут заштрихованную область 2-раза. Это касательные к этим 2-м окружностям.



Каждо найти их уравнение.

1. Внешние касательные. Мысленно уменьшим радиусы окруж. на 1. (окруж. W станет точкой). Найдём ур-е касат. из этой точки к новой



Длина этой касат.  $l$  из т. Пифагора:

$$l = \sqrt{(0-8)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{63}. \quad \sin \alpha = \frac{OP}{AP} = \frac{1}{8}. \Rightarrow l_y = l \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}. \quad l_x = \frac{63}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

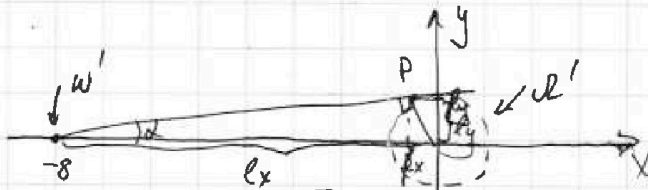
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Внешние касат. Мысленно уменьшим радиусы окруж. на 1.



Длина этой касат.  $l$  по т. Пифагора.

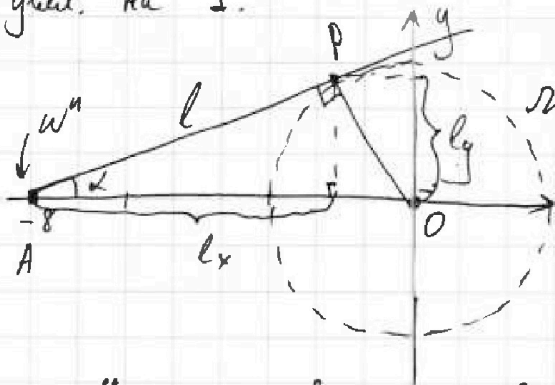
$$l = \sqrt{63}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{8} = \frac{OP}{AP}$$

$$\Rightarrow l_y = l \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}, \quad l_x = \frac{63}{8}$$

Найдем ур-е: 
$$\begin{cases} 0 = -8a + 10b \\ (-8 + \frac{63}{8})a + 10b = \frac{\sqrt{63}}{8} \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{63}/63$$

Аналогично:  $a = -\sqrt{63}/63$ . (реальные касат. получили паралл. переносом на  $\pm 1$  вдоль Oy)

2. Внутр. касат. Мысленно уменьшим радиусы  $\omega$  на 1, а ради.  $\Omega$  увелич. на 1.



$$l = \sqrt{64 - 9} = \sqrt{45}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{8} = \frac{OP}{AP}$$

$$\Rightarrow l_y = l \cdot \sin \alpha = \frac{3\sqrt{45}}{8}; \quad l_x = \frac{45}{8}$$

$\Rightarrow$  Найдем  $a$ : 
$$\begin{cases} 0 = -8a + 10b \\ (-8 + \frac{45}{8})a + 10b = \frac{3\sqrt{45}}{8} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{45}}{45}$$

Аналогично:  $a = -\frac{3\sqrt{45}}{45}$ . (реальные касат. получили паралл. переносом на  $\pm 2$  вдоль Oy)

Ответ:  $\pm \frac{\sqrt{63}}{63}; \pm \frac{3\sqrt{45}}{45}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

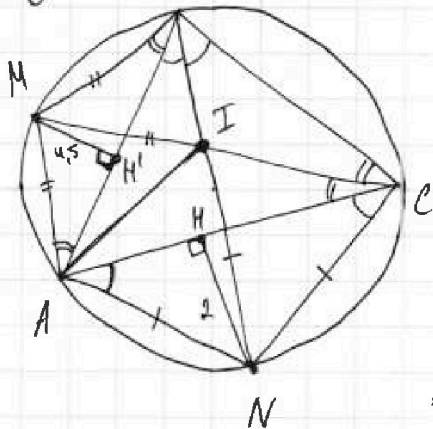
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7



AI-?

I - центр впис. окруж., I - т. пересеч.

