МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

$ab \vdots 2^{14}\, 7^{10}$

$bc \vdots 2^{17}\, 7^{17}$

$ac \vdots 2^{20}\, 7^{37}$

Будем обозначать $\|n\|_p$ – степень вхождения простого p в $n \in \mathbb{N}$

Перемножим 3 делимости и получим, что:

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37}$

$\Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{51} \cdot 7^{64}$

но $a^2b^2c^2$ – точный квадрат, поэтому ст. вхождения 2 в $(abc)^2$ чётна.

$(abc)^2 \vdots 2^{51} \Rightarrow (abc)^2 \vdots 2^{52}$

$\cancel{\Rightarrow (abc)^2 \vdots 2^{52} \cdot 7^{64} \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{52} \cdot 7^{64}}$

$\cancel{\Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}}$

~~Пример, когда~~ $\cancel{abc = 2^{26} \cdot 7^{32}}$~~:~~

~~ac= b= c=~~

$\|ac\|_7 = \|a\|_7 + \|c\|_7 \leq \|a\|_7 + \|b\|_7 + \|b\|_7 + \|c\|_7 =$

$= \|ab\|_7 + \|bc\|_7$

$\Rightarrow \|ab\|_7 + \|bc\|_7 \geq \|ac\|_7 \geq 37$

$\Rightarrow \|a^2b^2c^2\|_7 = \|ab\|_7 + \|bc\|_7 + \|ac\|_7 \geq 37 \cdot 2 = 74$

$\Rightarrow (a^2b^2c^2) \vdots 7^{74} \cdot 2^{52} \Rightarrow a^2b^2c^2 \geq 7^{74} \cdot 2^{52}$

$\Rightarrow abc \geq 7^{37} \cdot 2^{26}$

Пример, когда $abc = 7^{37} \cdot 2^{26}$: $a = 2^8 \cdot 7^{20}$ $b = 2^6$ $c = 2^{12} 7^{17}$

$ab = 2^{14} \cdot 7^{20} \vdots 2^{14} \cdot 7^{10}$, $bc = 2^{18} \cdot 7^{17} \vdots 2^{17} \cdot 7^{17}$, $ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \vdots 2^{20} \cdot 7^{37}$

$abc = 7^{37} \cdot 2^{26}$ Ответ: $7^{37} \cdot 2^{26}$ – min значение abc

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $\frac{a}{b}$ несократима $\Leftrightarrow$ НОД$(a,b)=1$

Пусть у $a+b$ и ab НОД >1.

Тогда есть p простое : $p \mid (a+b)$, $p \mid ab$

$p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ или $p \mid b$, т.к. $(a,b)=1$

$\left[\begin{array}{l} p \mid a, \text{ и } b \not\vdots\, p \\ p \mid b \text{ и } a \not\vdots\, p \end{array}\right. \Rightarrow a+b \not\vdots\, p$ (как сумма кратного p и некратного)

Противоречие.

$\Rightarrow$ НОД$(a+b, ab)=1$

Пусть $m \mid (a+b)$ и $m \mid (a^2-6ab+b^2)$

$a^2-6ab+b^2=(a+b)^2-8ab$

$m \mid (a+b) \Rightarrow m \mid (a+b)^2$, $m \mid a^2-6ab+b^2$

$\Rightarrow m \mid 8ab$ и $m \mid a+b$.

НОД$(ab, a+b)=1 \Rightarrow m \mid 8 \Rightarrow m \le 8$

Пример ~~~~ на $m=8$: $a=1$, $b=7$

$\frac{a}{b}=\frac{1}{7}$ несократима $a+b=8$. $a^2-6ab+b^2=$

$=1-42+49=8$, $a+b \,\vdots\, 8$, $a^2-6ab+b^2 \,\vdots\, 8$

Пример работает.

