МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

Задача №1 ($\vdots$ – кратно; $\not\vdots$ – не кратно)

Пусть $a = k_1 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$ (где $k_1 \not\vdots 2$ и $k_1 \not\vdots 7$)

$b = k_2 \cdot 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$ (где $k_2 \not\vdots 2$ и $k_2 \not\vdots 7$),

$c = k_3 \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$ (где $k_3 \not\vdots 2$ и $k_3 \not\vdots 7$)

где $\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \alpha_2; \beta_2; \gamma_2 \in \mathbb{Z}$

$\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \alpha_2; \beta_2; \gamma_2 \geq 0$

$k_1; k_2; k_3 \in \mathbb{N}$

Тогда $ab = k_1 \cdot k_2 \cdot 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2}$

$bc = k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{\beta_1+\gamma_1} \cdot 7^{\beta_2+\gamma_2}$

$ac = k_1 \cdot k_3 \cdot 2^{\alpha_1+\gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2+\gamma_2}$

Заметим, что т.к. 2 и 7 – простые числа, то: $k_1 \cdot k_2 \not\vdots 2$ и $\not\vdots 7$; $k_2 \cdot k_3 \not\vdots 2$ и $\not\vdots 7$; $k_1 \cdot k_3 \not\vdots 2$ и $\not\vdots 7$; $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \not\vdots 2$ и $\not\vdots 7$

Тогда из условия следует, что:

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 14 & (11) \\ \alpha_2+\beta_2 \geq 10 & (21) \\ \beta_1+\gamma_1 \geq 17 & (12) \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 17 & (22) \\ \alpha_1+\gamma_1 \geq 20 & (13) \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 37 & (23) \end{cases}$$

$a \cdot b \cdot c = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}$.

(*) Сложим: $(11)+(12)+(13)$: $2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \geq 51$. $\Rightarrow \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq \frac{51}{2} \geq 26$ (т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \alpha_2; \beta_2; \gamma_2; k_1; k_2; k_3 \in \mathbb{Z}$); ($k_1; k_2; k_3 \in \mathbb{N}$)

Приведем пример $\alpha_1; \beta_1; \gamma_1$ при которых $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = 26$ и условия (11), (12) и (13) выполняются: $\alpha_1 = 9$; $\beta_1 = 6$; $\gamma_1 = 11$.

(**) Сложим: $(21)+(22)+(23)$: $2(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) \geq 64$. $\Rightarrow \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq \frac{64}{2} = 32$.

~~Приведем пример $\alpha_2; \beta_2; \gamma_2$, при которых $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 = 32$ и условия (21), (22) и (23) выполняются.~~ Но из того, что $\beta_2 \geq 0$ и условие (23) следует, что $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq \alpha_2+\gamma_2 \geq 37$.

Приведем пример $\alpha_2; \beta_2; \gamma_2$, при которых $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 = 37$ и условия (21), (22) и (23) выполняются. $\alpha_2 = 20$; $\beta_2 = 0$; $\gamma_2 = 17$.

Заметим, что т.к. $k_1; k_2; k_3$ никак не влияют на делимость, то $\min abc =$
$= 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}$ (при $k_1 = k_2 = k_3 = 1$).

Из (*) и (**) видно, что мин. $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = 26$, а мин. $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 = 37$.

$\Rightarrow$ мин. $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ ($a = 2^9 \cdot 7^{20}$; $b = 2^6 \cdot 7^0$; $c = 2^{11} \cdot 7^{17}$)

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Задача №2.

$\frac{a}{b}$ - несократима, $a \in N$, $b \in N$.

Рассмотрим дробь $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a^2+2ab+b^2)-8ab} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2-8ab}$.

Пусть $(a+b)=km$. Тогда, во-первых $(a+b) \perp$ (взаимнопросто с) k, во-вторых $(a+b)^2 = k^2m^2 : m$. Так как если наша дробь сократима на m, то её числитель и знаменатель оба кратны m. То есть $(a+b)^2-8ab = k^2m^2-8ab$ - кратно m. Это возможно только если $8ab : m$. Пусть $8ab = l \cdot m$ $(8ab \perp l)$.

Т.к. $(a+b)=km$, то $b = km-a$. $\Rightarrow 8ab = 8 \cdot a \cdot (km-a) = 8akm - 8a^2 = l \cdot m$.

Это возможно только если $8a^2 : m$. Пусть $8a^2 = n \cdot m$ $(8a^2 \perp n)$. Тогда посмотрим на дробь $\cancel{\frac{8ab}{8a^2}}$ $\frac{8a^2}{8ab} = \frac{\cancel{8} \cdot \cancel{a} \cdot a}{\cancel{8} \cdot \cancel{a} \cdot b} = \frac{a}{b} = \frac{n \cdot m}{l \cdot m}$.

При $m>1$ получаем, что дробь $\frac{a}{b} = \frac{n \cdot m}{l \cdot m}$ сократима, что противоречит условию.

При $m=1$ получаем $\frac{a}{b} = \frac{n}{l}$. Т.о. $m=1$ - максимальное значение m.

~~Пример, когда $m=1$ подходит, это, например $a=2$, $b=3$. Но очевидно~~

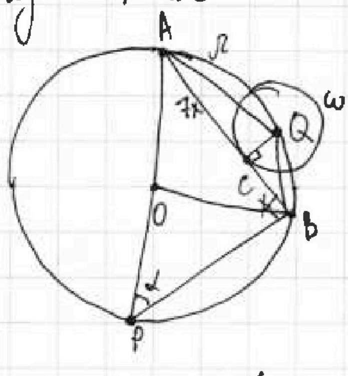
Ответ: $m=1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3



Пусть $AC=7x$ и $CB=x$.
Продлим AO до пересеч. с Ω в т. P.