BN и CM (бисес.  $\angle B$  и  $\angle C$ )

По лемме о треугольнике  $AM=MB=MI$   
 $AN=NC=NI$

$\angle ABN = \angle ACN$  (впис., оп-ся на  $\overset{\frown}{AN}$ )  
 $\Rightarrow \angle NAC = \angle ACN = \angle ABN$

$\angle MBA = \angle MCA$  (впис., оп-ся на  $\overset{\frown}{AM}$ )

$\Rightarrow \angle MBA = \angle MAB = \angle MCA$

Поскольку  $MN'$  - выс. в равнобед.  $\triangle AMB$ .  $\Rightarrow MN'$  - медиана  $\Rightarrow AN' = N'B$ .  
 $NH$  - выс. в равнобед.  $\triangle ANC$ .  $\Rightarrow NH$  - медиана  $\Rightarrow AN = NC$ .

$\Rightarrow NH' - \text{ср. линия}$

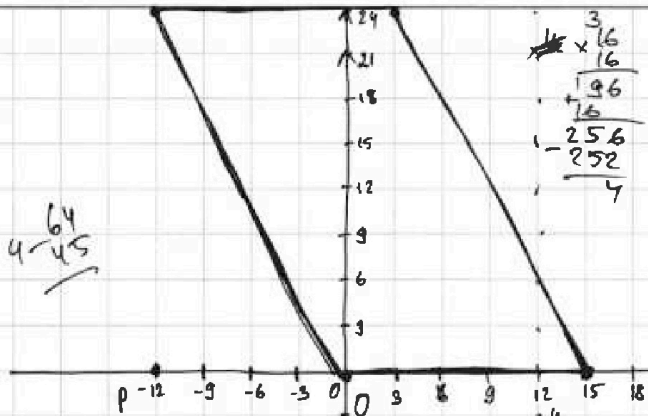
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 196 \\ + 16 \\ \hline 256 \\ \hline 252 \\ \hline 4 \end{array}$$

$(x+8)^2 \leq 1$

$$x^2 + 16x + 64 - 1 = 0$$

$$x^2 + 16x + 63 = 0$$

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 63 = 256 - 252 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm 2}{2}$$

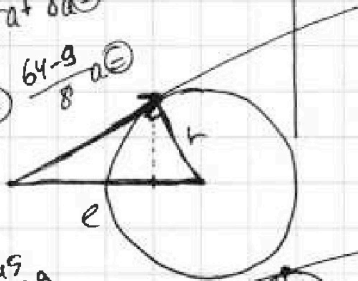
$$x_1 = -9, x_2 = -7$$

$$x \in (-9; -7) \cup \{-7; -9\}$$

$$4 - \frac{64}{45}$$

$$\frac{9}{8}a + 8a = 0$$

$$\frac{64-9}{8}a = 0$$



$$\frac{45}{8}a$$

$$\frac{45}{8}a = \frac{5\sqrt{45}}{8} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{45}}{45}$$

$$-8 = a + 10b = 0$$

$$\Rightarrow a = -10b$$

$$0 = -8a + 10b$$

$$\left(\frac{1}{8} + 8\right)a = 0$$

$$a = \frac{63}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{63}{64}$$

$$a = -8$$

$$-9, 5; 0$$

$$ax - y + 10b = 0$$

$$y^2 = (ax + 10b)^2 = a^2x^2 + 20abx + 100b^2$$

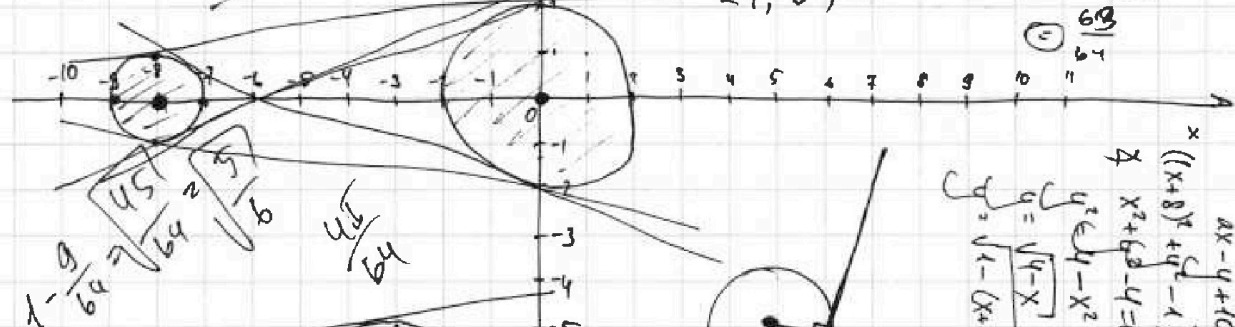
$$y = ax + 10b$$

$$\frac{\sqrt{63}}{64}$$

$$1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{64} = \frac{64-1}{64}$$

$$\frac{63}{64}$$



$$1 - \frac{9}{64} = \frac{55}{64}$$

$$\frac{45}{64}$$

$$ax - y + 10b = 0$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$y^2 = 5 - x^2$$