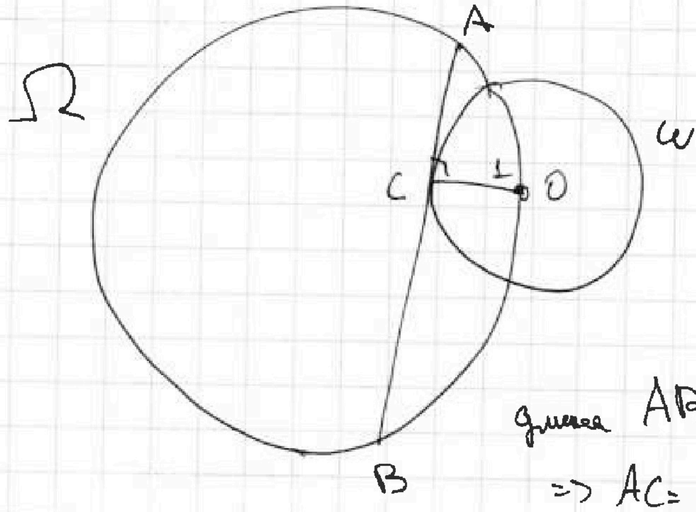
Ответ: наибольшее значение m равно 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



центр ω – O.

$OC \perp AB$, т.к. AB – кас. и $OC=1$, т.к. OC – радиус.

длина $AB = x$

$\Rightarrow AC = \frac{7}{8}x$, $BC = \frac{1}{8}x$, т.к. $\frac{AC}{CB} = 7$

По т. Пифагора $OA^2 = 1 + \frac{49}{64}x^2$

$OB^2 = 1 + \frac{1}{64}x^2$

$\frac{BO}{\sin BAO} = 2R$ по т. sin, здесь R – радиус Ω

$\sin\angle BAO = \frac{CO}{AO}$, т.к. $\angle ACO = 90^\circ$

$\Rightarrow \frac{BO}{CO}\cdot AO = BO\cdot AO = 10$ $(CO=1,\ R=5)$

$\Rightarrow BO^2\cdot AO^2 = 100$

$\Rightarrow \frac{49}{2^{12}}x^4 + \frac{50}{64}x^2 + 1 = 100$

$t := x^2$

$\frac{49}{2^{12}}t^2 + \frac{\cancel{50}\ 25}{2^5}t - 99 = 0$

Решим квадр уравнение.

$D = \frac{625}{2^{10}} + 4\cdot\frac{49\cdot 99}{2^{12}} = \frac{25^2 + (74-25)(74+25)}{2^{10}} = \frac{74^2}{2^{10}} = \left(\frac{74}{2^5}\right)^2$

Продолжение на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow t_1 = \frac{-\frac{25}{2^5} + \frac{74}{2^5}}{2 \cdot \frac{49}{2^{12}}} = \frac{2^6(74-25)}{49} = 64$$

$$t_2 = \frac{-\frac{25}{2^5} - \frac{74}{2^5}}{2 \cdot \frac{49}{2^{12}}} < 0, \text{ но } t = x^2 \geq 0$$

(здесь t_1 и t_2 - корни)

$$\Rightarrow t_2 \neq x^2.$$

$$\Rightarrow x^2 = t_1 \Rightarrow x = \sqrt{t_1} = \sqrt{64} = 8$$

Ответ: ~~8~~ длина AB равна 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$2x^2-5x+3 = 2(x-1)(x-1{,}5) \geq 0$

$2x^2+2x+1 > 0\ \forall x$, т.к. у этого выражения дискриминант равен $2^2-4\cdot 2 = -4 < 0$, и старший коэф-т > 0

$\Rightarrow$ ОДЗ: $x \in (-\infty; 1] \cup [1{,}5; +\infty)$

Заметим, что $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} > 0$, т.к. $2x^2+2x+1 > 0$

Заметим, $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = \dfrac{(2x^2-5x+3)-(2x^2+2x+1)}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}} =$

$= \dfrac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$

$$\left[\begin{array}{l} 2-7x=0 \\ \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \end{array}\right.$$

1) $2-7x=0 \quad x = \frac{2}{7} \quad \frac{2}{7} < 1,\ \frac{2}{7} \in$ ОДЗ.

$\Rightarrow x = \frac{2}{7}$ - корень.

2) $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1} = 1$

$2x^2+2x+1 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1; 0]$

на отрезке $[-1;0]$ $2x^2-5x+3$ - монотонно убывающая функция, т.к. вершина этой параболы имеет абсциссу $\frac{5}{2\cdot 2} = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow 2x^2-5x+3 \geq 2\cdot 0^2 - 5\cdot 0 + 3 = 3$.