$\angle APB=\alpha$. $\angle ABP=90^\circ$ (AP - диам.) По т. Пифагора: $PB=\sqrt{AP^2-AB^2}$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{PB}{AP}=\frac{\sqrt{AP^2-AB^2}}{AP}=\frac{\sqrt{100-64x^2}}{10}=\sqrt{\frac{100-64x^2}{100}}$$

$\angle AQB=180^\circ-\alpha$ (4-х-угольник $APBQ$ - впис.)

$$\Rightarrow \cos\angle AQB=\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha.$$

$\Rightarrow$ По т. косинусов для ΔAQB: $AB^2=AQ^2+BQ^2+2\cdot AQ\cdot BQ\cdot\cos\alpha$

Заметим, что по т. Пифагора из ΔAQC и ΔQCB:
$AQ=\sqrt{49x^2+1}$; $BQ=\sqrt{x^2+1}$.

$$\Rightarrow (8x)^2=49x^2+1+x^2+1+2\cdot\sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)}\cdot\sqrt{\frac{100-64x^2}{100}}$$

$$\Rightarrow 14x^2-2=2\cdot\sqrt{\frac{(49x^2+1)(x^2+1)(100-64x^2)}{100}}$$ — возведем обе части в квадрат

$$(14x^2-2)^2=4\cdot\frac{(49x^2+1)(x^2+1)(100-64x^2)}{100}$$

$$25\cdot(14x^2-2)^2=(49x^2+1)(x^2+1)(100-64x^2)$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим:

$$3136x^6-3136x^2=0$$

$$x^2(3136x^4-3136)=3136x^2(x^4-1)=0 \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ - не соотв. смыслу задачи} \\ x=1. \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow AB=7x+x=8x=8.$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$2x^2-5x+3+2x^2+2x+1+2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}+(4x^2-3x+3)=0$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=(4x^2-3x+3) \quad (*)$$

$4x^2-3x+3=0$

$D=9-4\cdot4\cdot3<0$. Значит $(4x^2-3x+3)>0$ при любом x.

Но $-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}\leq 0$ при любом x.

Значит у ур-я $(*)$ нет решений.

Ответ: $x=\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$. Пусть $\sqrt{2x^2-5x+3}=a$ $(a\geq 0)$ и $\sqrt{2x^2+2x+1}=b$ $(b\geq 0)$. Тогда заметим, что $a^2-b^2=2-7x$.

Т.е. $a-b=a^2-b^2 \Rightarrow (a-b)=(a-b)(a+b)$

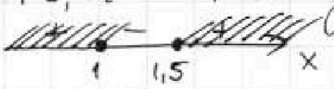
1. ОДЗ: а) $\sqrt{2x^2-5x+3} \Rightarrow 2x^2-5x+3\geq 0$

(рассмотрим) $2x^2-5x+3=0$

$D=25-4\cdot 3\cdot 2=1$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{4}$

$x_1=1$; $x_2=3/2=1{,}5$. Методом интервалов:



$x\in(-\infty;1]\cup[1{,}5;+\infty)$.

б) $\sqrt{2x^2+2x+1}$. $2x^2+2x+1\geq 0$

$2x^2+2x+1=0$

$D=4-4\cdot 2\cdot 1<0$

$\Rightarrow 2x^2+2x+1>0$ при любом x.

2. $(a-b)=(a-b)(a+b)$.

Случай 1. $(a-b)=0$.

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=0$. $\Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3}=\sqrt{2x^2+2x+1}$.

$2x^2-5x+3=2x^2+2x+1$.

$5x+2x=3-1=2$

$7x=2$

$x=\frac{2}{7}$ — подходит под ОДЗ

Случай 2. $(a-b)\neq 0$

$(a-b)=(a-b)(a+b) \mid :(a-b)$

$1=a+b$

$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$. Возведём обе части в квадрат:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

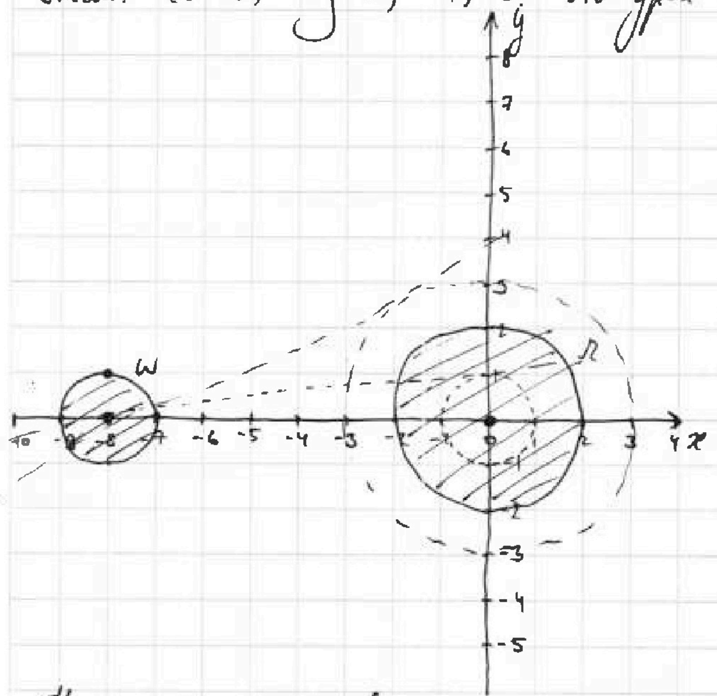
МФТИ

Задача №6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \le 0 \quad (*) \end{cases}$$

Рассм. $((x+8)^2+(y-0)^2-1)=0$. Это ур-е окр. с центром $(-8;0)$ и радиусом 1.

Рассм. $((x-0)^2+(y-0)^2-4)=0$. Это ур-е окр. с центром $(0;0)$ и радиусом 2.