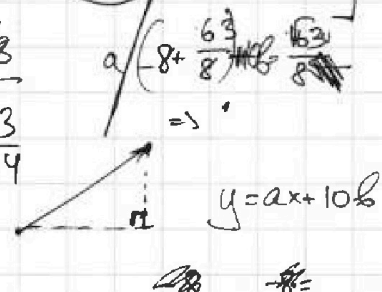
$$y = \sqrt{5 - x^2}$$

$$\sqrt{63}^2 - \sqrt{\frac{63}{64}}^2 = 63 - \frac{63}{64}$$

$$\frac{63}{64} \left(1 - \frac{1}{64}\right) = \frac{63^2}{64}$$

$$0 > (h_1 - h_2 + x)(9 + x) + 2h_1x$$

$$h_1 + x > 0 \Rightarrow x > -h_1$$



$$y = ax + 10b$$

$$0 > (h_1 - h_2 + x)(1 - h_1 + 2x) + 2h_1x$$

$$0 > 10b + h_1 - h_2 - ax$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y^2 = -(x+8)^2 + 1 = 1 - x^2 - 16x - 64 = -x^2 - 16x - 63$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$x_0 = \frac{-16}{-2} = -8$$

$$y^2 =$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2$$

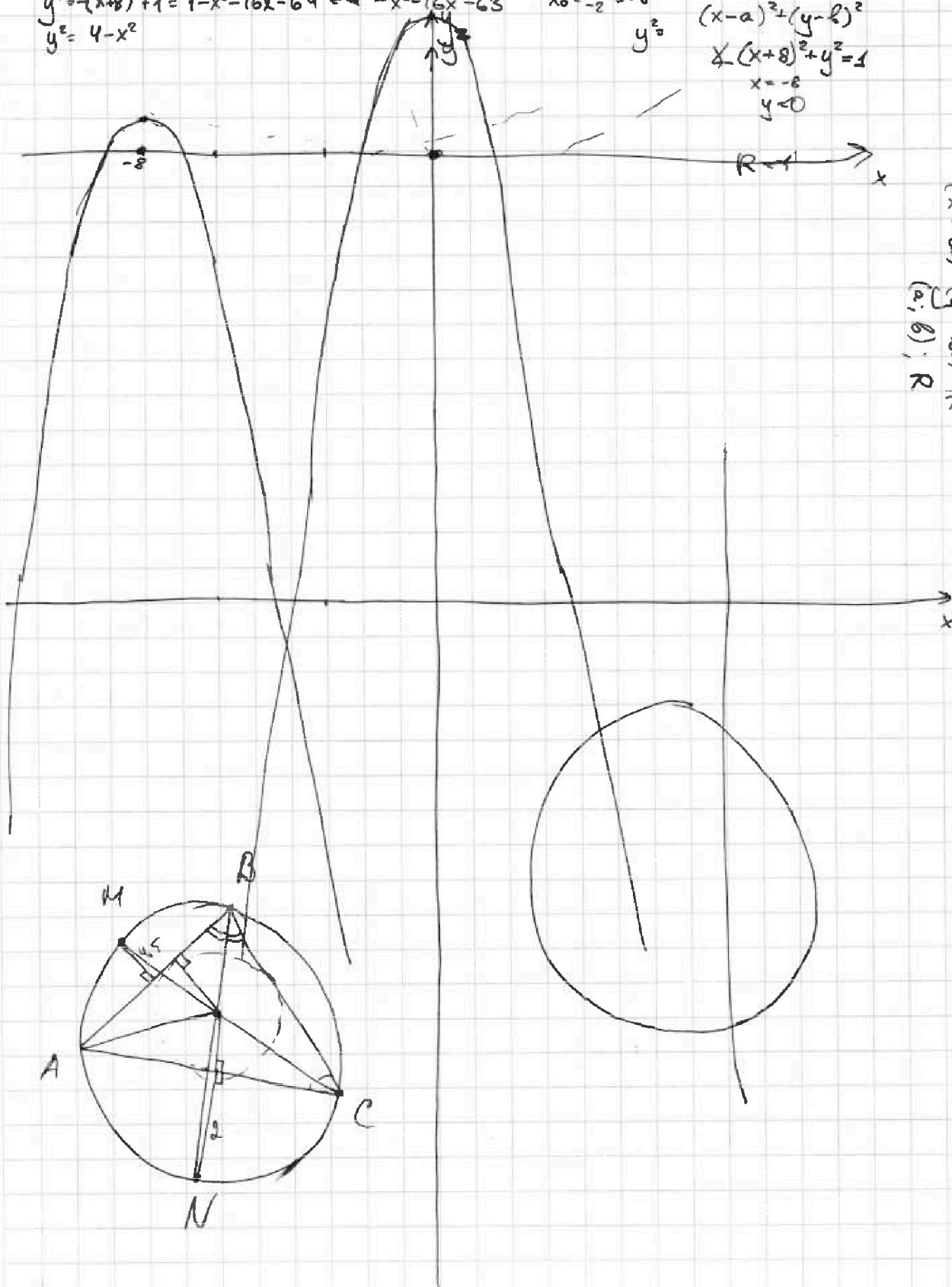
$$x(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$x = -8$$

