



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{14} \cdot 4^{10}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 4^{14}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 4^{34}$$

Будем обозначать $\|n\|_p$ -

степень в разложении простого p
 $b, n \in \mathbb{N}$

Перемножим 3 делимости и получим, что:

$$a^2 b^2 c^2: 2^{14+14+20} \cdot 4^{10+14+34}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2: 2^{51} \cdot 4^{64}$$

но $a^2 b^2 c^2$ - полный квадрат, поэтому ст. в разложении 2 в $(abc)^2$ четна.

$$(abc)^2: 2^{51} \Rightarrow (abc)^2: 2^{52}$$

~~$$(abc)^2: 2^{52} \cdot 4^{64} = (abc)^2 \cdot 2^{52} \cdot 4^{64}$$~~

~~$$\Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 4^{32}$$~~

Пример, когда $abc = 2^{26} \cdot 4^{32}$:

~~$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots$$~~

$$\|ac\|_4 = \|a\|_4 + \|c\|_4 \leq \|a\|_4 + \|b\|_4 + \|b\|_4 + \|c\|_4 =$$

$$= \|ab\|_4 + \|bc\|_4$$

$$\Rightarrow \|ab\|_4 + \|bc\|_4 \geq \|ac\|_4 \geq 34$$

$$\Rightarrow \|a^2 b^2 c^2\|_4 = \|ab\|_4 + \|bc\|_4 + \|ac\|_4 \geq 34 \cdot 2 = 68$$

$$\Rightarrow (abc^2): 4^{64} \cdot 2^{52} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 4^{64} \cdot 2^{52}$$

$$\Rightarrow abc \geq 4^{34} \cdot 2^{26}$$

Пример, когда $abc = 4^{34} \cdot 2^{26}$: $a = 2^8 \cdot 4^{20}$ $b = 2^6$ $c = 2^{14}$

$$ab = 2^{14} \cdot 4^{20}; 2^{14} \cdot 4^{10} \quad bc = 2^{18} \cdot 2^{14}; 2^{14} \cdot 4^{14}, \quad ac = 2^{20} \cdot 4^{34}; 2^{20} \cdot 4^{34}$$

$$abc = 4^{34} \cdot 2^{26} \quad \text{Ответ: } 4^{34} \cdot 2^{26} - \text{min значение } abc$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $\frac{a}{b}$ несократима $\Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

Пусть $u \mid a+b$ и $u \mid \text{НОД}(a, b) > 1$.

Тогда есть p простое: $p \mid (a+b)$, $p \mid ab$

$p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ или $p \mid b$, т.к. $(a, b) = 1$

$\begin{cases} p \mid a, p \nmid b \\ p \mid b, p \nmid a \end{cases} \Rightarrow a+b \not\equiv 0 \pmod{p}$ (как сумма
кратного p и некрратного)

Противоречие.

$\Rightarrow \text{НОД}(a+b, ab) = 1$

Пусть $m \mid (a+b)$ и $m \mid (a^2 - 6ab + b^2)$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab$$

$$m \mid (a+b) \Rightarrow m \mid (a+b)^2, m \mid a^2 - 6ab + b^2 \\ \Rightarrow m \mid 8ab \text{ и } m \mid a+b.$$

$$\text{НОД}(ab, a+b) = 1 \Rightarrow m \mid 8 \Rightarrow m \leq 8$$

Пример ~~на~~ на $m=8$: $a=1, b=7$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{7} \text{ несократима} \quad a+b=8, \quad a^2 - 6ab + b^2 =$$

$$= 1 - 42 + 49 = 8, \quad a+b: 8, \quad a^2 - 6ab + b^2: 8$$

Пример работает.

Ответ: наибольшее значение m равно 8.



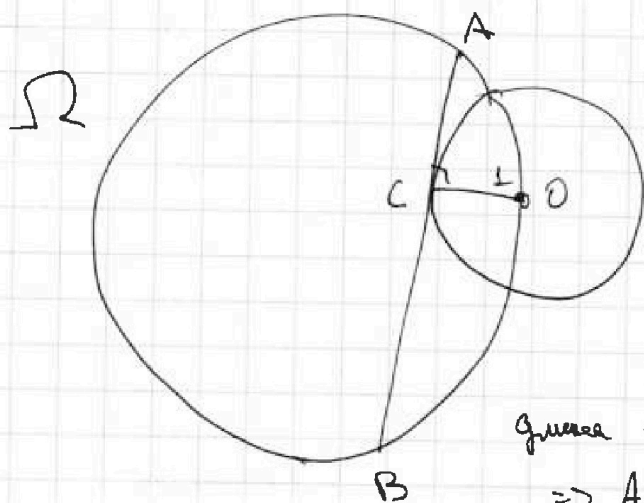
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



центр $\omega - O$.

$OC \perp AB$, т.к.

AB - кас. и $OC \perp$,

т.к. OC - радиус.