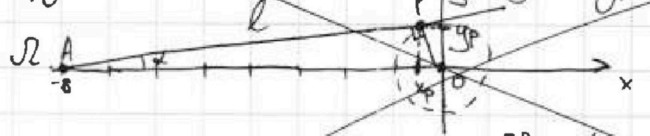


Области внутри и границы окружностей соответствуют неравенству (*).

Есть всего 4 прямые, которые пересекут заштрихованную область 2 раза. Это касательные к этим 2-м окружностям.

Надо найти их уравнения.

1. Внешние касательные. Мысленно уменьшим радиусы окруж. на 1. (окруж. ω станет точкой). Найдем ур-е касат. из этой точки к новой



Длина этой касат. l из т. Пифагора:

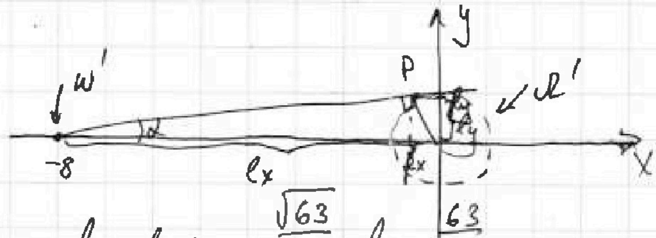
$l = \sqrt{(-8)^2 - (1)^2} = \sqrt{63}$. $\sin\alpha = \frac{OP}{AP} = \frac{1}{8}$. $\Rightarrow l_y = l \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}$ $l_x = \frac{63}{8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

1. Внешние касат. Мысленно уменьшим радиусы окр. на 1.



Длина этой касат. l из т. Пифагора.

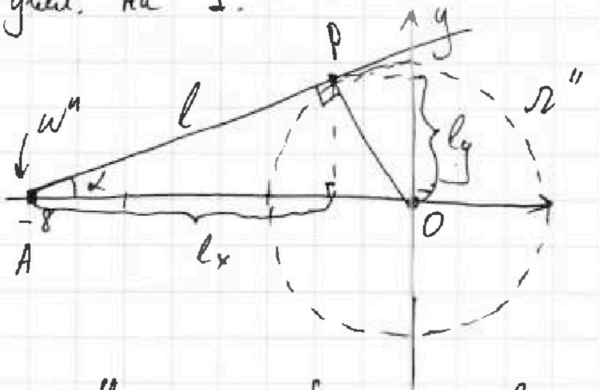
$l = \sqrt{63}$. $\sin\alpha = \frac{1}{8} = \frac{OP}{AP}$.

$\Rightarrow l_y = l \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}$. $l_x = \frac{63}{8}$.

Найдем ур-е: $\begin{cases} 0 = -8a + 10b \\ \left(-8 + \frac{63}{8}\right)a + 10b = \frac{\sqrt{63}}{8} \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{63}/63$

Аналогично: $a = -\sqrt{63}/63$. (реальные касат. получаем паралл. переносом на ± 1 вдоль Oy)

2. Внутр. касат. Мысленно уменьшим радиус ω на 1, а рад. Ω увел. на 1.



$l = \sqrt{64 - 9} = \sqrt{45}$.

$\sin\alpha = \frac{3}{8} = \frac{OP}{AP}$

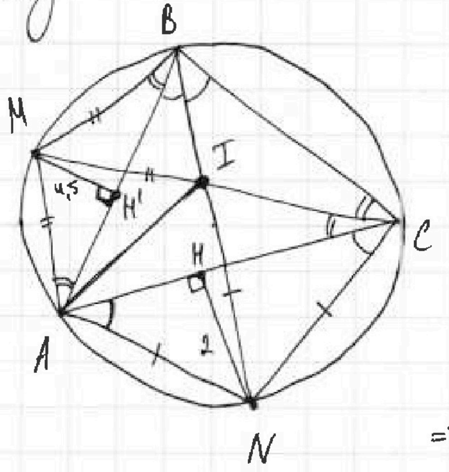
$\Rightarrow l_y = l \cdot \sin\alpha = \frac{3\sqrt{45}}{8}$; $l_x = \frac{45}{8}$.

$\Rightarrow$ Найдем a: $\begin{cases} 0 = -8a + 10b \\ \left(-8 + \frac{45}{8}\right)a + 10b = \frac{3\sqrt{45}}{8} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{45}}{45}$

Аналогично: $a = -\frac{3\sqrt{45}}{45}$. (реальные касат. получаем паралл. переносом на ± 2 вдоль Oy).

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{63}}{63}$; $\pm\frac{3\sqrt{45}}{45}$.

Задача №7



$AI - ?$

I - центр. впис. окр., I - т. пересеч.

BN и CM (бисс. $\angle B$ и $\angle C$)

По лемме о трезубце $AM = MB = MI$.
$AN = NC = NI$.

$\angle ABN = \angle ACN$ (впис., оп-ся на $\breve{AN}$)

$\Rightarrow \angle NAC = \angle ACN = \angle ABN$

$\angle MBA = \angle MCA$ (впис., оп-ся на $\breve{AM}$)

$\Rightarrow \angle MBA = \angle MAB = \angle MCA$

Тогда MH' - выс. в равнобед. ΔAMB. $\Rightarrow MH'$ - медиана $\Rightarrow AH' = H'B$.
NH - выс. в равнобед. ΔANC. $\Rightarrow$ ~~NH~~ NH - медиана $\Rightarrow AH = HC$.