$\Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} \geq \sqrt{3} > 1$ на отрезке $[-1;0]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поэтому $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \geq$

$\geq \sqrt{2x^2-5x+3} \geq \sqrt{3} > 1$ на отрезке $[-1;0]$

а $\forall x \notin [-1;0]$ ~~…~~ $\cap$ ОДЗ

$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \geq \sqrt{2x^2+2x+1} > 1$

$\Rightarrow x \in \varnothing$ в этом случае

$\Rightarrow$ Уравнение имеет единственный корень

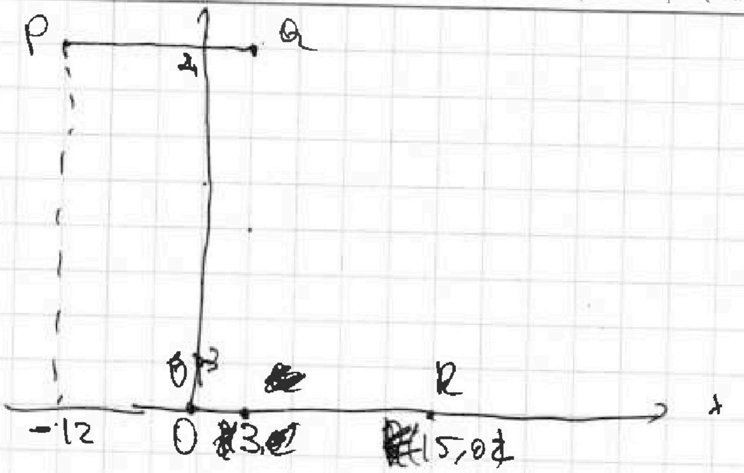
равный $\frac{2}{7}$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$d_x := x_2 - x_1 \quad d_y := y_2 - y_1$

$2d_x + d_y = 12 \quad 2d_x \vdots 2,\ 12 \vdots 2 \Rightarrow d_y \vdots 2$

$\Rightarrow d_y \in \{0; 2; 4 \dots; 12\}$

$\Rightarrow d_y = 2k$ и $k \in \{0; 1; 2; \dots; 6\}$

Пусть $d_y = 2k \Rightarrow d_x = 6-k$

Тогда по x_2, y_2, d_x и d_y однозначно задаётся x_1 и y_1.

При этом от левой границы OPQR – OP – до x_2 расстояние по оси x должно быть $\geq d_x$, от OR до y_2 расстояние по оси y должно быть $\geq d_y$

Поэтому для y при конкретном k $25-2k$ вариантов. Для x в чётных строках (у которых ордината $\vdots 2$) $16-(6-k) = 10+k$ вариантов, в нечётных строках: $15-(6-k) = 9+k$ вариантов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$-16a+10b=0$~~

~~$5b=8a$~~

~~$ax+16a=y$~~

~~$a(x+16)=y$~~

~~$a=\frac{y}{x+16}=\frac{y}{x+16}=\frac{\sqrt{63}/8}{\sqrt{63}/8}=\frac{y}{\sqrt{63}}$~~

Будем называть чётными строками прямые $y=a$, $a\in\mathbb{Z}$, $a\,\vdots\,2$. Аналогично определяются нечётные строки.

~~Тогда всего вариантов $\sum_{k=0}^{6}(10+k)$~~

$\forall$ конкретного k чётных строк всегда на 1 больше, чем нечётных, т.к. нижняя граница для $\forall k$ имеет ординату $2k\,\vdots\,2$, и верхняя граница имеет ординату $24\,\vdots\,2$.

$\Rightarrow$ Всего вариантов выбрать такую пару

$$\sum_{k=0}^{6}(13-k)(10+k)+\sum_{k=0}^{6}(12-k)(9+k)=$$

~~$=13\cdot 10+12\cdot 11+10\cdot 13+9\cdot 14+8\cdot 15+7\cdot 16+4\cdot 12+$~~
~~$+12\cdot 9+$~~

$$=7\cdot 130+7\cdot 12\cdot 9-2\sum_{k=0}^{6}k^2+\sum_{k=0}^{6}(10k+13k-9k+12k)=7(130+108)+6\cdot\sum_{k=0}^{6}k-2\sum_{k=0}^{6}k^2=$$

$$=7\cdot 148+6\cdot\frac{6\cdot 7}{2}-2\cdot\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}=$$