$$y = 0$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$R(a; b); R$$



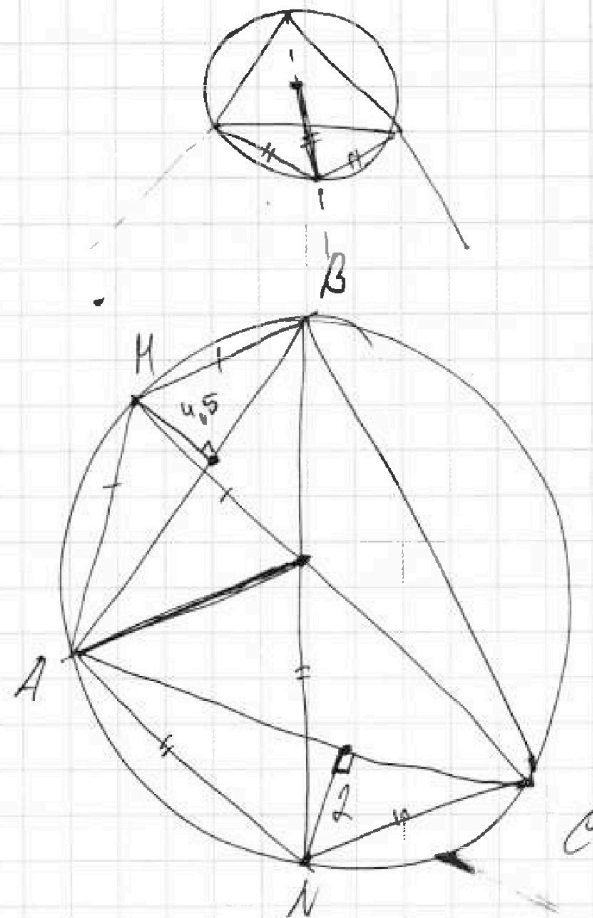
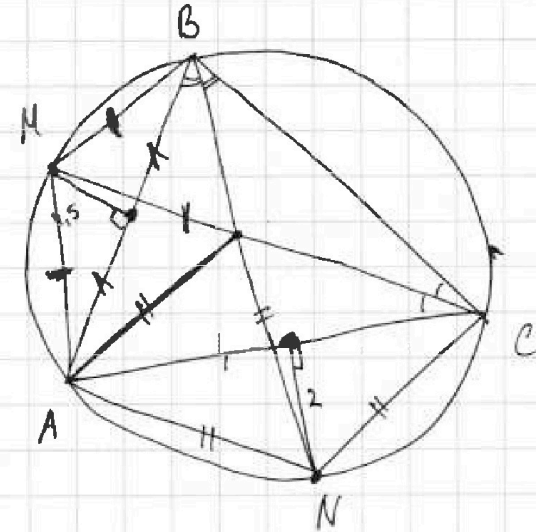
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