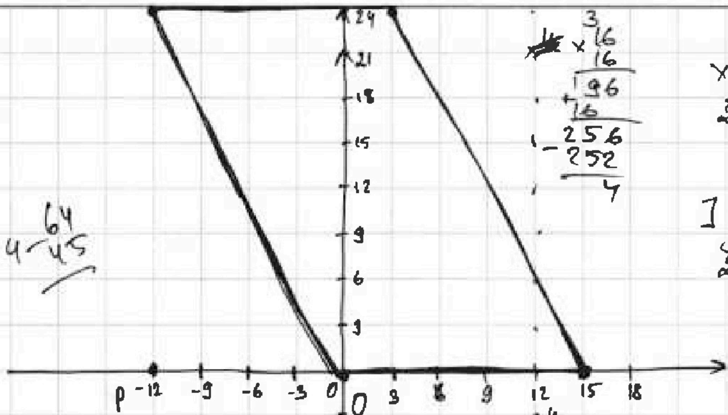
$\Rightarrow HH'$ - ср. линия

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$(x+8)^2 \le 1$

$16 \cdot 16 = 256$, $256 - 252 = 4$

$63 \cdot 4 = 252$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$x^2 + 16x + 64 - 1 = 0$

$x^2 + 16x + 63 = 0$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

$D = 16 \cdot 16 - 4 \cdot 63 = 4$

$\exists\, y = ax + b$

$2(x_2 - x_1) + ax_2 + \cancel{b} - ax_1 - \cancel{b} = 12$

$x_{1,2} = \frac{-16 \pm 2}{2}$

$x_1 = -9$

$x_2 = -7$

$x \in (-\infty; -9] \cup [-7; +\infty)$

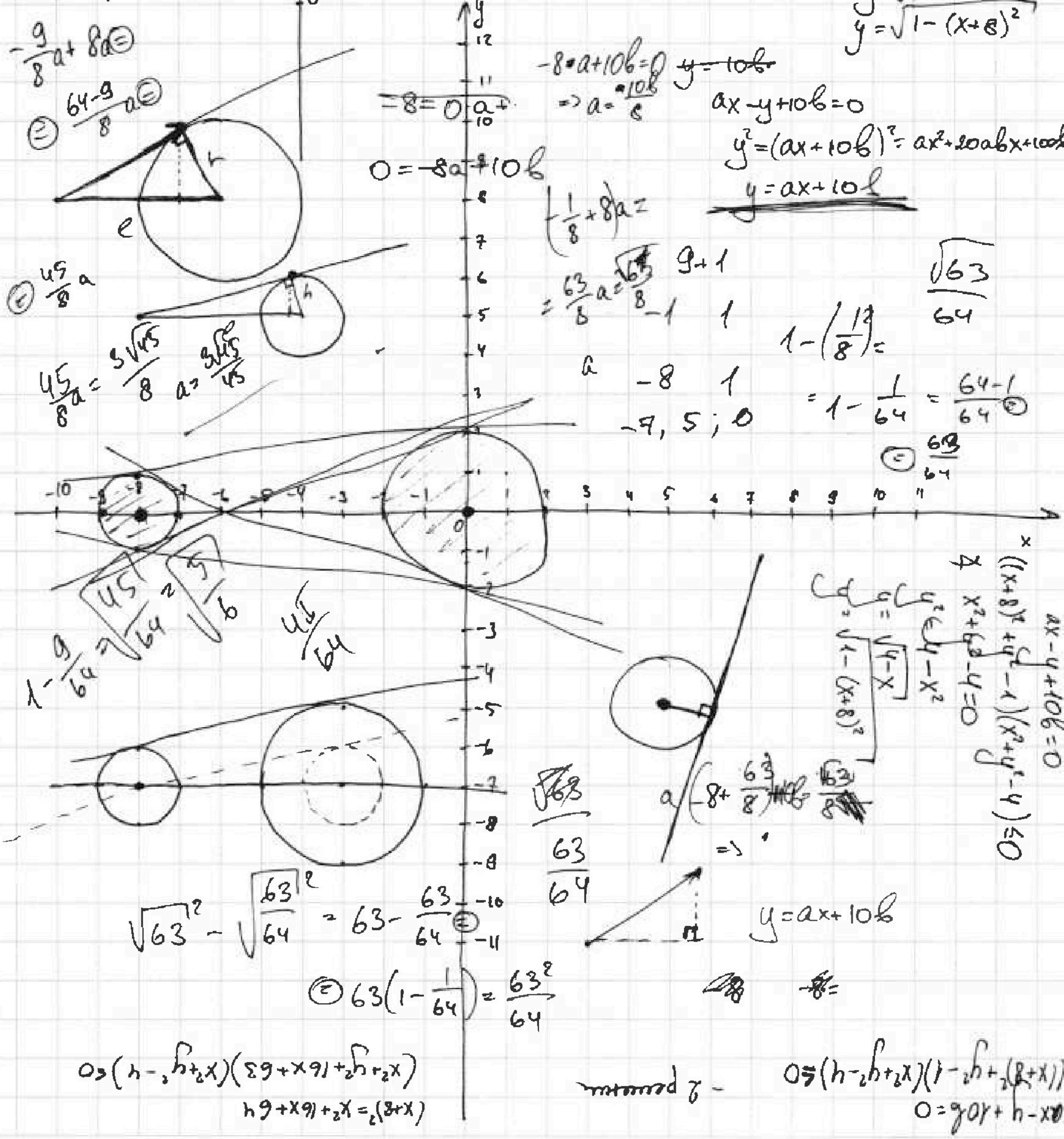
$2(x_2 - x_1) + a(x_2 - x_1) = 12$

$(x_2 - x_1)(2 + a) = 12.$

$4 - \frac{64}{45}$

$y = \sqrt{4 - x^2}$

$y = \sqrt{1 - (x+8)^2}$



$-\frac{9}{8}a + 8a =$

$= \frac{64 - 9}{8}a =$

$= \frac{45}{8}a$

$\frac{45}{8}a = \frac{3\sqrt{45}}{8}$, $a = \frac{3\sqrt{45}}{45}$

$-8 = 0 \cdot a +$

$-8 = a + 10b = 0$ ~~$y = 10b$~~

$\Rightarrow a = \frac{10b}{8}$

$ax - y + 10b = 0$

$y^2 = (ax + 10b)^2 = a^2x^2 + 20abx + 100b^2$

$y = ax + 10b$

$0 = -8a + 10b$

$\left(\frac{1}{8} + 8\right)a =$

$= \frac{63}{8}a = \frac{\sqrt{63}}{8}$

$9 + 1$

$-1 \quad 1$

$\frac{\sqrt{63}}{64}$

$1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 =$

$= 1 - \frac{1}{64} = \frac{64 - 1}{64} =$

$= \frac{63}{64}$

$a \quad -8 \quad 1$

$-7{,}5\,;\,0$

$1 - \frac{9}{64} = \sqrt{\frac{45}{64}} = \sqrt{\frac{5}{b}}$

$\frac{45}{64}$

$\sqrt{63}$

$\frac{63}{64}$

$a\left(-8 + \frac{63}{8}\right) = \frac{\sqrt{63}}{8}$

$\sqrt{63}^2 - \sqrt{\frac{63}{64}}^2 = 63 - \frac{63}{64} =$

$= 63\left(1 - \frac{1}{64}\right) = \frac{63^2}{64}$

$y = ax + 10b$

$ax - y + 10b = 0$

$0 = \left((x+8)^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 4\right)$

$x^2 + 16x + 63 + y^2 - 4$

$y = \sqrt{4 - x^2}$

$y = \sqrt{1 - (x+8)^2}$

$\left((x+8)^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 4\right) \le 0$

$ax - y + 10b = 0$

$0 = (x^2 + y^2 + 16x + 63)(x^2 + y^2 - 4)$

$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$y^2 = -(x+8)^2+1 = 1-x^2-16x-64 = -x^2-16x-63$