$$=7(148+18-26)=7\cdot 140=840$$

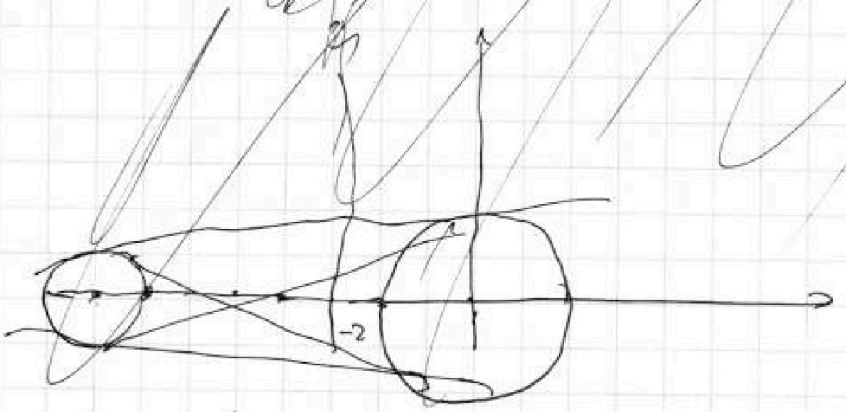
Ответ: 840 пар.

(Пользовались формулами $\sum_{i=0}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$ и $\sum_{i=0}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

~~$y = ax + 10b$~~

~~$(x+8)^2 + (ax+10b)^2 - 1 = \ldots + 100b^2 + 63$~~

~~$x^2(a^2+1) + 20abx + 100b^2 - 4 = x^2 + y^2 - 4$~~



картинка, ну картинка...

$(x+8)^2+y^2-1=0$ — окружность с центром в $(-8;0)$ и радиусом 1

$x^2+y^2-4=0$ — окр-сть с центром в $(0,0)$ и радиусом 2.

Эти окр-сти не пересекаются, т.к. расстояние между центрами (8) > суммы радиусов $(1+2=3)$

$\Rightarrow ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \le 0$, когда точка (x,y) лежит внутри одного из кругов, ограниченных этими окр-стями (возможно на границе круга)

При этом $(x,y) \in$ прямой $ax-y+10b=0$

и эта прямая $\cap$ область допустимых положений точек (x,y) равно в 2-х точках.

Из этого вытекает, что $ax-y+b\cdot 10=0$ — уравнение общей касательной к окр-стям

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

с центрами в (0,0) и (−8,0) и радиусами 2 и 1 соответственно.

Посчитаем внешние касательные. Они Λ можно центров — оси X — в центре положительной гомотетии A этих окр-стей.

$O_2(0,0)$ $\quad O_1(-8,0)$ $\quad$ ординатa A равна 0, т.к. $A \in O_1O_2$

$r_2 = 2$ $\quad r_1 = 1$

$$\frac{\overline{AO_2}}{\overline{AO_1}} = \frac{r_2}{r_1} = 2 \Rightarrow \text{у } A \text{ координаты } (-16,0)$$

$\Rightarrow AO_1 = 8$

Отрезок касательной из A к окр-сти с центром в O_1 и радиусом r_1 равен $\sqrt{AO_1^2 - r_1^2} = \sqrt{63}$

$\Rightarrow$ точки касания таковы, что $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ (x+16)^2 + y^2 = 63 \end{cases}$

Вычтем из одного другое и получим:

$\Rightarrow 16x + 256 - 64 = 62$

$\Leftrightarrow 16x = -130 \Rightarrow x = \cancel{-\frac{65}{8} = -8\frac{3}{8}}$ $-\frac{65}{8} = -8\frac{1}{8}$

$\Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{64}$ $\quad y = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$

Внешние касательные проходят через точку (−16, 0), поэтому ~~они задаются уравнением~~ $-16a + 10b = 0$

$\Rightarrow 10b = 16a$

~~$a(x+16) = y$~~ $\Rightarrow$ Уравнение касательной имеет вид $(x+16)a = y$

~~Ее~~ У одной из внешних касательных наклон равен: $a_1 = \frac{\sqrt{63}/8}{\cancel{16} 16 - 8\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{63}}{63} = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~2 второй вариант~~ Внешние касательные симметричны относительно OX, поэтому

у для второй вн. касат. наклон будет $a_2 = -a_1 = -\frac{1}{\sqrt{63}}$

$= -\frac{1}{3\sqrt{7}}$. Для $a_1, a_2 \Rightarrow b = \frac{8}{5}a_1$. $\left(a_2 = -\frac{\sqrt{7}}{21}\right)$

Посчитаем внутренние касательные.