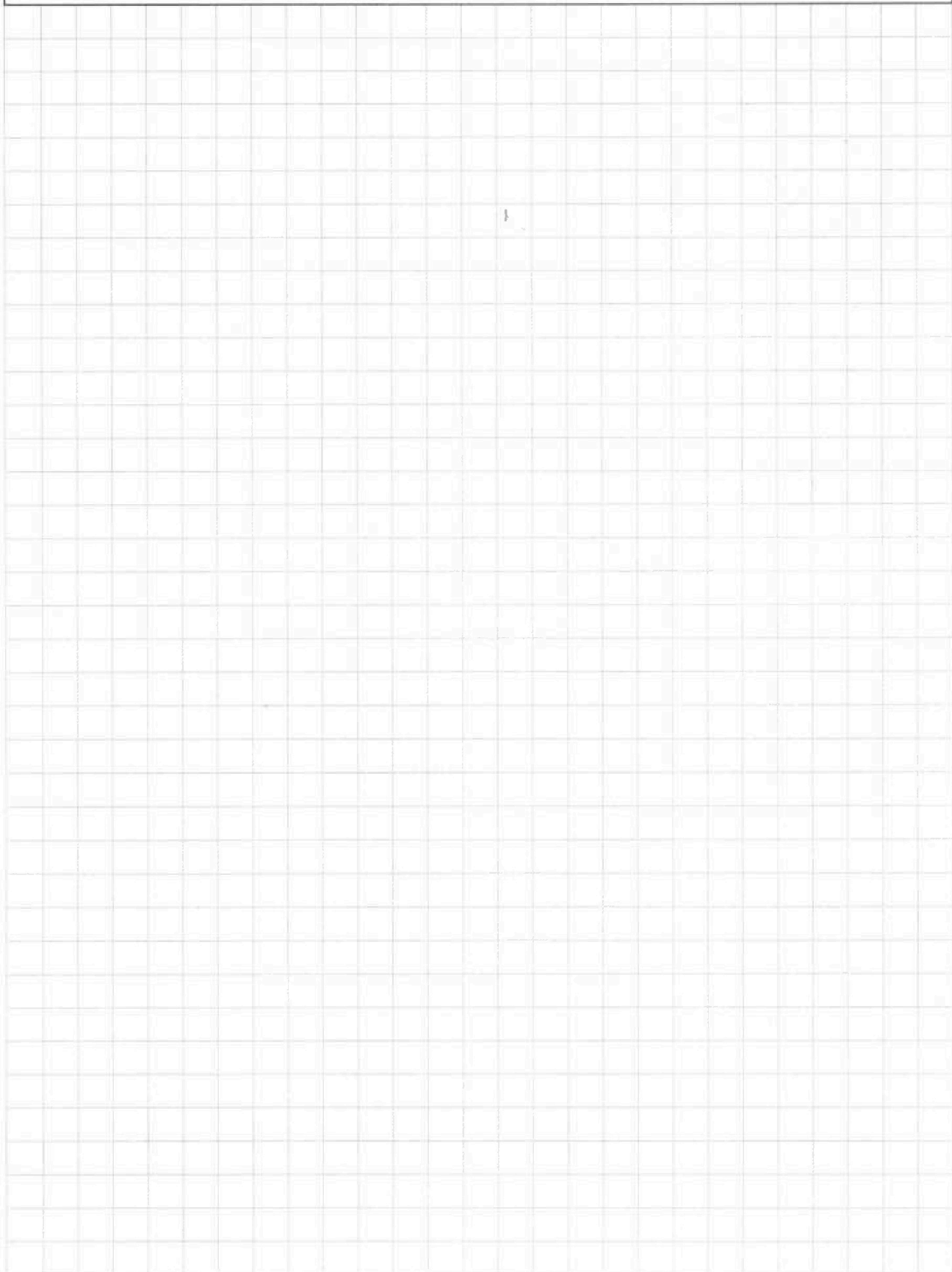
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Ночью QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