$x_0 = \frac{+16}{-2} = -8$

$y^2 = 4-x^2$

$(x-a)^2+(y-b)^2$

$y^2 =$

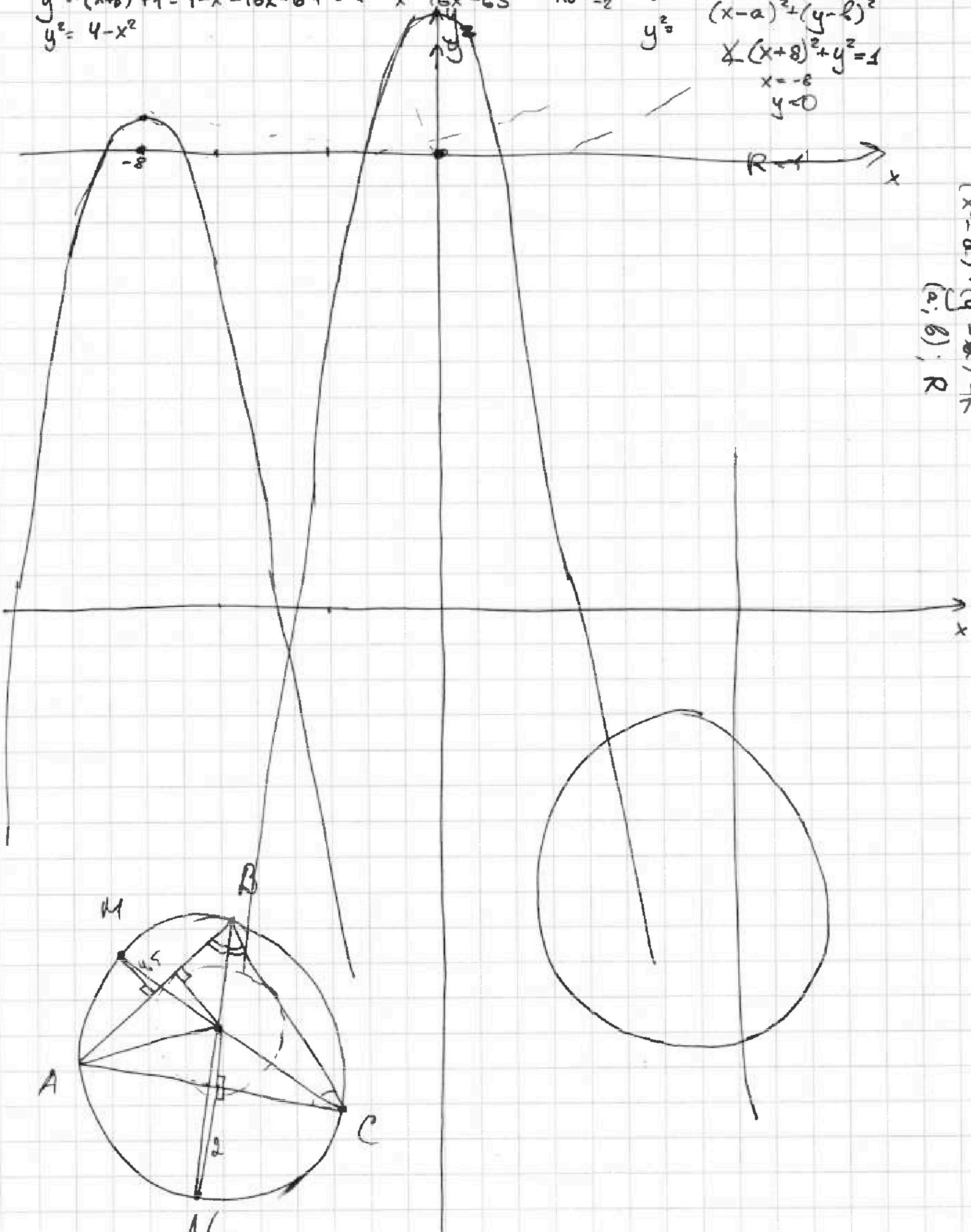
$(x+8)^2+y^2=1$

$x=-8$

$y<0$

$(x^2-a)+(y^2-b)=R^2$

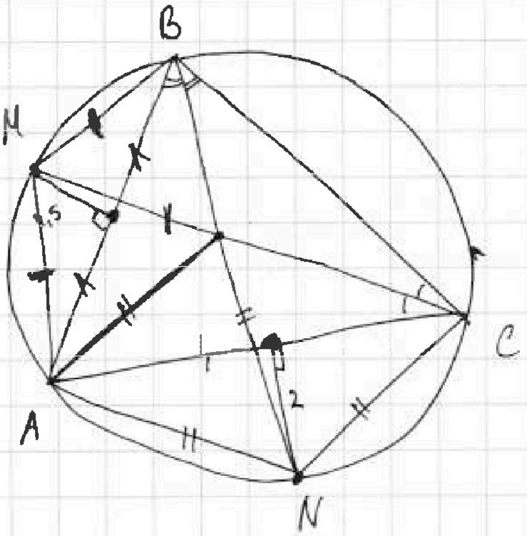
$(a;b);\ R$

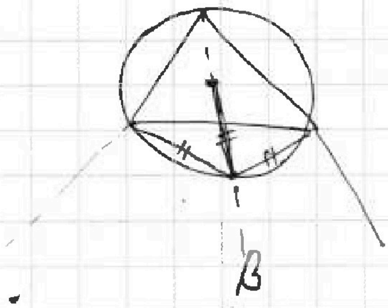


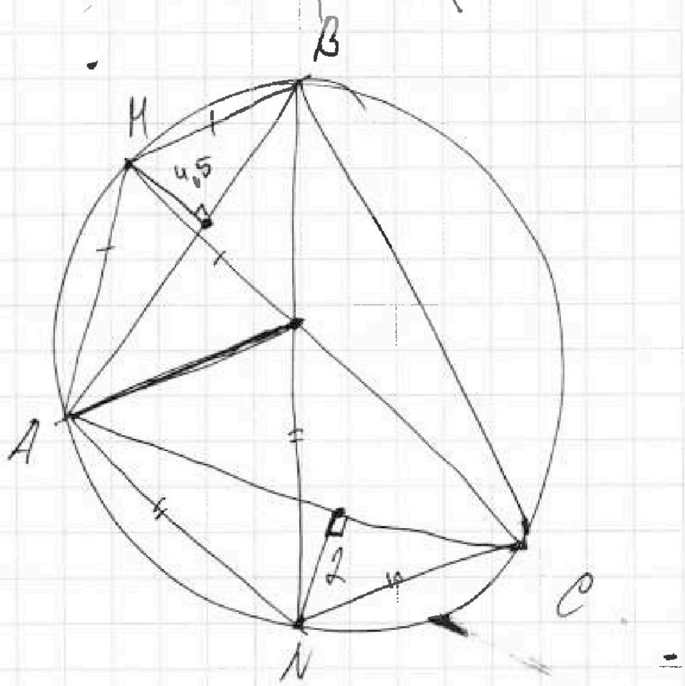
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи **или** не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(a+b)^2(a-b)^2 = (a^2+b^2+2ab)(a^2+b^2-2ab) = a^4 + a^2b^2 - 2a^3b + b^2a^2 + b^4 \cancel{-2ab^3} + 2a^3b + \cancel{2ab^3} - 4a^2b^2 = a^4 + b^4 - 2a^2b^2$

если $(a+b) \underset{m}{\equiv} 0$, то и $(a+b)^2 \underset{m}{\equiv} 0 \overset{\text{может}}{\Rightarrow} 8ab \underset{m}{\equiv} 0$

$a+b = km \overset{\text{м.о.}}{=} (a+b) \perp k.$

$\Rightarrow b = km - a$