Они пересекаются в центре отрицательной гомотетии B этих окр-стей. Ордината B равна 0, т.к $B \in O_1O_2$

$\frac{\overline{BO_2}}{\overline{BO_1}} = -\frac{r_2}{r_1} = -2 \Rightarrow$ у B координата $\left(-\frac{2}{3}\cdot 8, 0\right)$

т. е. $\cancel{\left(-\frac{16}{3}, 0\right)}$ $\left(-\frac{16}{3}, 0\right)$ т. е. $\left(-5\frac{1}{3}; 0\right)$

$BO_2 = 5\frac{1}{3} \Rightarrow BO_1 = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

отрезок касательной из B к окр-сти с центром $(-8, 0)$ и радиусом 1 равен $\sqrt{BO_1^2 - r_1^2} =$

$= \sqrt{\frac{\cancel{256}\,64}{9} - 1} = \cancel{\frac{\sqrt{255}}{3}} = \cancel{\frac{\sqrt{...}}{3}} = \cancel{\frac{...}{3}}\ \sqrt{\frac{55}{9}}$

Тогда точки касания с внутр. общей касательной таковы, что

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ (x+5\frac{1}{3})^2 + y^2 = \cancel{\frac{255}{9}}\ \frac{55}{9} \end{cases}$$

Вычтем из одного уравнения другое и получим:

$\cancel{16x + 63 - \frac{32}{3}x - \frac{256-245}{9}} =$

$16x + 63 - \frac{32}{3}x - \frac{256-55}{9} = 0$

$\frac{16}{3}x + 63 - \frac{201}{9} = \frac{16}{3}x + 63 - \frac{67}{3} = 0$

$16x + 189 - 67 = 16x + 122 = 0$. $x = -\frac{122}{16} = -\frac{61}{8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(x+8)^2+y^2=1$

$x+8=\frac{3}{8}$

$y^2=1-\frac{9}{64}=\frac{55}{64}$

$y=\frac{\pm\sqrt{55}}{8}$

Внутр. касательные проходят через точку $\left(-\frac{16}{3},0\right)$, поэтому $-\frac{16}{3}a+10b=0$

$10b=\frac{16}{3}a$

У внутр. касательных уравнение $a\left(x+\frac{16}{3}\right)=y$

Подставим $x=-\frac{61}{8}$

Для $y=\frac{\sqrt{55}}{8}\to a_3=\frac{\sqrt{55}/8}{\left(-\frac{61\cdot 3}{3}+\frac{16\cdot 8}{3}\right)/8}=\frac{\sqrt{55}}{\frac{128-61\cdot 3}{3}}=\frac{-3\sqrt{55}}{55}$

Для $y=-\frac{\sqrt{55}}{8}$ $a_4=\cancel{\frac{3\sqrt{55}}{64\cdot 7}}=\frac{3\sqrt{55}}{55}$

~~Для a_3, a_4 $b_i=\frac{8}{15}a_i$ для $i=3,4$~~

Для a_i $b_i=\frac{8}{15}a_i$ для $i=3$ и 4.

Ответ: $a\in\left\{-\frac{\sqrt{7}}{21};\frac{\sqrt{7}}{21};-\frac{3\sqrt{55}}{55};\frac{3\sqrt{55}}{55}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице!

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

$2x^2-5x+3=(2x-3)(x-1)=2(x-1{,}5)(x-1)\geq 0$

$\Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup[\frac{3}{2};+\infty)$

$2x^2+2x+1>0$ при $\forall x$, т.к. дискриминант равен $2^2-2\cdot 4=-4<0$, а старший коэф-т >0

$\Rightarrow$ ОДЗ: $x\in(-\infty;1]\cup[\frac{3}{2};+\infty)$

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=$

$$=\frac{2x^2-5x+3-(2x^2+2x+1)}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=$$

($\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\neq 0$, т.к. $2x^2+2x+1$ строго >0)

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=\frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}}=2-7x$$

$\Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$ или $2-7x=0$,

Рассмотрим случай: ~~Возведём в квадрат~~ $x=\frac{2}{7}\in$ ОДЗ $\Rightarrow x=\frac{2}{7}$ - корень

~~Подставим~~ $\sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}$ Возведём в квадрат.