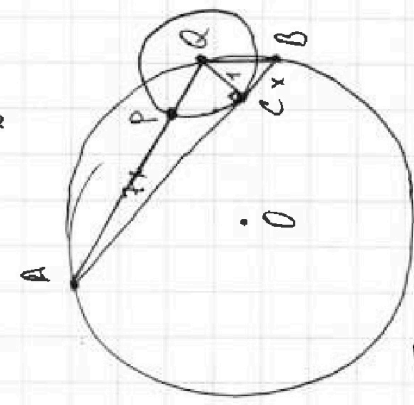
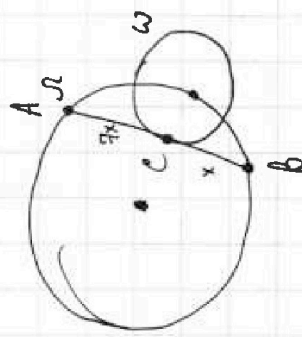
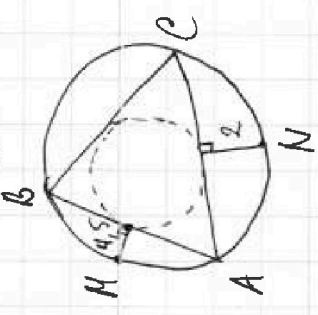
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(a-b)^2(a+b)^2 = (a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2+2ab) = a^4+a^2b^2-2a^2b+2ab^2+b^4-2ab^2+2a^2b+2ab^2+2a^2b^2-4a^2b^2+4ab^3-2a^2b^2$   
 $(a+b)^2 \equiv 0, \text{ mo } a, (a+b)^2 \equiv 0 \text{ mod } 8ab \equiv 0$   
 $a+b = km \equiv 0 \text{ mod } (a+b) \perp k.$   
 $\Rightarrow b = km - a$   
 $8ab = 8 \cdot a \cdot (km - a) = 8akm - 8a^2 \equiv 0 \text{ mod } 8ab$   
 $\Rightarrow 8a^2 \equiv 8akm - 8a^2 \text{ mod } 8ab$   
 $\Rightarrow 8a^2 \equiv 8akm \text{ mod } 8ab$   
 $\Rightarrow a^2 \equiv km \text{ mod } ab$   
 $\Rightarrow a^2 \equiv km \text{ mod } ab$

$\frac{(a^2+2ab+b^2)-8ab}{(a+b)^2} = \frac{a^2+2ab+b^2-8ab}{(a+b)^2} = \frac{a^2-6ab+b^2}{(a+b)^2}$   
 $(a-b)^2 - 4ab = km$   
 $a+b = km \Rightarrow m = \frac{a+b}{k}$



$AQ = \sqrt{49x^2 + 1} = \sqrt{49x^2 + 1}$   
 $\Rightarrow AP = AQ - 1$   
 $\Rightarrow AP^2 = 7x^2 = (AQ+1) \cdot (AQ-1) = AQ^2 - 1$

$4 - 6 \cdot 6 + 9 = 4 - 36 + 9 = -23$   
 $4 + 9 = 13$   
 $13 - 36 = -23$   
 $\frac{8ax}{8ab} = \frac{a}{b} = \frac{fm}{lm}$   
 $\frac{5}{7}$

- 1 2 3 4 5 6 7  
 ✓ ✓ ✓ ✓

$\frac{14.15}{11.35} = 0$   
 $\frac{13.75}{11.35} = 1.211$   
 $\frac{12.40}{11.35} = 1.092$

$\frac{a^2-6ab+b^2}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{(a+b)^2}$

$QB = \sqrt{1+x^2}$

32

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab \equiv 0 \pmod{2^{14} \cdot 7^{10}}$$

$$bc \equiv 0 \pmod{2^{17} \cdot 7^{17}}$$

$$ac \equiv 0 \pmod{2^{20} \cdot 7^{37}}$$

$$2^{51} = 2 \cdot 2^{50}$$

$$\min abc = ? \quad \sqrt{2^{50}} = 2^{25} \quad + \frac{2^4}{51}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 14 \\ \hline 15 \\ \hline 51 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ + 17 \\ \hline 18 \\ \hline 37 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 2^3 \cdot 7^{10} \cdot 7^7$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} = k_3 \cdot 2^{14} \cdot 2^6 \cdot 7^{10} \cdot 7^{27}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = (abc)^2 = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$\begin{aligned} & \text{Let } abc = x \\ \Rightarrow x^2 &= k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{51} \cdot 7^{64} \end{aligned}$$