$8ab = 8 \cdot a \cdot (km - a) = 8akm - 8a^2 = \ell m. \quad (\ell \perp 8ab)$

$\Rightarrow 8a^2 \vdots m \quad 8a^2 \vdots m$ и $8ab \vdots m \Rightarrow \begin{matrix} 8a^2 = fm \\ 8ab = \ell m \end{matrix} \Rightarrow \frac{8a^2}{8ab} = \frac{a}{b} = \frac{fm}{\ell m}.$

$4 - 6 \cdot 6 + 9 =$

$4 + 9 = 13$

$13 - 36$

$\frac{-36}{13}$ $\quad 23$

$\frac{5}{-23}$

$\frac{5}{7}$

$25 + 49 -$

3 2

$\frac{a}{b}$ - несократима, $a \in N$, $b \in N$.

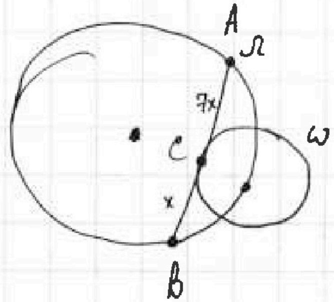
$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2-4ab}$

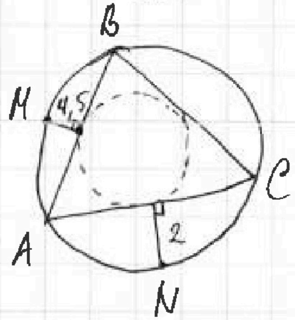
$(a-b)^2 - 4ab = k_2 m$

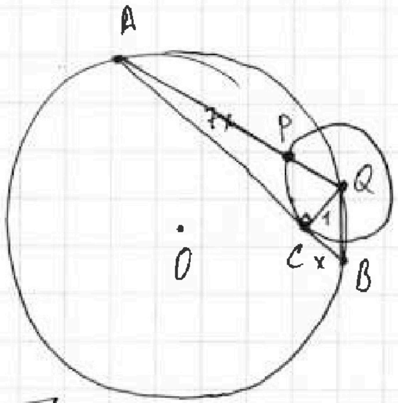
$a+b = k_1 m \Rightarrow m = \frac{a+b}{k_1}$

$\frac{(a+b)}{(a^2+2ab+b^2)-8ab} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2-8ab}$

если $(a+b) \vdots m$, то $(a+b)^2 \vdots m^2$.