$2x^2-5x+3=1+2x^2+2x+1-2\sqrt{2x^2+2x+1}$

Продолжение на обороте.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Перенесём всё что не под корнем влево и снова возведём в квадрат.

$(1-7x)^2 = \left(-2\sqrt{2x^2+2x+1}\right)^2$

$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$

$41x^2 - 22x - 3 = 0$

$D = 22^2 + 3\cdot 41\cdot 4 = 16\cdot 61$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{2\cdot 41} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$

$x_1 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41} < 0$, т.к. $11 < 2\sqrt{61}$, т.к. $121 < 4\cdot 61$

Счёт!

$41 \cdot 12 = 82 + 41 = 492$, $22 \cdot 22 = 44 + 44 = 484$

$1000 - 8 - 16 = 1000 - 24 = 976$

$976 : 61 = 16$, $976 - 96 = 16$

$128 + 55$

$183 - 128$

$1 - 7x = -2\sqrt{2x^2+2x+1} < 0$

$\Rightarrow x > \frac{1}{7}$

$x_1 < 0 \Rightarrow x_1$ – не корень исходного выражения.

~~$x_1 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41} \vee -\frac{1}{2}$~~

~~$20,5 \vee 2\sqrt{61} - 11$~~

~~$31,5 \vee 2\sqrt{61} \Rightarrow$~~

~~$x_2 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$, чтобы $\vee 1,5$~~

~~$22 + 4\sqrt{61} \vee 3\cdot 41 = 123$~~

~~$4\sqrt{61} < 123 - 22 = 101$, т.к.~~ $16 < 101$, $61 < 101$ и $16\cdot 61 < 101^2$

~~$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \vee 1$~~ $\Rightarrow 2\sqrt{61} \vee 30$, $\sqrt{61} \vee 15$

Проверим, что $x_2 \in$ ОДЗ. $15 > 8 > \sqrt{64} > \sqrt{61}$

$\Rightarrow 30 > 2\sqrt{61} \Rightarrow 41 > 2\sqrt{61} + 11 \Rightarrow 1 > \frac{2\sqrt{61}+11}{41} = x_2$

$\Rightarrow x_2 \in$ ОДЗ. $x_2 > \frac{11}{41} > \frac{11}{44} > \frac{1}{4} > \frac{1}{7}$

$\Rightarrow 1 - 7x_2 < 0$ и $(1-7x_2)^2 = \left(-2\sqrt{2x^2+2x+1}\right)^2$

$\Rightarrow 1 - 7x_2 = -2\sqrt{2x^2+2x+1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

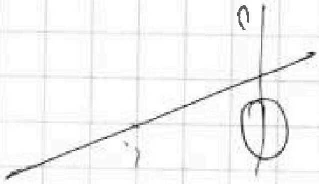
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

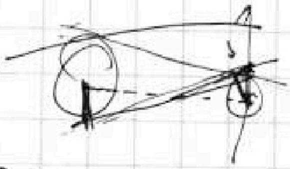
МФТИ

$l: \quad ax+by+c=0$

$d(x,y,l)=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



$ax-y+10b=0$



$(-8;0) \quad \frac{|-8a+10b|}{a^2+1}=1$

$(0;0) \quad \frac{|10b|}{a^2+1}=2$

$|10b|=2a^2+2$

$|-8a+10b|=a^2+1$

$100b^2-1$

$64+b^2=100$.