$$x = \sqrt{k} \cdot 2^{25} \cdot \sqrt{7} \cdot 7^{32} \Rightarrow \sqrt{k} = n\sqrt{2} \Rightarrow x = n\sqrt{2} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32} = \sqrt{2} \cdot 2^{26} \cdot 7^{32} \cdot n$$

$$\Rightarrow \text{при } n=1. \quad k_1=1, k_2=2, k_3=1. \quad bc = 2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\beta_1 \geq 3 \\ \alpha_1 + \beta_1 \geq 20 \\ \beta_1 = 6 \\ \alpha_1 = 9 \\ \beta_1 = 11$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 17 \\ \hline 27 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \quad (1) \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \quad (2) \\ \beta_1 + \delta_1 \geq 17 \quad (3) \\ \beta_2 + \delta_2 \geq 17 \quad (4) \\ \alpha_1 + \delta_1 \geq 20 \quad (5) \\ \alpha_2 + \delta_2 \geq 37 \quad (6) \end{cases}$$

$$4x^2 - 3x + 4 \\ \frac{1}{2} \cdot 8x = 4x$$

$$\frac{8x}{10} = 0,8x \\ \frac{14}{31} + \frac{17}{31} = \frac{31}{31} = 1$$

$$\frac{31}{20} + \frac{37}{64} = \frac{58}{64}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 17 \\ \hline 31 \\ \hline 26 \\ \hline 92 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 = 26 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 = 92$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 = 37 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 = 10$$

$$\begin{aligned} 3a &= \alpha \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \\ b &= \beta \cdot 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \\ c &= \delta \cdot 2^{\delta_1} \cdot 7^{\delta_2} \\ \Rightarrow ab &= \alpha \beta \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2} \\ bc &= \beta \delta \cdot 2^{\beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\beta_2 + \delta_2} \\ ac &= \alpha \delta \cdot 2^{\alpha_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \delta_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow abc = \alpha \beta \delta \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2} \\ \Rightarrow x^2 = \alpha^2 \beta^2 \delta^2 \cdot 2^{2(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1)} \cdot 7^{2(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2)} \\ (1) + (2) + (3) \cdot 2 \cdot (\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq 51 \\ (\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq \frac{51}{2} > 25 \\ (2) + (4) + (6) \cdot 2 \cdot (\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) \geq 64 \\ (\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) \geq 32$$

$$\Rightarrow x = \alpha \beta \delta \cdot 2^{(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1)} \cdot 7^{(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2)} \\ \text{Ответ: } x = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ + 17 \\ \hline 37 \\ \hline 10 \\ \hline 10 \\ \hline 17 \end{array}$$



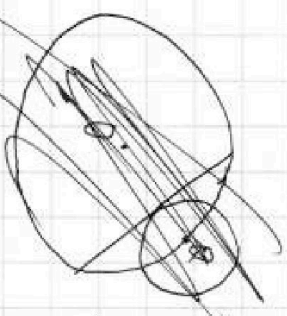
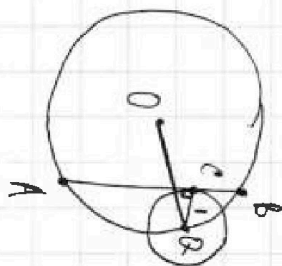
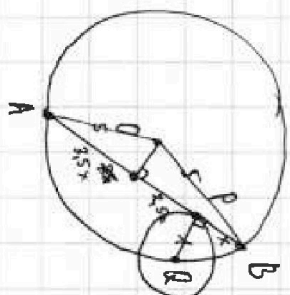


На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$   
 $2x^2 - 5x + 3 = 0$   
 $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$   
 $\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{5 \pm 1}{4}$   
 $x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{2} = 1,5$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$   
 $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

$(a-b)(a+b) = (a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$

$1. a-b=0$   
 $a=b$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

$64 - 9 = 45$

$2. a+b < 1$   
 ДОЗ:  $4x^2 - 3x + 3 > 0$   
 $D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0$   
 $\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$   
 $2x^2 + 2x + 1 = 0$   
 $D = 4 - 4 \cdot 2 < 0$   
 $\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$   
 $4x^2 - 3x + 3 = -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$

$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$

$-5x - 2x = 1 - 3$

$-7x = -2$

$x = \frac{2}{7}$