$AQ = \sqrt{(7x)^2 + 1^2} = \sqrt{49x^2 + 1}$

$\Rightarrow AP = AQ - 1$

$\Rightarrow AC^2 = 7x^2 = (AQ+1) \cdot (AQ-1) = (AQ^2 - 1)$

$QB = \sqrt{1 + x^2}$

$\frac{-14.15}{11.35}$ $\quad 0$

$\frac{-13.75}{11.35}$ $\quad 2.40$

1 2 3 4 5 6 7

V V V V

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$2^{51} = 2 \cdot 2^{50}$

$\min\ abc - ?$ $\sqrt{2^{50}} = 2^{25}$

$ab \underset{2^{14}7^{10}}{\equiv} 0$

$ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$.

$bc \underset{2^{17}7^{17}}{\equiv} 0$

$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 2^3 \cdot 7^{10} \cdot 7^7$

$ac \underset{2^{20}7^{37}}{\equiv} 0$

$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} = k_3 \cdot 2^{14} \cdot 2^6 \cdot 7^{10} \cdot 7^{17}$

$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = (abc)^2 = k_1 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot k_3 \cdot 2^{20} 7^{37} = k_1k_2k_3 \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$

$\exists abc = x$

$\Rightarrow x^2 = \underbrace{k_1k_2k_3}_{k} \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$

$x = \sqrt{k} \cdot 2^{25} \cdot \underset{\in \mathbb{N}}{\sqrt{2}} \cdot 7^{32}$ $\Rightarrow \sqrt{k} = n\sqrt{2}$. $\Rightarrow x = n\sqrt{2} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2} = 2^{26} \cdot 7^{32} \cdot n$

$\Rightarrow$ при $n=1$. $k_1 = 1$; $k_2 = 2$; $k_3 = 1$.

~~$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$~~

~~$bc = 2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$~~

~~$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$~~

$\exists a = \alpha \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$

$b = \beta \cdot 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$

$c = \gamma \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$

$\Rightarrow ab = \alpha\beta \cdot 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2}$

$bc = \beta\gamma \cdot 2^{\beta_1+\gamma_1} \cdot 7^{\beta_2+\gamma_2}$

$ac = \alpha\gamma \cdot 2^{\alpha_1+\gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2+\gamma_2}$

$\Rightarrow$
$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \ (11) \\ &\alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \ (21) \\ &\beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \ (13) \\ &\beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \ (22) \\ &\alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 \ (12) \\ &\alpha_2 + \gamma_2 \geq 37 \ (23) \end{aligned}}$$

$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = x^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 \cdot 2^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)\cdot 2} \cdot 7^{(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)\cdot 2}$

$\Rightarrow x^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 \cdot (2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1})^2 \cdot (7^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2})^2$

$(11)+(12)+(13)$: $2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \geq 51$

$\boxed{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \geq \frac{51}{2} > 25}$

$(21)+(22)+(23)$: $2(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) \geq 64$

$\boxed{(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) \geq 32}$

$\Rightarrow x = \alpha\beta\gamma \cdot 2^{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)} \cdot 7^{(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)}$

Ответ: $x = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$4x^2 - 3x + 4$

$\frac{1}{2} \cdot 8x = 4x$

$\sin\alpha = \frac{8x}{10} = 0{,}8x$

$14 + 17 = 31$; $10 + 17 = 27$, $27 + 37 = 64$; $14 + 17 + 10 = 51$; $34 + 17 = 51$; $10 + 17 + 37 = 64$; $31 + 20 = 51$; $20 + 17$; 37

~~$\alpha_1 + \beta_1$~~

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 10$

$\alpha_2 \geq 10$

$\beta_2 + \gamma_2 \geq 17$

$\gamma_2 = 17$

$\alpha_2 = 10$, $\beta_2 = 10$, $\gamma_2 = 17$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 37$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 26$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 32$

min 32!!

$\beta_1 \geq 3$

$\alpha_1 + \gamma_1 \geq 20$.

$\beta_1 = 6$, $\alpha_1 = 9$, $\gamma_1 = 11$

$\beta_2 \geq 7$

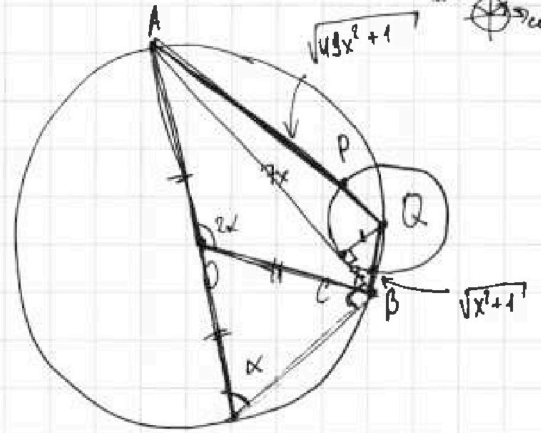
$\gamma_2 + \alpha_2 \geq 37$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Rightarrow$ По т. cos: $AB^2=(8x)^2=64x^2=AO^2+OB^2-2AO\cdot OB\cdot\cos 2\alpha \circleddash$

$\circleddash\ 25+25-2\cdot 25\cdot\cos 2\alpha=\underline{50-50\cdot\cos 2\alpha=64x^2}$