1) $b\geq 0, \ -8a+10b\geq 0$

$-8a=-a^2-1$

$a^2-8a+1=0$

$D=64-4=60$

$a=\frac{8\pm 2\sqrt{15}}{2}=4\pm\sqrt{15}$

$\frac{8}{49}-\frac{10}{7}+3=$

$=\frac{8}{49}$

$ax_2^2+2x_2+1$

$-16,0$

$\begin{cases} 100b^2-160ab+64a^2=a^2+1 \\ 100b^2=4a^2+4 \end{cases}$

$25b^2=a^2+1$

$b=\pm\frac{\sqrt{a^2+1}}{5}$

$b>0$

$b=\sqrt{\frac{a^2+1}{5}}$

$67a^2+3\pm\frac{160}{5}a\sqrt{a^2+1}=0$

$67a^2+3=\cancel{\mp}32a\sqrt{a^2+1}$

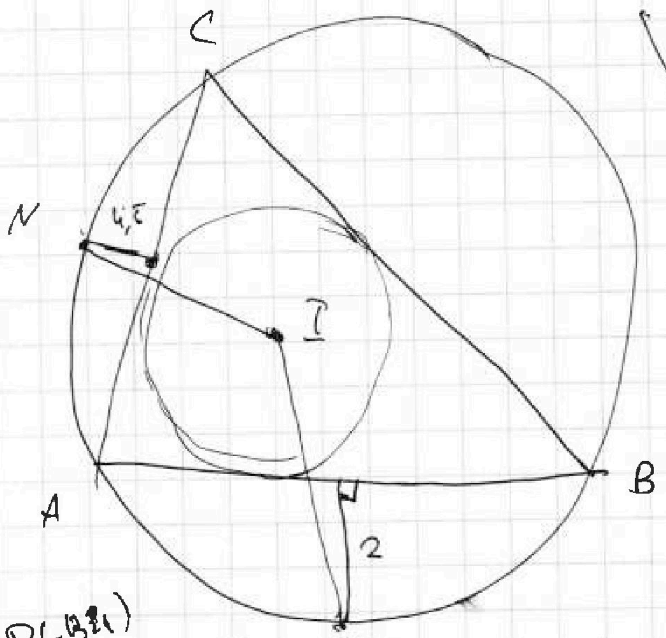
$67a^2+3+\cancel{100}\ 32a\sqrt{a^2+1}$

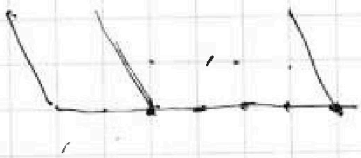
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице.

1 2 3 4 5 6 7

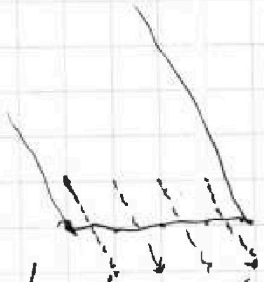
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

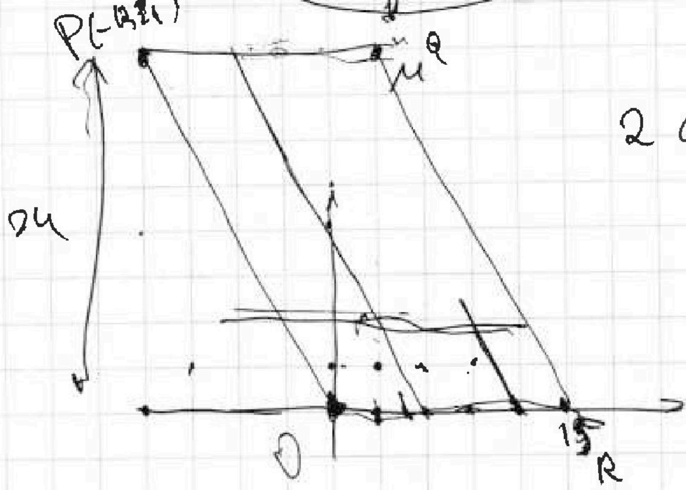
МФТИ





$7-2=5$





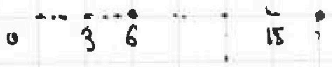
$2d_x + d_y = 12$

$x_2 \quad y_2 - y_1 = 0$

$x_2 - x_1 = 6$

$16-(6-k)=$

$=10+k$



$x_2 \geq 6$

$6, 7, \dots, 15$

$10 \cdot 24 \quad (\cancel{0;6}\ 6,0)$

$d_y = 2$ $\quad y_2 \geq 2, \ x_2 \geq 5$

$x_2 - x_1 = 5$ $\quad 23$

$d_y = 4 \quad d_x = 4 \quad x_2, y_2 \geq 4$

$12 \quad 22$

$d_y = 6 \quad d_x = 3 \quad y_2 \geq 6, \ x_2 \geq 3$

$21 \quad 13$