$\angle AQB=180^\circ-\alpha$

$\Rightarrow \cos\angle AQB=-\cos\alpha$

$\Rightarrow AB^2=AQ^2+QB^2+2\cdot AQ\cdot QB\cdot\cos\alpha$

$\Rightarrow 64x^2=49x^2+1+x^2+1+2\cdot\sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)}\cdot\cos\alpha$

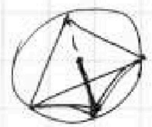
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cdot\cos^2\alpha-1 \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{\cos 2\alpha+1}{2}}$

$\cos 2\alpha=\frac{64x^2-50}{-50} \Rightarrow \cos 2\alpha+1=\frac{50-64x^2}{50}+\frac{50}{50}=\frac{100-64x^2}{50}$

$\cos 2\alpha/2=\frac{100-64x^2}{100}$

$\Rightarrow \cancel{\cos\alpha}=\frac{8x}{10}$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{100-64x^2}}{10}=\sqrt{\frac{100-64x^2}{100}}$



$64x^2-\cancel{50}x^2=2+2\cdot\sqrt{\frac{(49x^2+1)(x^2+1)\cdot(100-64x^2)}{100}}$

$14x^2-2=2\cdot\sqrt{\frac{(49x^2+1)(x^2+1)(100-64x^2)}{100}}$

$(14x^2-2)^2=\cancel{2}\cdot\cancel{4}\ \frac{(49x^2+1)(x^2+1)(100-64x^2)}{\cancel{100}\,25}$

$25(14x^2-2)^2=(49x^2+1)(x^2+1)(100-64x^2)$

$25\cdot(196x^4-56x^2+4)=(49x^4+50x^2+1)(100-64x^2)$

$\cancel{4900x^4}-1400x^2+\cancel{100}=\cancel{4900x^4}-3136x^6+5000x^2-3200x^2\cancel{+100}-64x^2$

$3136x^6-3136x^2=0$

$x^2(3136x^4-3136)=0$

$3136(x^4-1)=0$

$x^4=1$

$x=1$

$\sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)}\cdot 0{,}8\cancel{x}=8\cancel{x}$

$\sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)}=10$

$\frac{8}{0{,}8}=\frac{8\cdot 10}{8}=10$

$-\frac{1}{8}a+8a=\frac{\sqrt{63}}{8}$

$\Rightarrow 10b=8a$

$-8a+10b=0$

$-\frac{1}{8}a+10b=\frac{\sqrt{63}}{8}$

$\left(-8+\frac{63}{8}\right)\cdot a+10b=\frac{\sqrt{63}}{8}$

$\frac{8}{-64+63}$

$4\cdot 5=20$

$\times\ 196$
25
980
392
4900

$\times\ 56$
25
280
112
1400

$\times\ 14$
4
56

$\times\ 49$
64
196
294
3136

$5\cdot 7+5\cdot 8$

$\times\ 35$
4
140

$\times\ 40$
40
1600

$\times\ 64$
50
3200

$3200-1400=1800$

1864

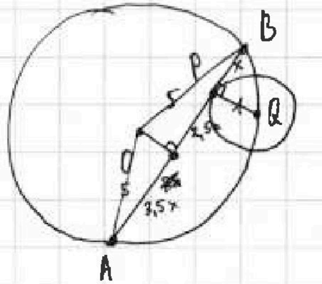
$5000-1864=3136$

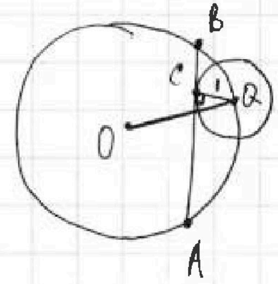
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

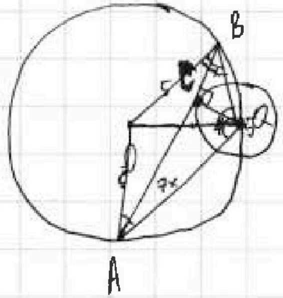
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

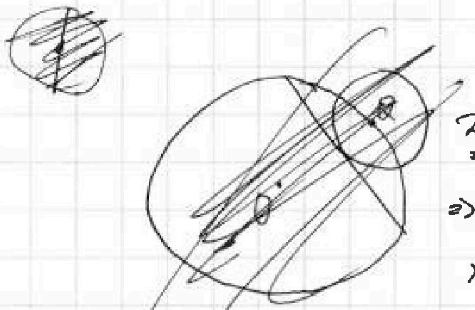
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ









$2x^2-5x+3\geq 0$

$2x^2-5x+3=0$

$D=25-4\cdot 2\cdot 3=$
$=25-24=1$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{4}$

$x_1=1;\ x_2=\frac{3}{2}=1{,}5$

$\boxed{1 \quad 1{,}5 \quad x}$

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

$\underset{a}{\shortparallel}\qquad\qquad \underset{b}{\shortparallel}$

$2-7x=2x^2-5x+3-2x^2-2x-1 \Leftrightarrow 2-7x$

$\overset{\shortparallel}{a^2-b^2}$

$2x^2+2x+1\geq 0$
$2x^2+2x+1=0$
$D=4-4\cdot 1\cdot 2<0$
$\Rightarrow x\in\mathbb{R}$

$(a-b)=(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$

ОДЗ: $4x^2-3x+3\geq 0$
$D=9-4\cdot 4\cdot 3$
$\Rightarrow x\in\mathbb{R}$

$(a-b)(a+b)=(a-b)$

1. $a-b=0$
$a=b$

2. $a+b=1$

$\sqrt{2x^2-5x+3}=\sqrt{2x^2+2x+1}$

ОДЗ:

$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$

$2x^2-5x+3+2x^2+2x+1-1+2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=0$

$4x^2-3x+3=-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}$

$64-9=45$

$\cancel{2x^2}-5x+3=\cancel{2x^2}+2x+1$

$-5x-2x=1-3$

$-7x=-2$

$x=\frac{2}{7}$