длина $AB = x$

$$\Rightarrow AC = \frac{4}{8}x, BC = \frac{1}{8}x, \text{ т.к. } \frac{AC}{CB} = 4$$

По т. Пифагора $OA^2 = 1 + \frac{49}{64}x^2$

$$OB^2 = 1 + \frac{1}{64}x^2$$

$$\frac{BO}{\sin \angle BAO} = 2R \text{ по т. син, здесь } R - \text{ радиус } \Omega$$

$$\sin \angle BAO = \frac{CO}{AO}, \text{ т.к. } \angle ACO = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{BO}{CO} \cdot AO = BO \cdot AO = 10 \quad (CO=2, R=5)$$

$$\Rightarrow BO^2 \cdot AO^2 = 100$$

$$\Rightarrow \frac{49}{2^{12}}x^4 + \frac{50}{64}x^2 + 1 = 100$$

$$t := x^2$$

$$\frac{49}{2^{12}}t^2 + \frac{25}{2^5}t - 99 = 0$$

Решим квадрат уравнение.

$$D = \frac{625}{2^{10}} + 4 \cdot \frac{49 \cdot 99}{2^{12}} = \frac{25^2 + (44-25)(44+25)}{2^{10}} = \frac{44^2}{2^{10}} = \left(\frac{44}{2^5}\right)^2$$

Продолжение на обороте

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Rightarrow t_1 = \frac{-25}{25} + \frac{44}{25} = \frac{2^6(44-25)}{49} = 64$$

$$t_2 = \frac{-25}{25} - \frac{44}{25} < 0 \Rightarrow \text{Но } t = x^2 \geq 0$$

(здесь t_1 и t_2 - корни)

$$\Rightarrow t_2 \neq x^2.$$

$$\Rightarrow x^2 = t_1 \Rightarrow x = \sqrt{t_1} = \sqrt{64} = 8$$

Ответ: ~~8~~ длина АВ равна 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)(x-1,5) \geq 0$$

$$2x^2 + 2x + 1 > 0 \quad \forall x, \text{ т.к. у этого выражения}$$

дискриминант равен $2^2 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$, и старший коэффициент > 0

$$\Rightarrow O \Delta B: x \in (-\infty; 1] \cup [1,5; +\infty)$$

Заметим, что $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 0$, т.к. $2x^2 + 2x + 1 > 0$

$$\text{Заметим, } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \frac{(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} =$$

$$= \frac{2 - 4x}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 4x$$

$$\begin{cases} 2 - 4x = 0 \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$1) 2 - 4x = 0 \quad x = \frac{2}{4} \quad \frac{2}{4} < 1, \quad \frac{2}{4} \in O \Delta B.$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{4} - \text{корень.}$$

$$2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \leq 1 \Rightarrow x \in [-1; 0]$$

на отрезке $[-1; 0]$ $2x^2 - 5x + 3$ - монотонно убывающая функция, т.к. вершина этой параболы имеет абсциссу $\frac{5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 \geq 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 3 = 3.$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq \sqrt{3} > 1 \text{ на отрезке } [-1; 0]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Поставим } \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \geq$$

$$\geq \sqrt{2x^2-5x+3} \geq \sqrt{3} > 1 \quad \text{на отрезке } [-1; 0]$$

$$\text{а } \forall x \notin [-1; 0] \quad \sqrt{2x^2-5x+3} \cap \emptyset \cap \mathbb{R}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \geq \sqrt{2x^2+2x+1} > 1$$

$$\Rightarrow x \in \emptyset \quad \text{в этом случае}$$

\Rightarrow Уравнение имеет единственный корень

$$\text{равный } \frac{2}{4}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{4}.$$

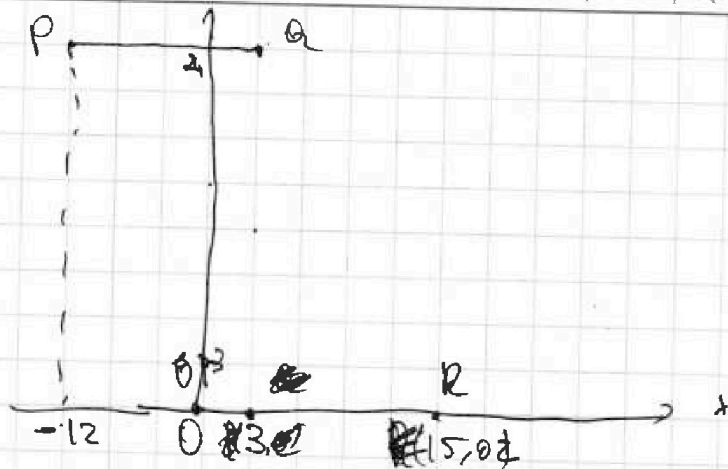
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$d_x := x_2 - x_1 \quad d_y := y_2 - y_1$$

$$2d_x + d_y = 12 \quad 2d_x \leq 12 \Rightarrow d_x \leq 6$$

$$\Rightarrow d_y \in \{0; 2; 4; \dots; 12\}$$

$$\Rightarrow d_y = 2k \text{ и } k \in \{0; 1; 2; \dots; 6\}$$

$$\text{Пусть } d_y = 2k \Rightarrow d_x = 6 - k$$

Тогда по x_2, y_2 , d_x и d_y однозначно задаётся x, y .

При этом от левой границы

$OP \cup OR$ — OP — го x_2 расстояние по оси x

расстояние $OP \geq d_x$, от OR го y_2 расстояние по оси y расстояние $OR \geq d_y$

Поставим для y при конкретном k

25-26 вариантов. Для x в чётных строках (у которых абсцисса: 2) $16 - (6 - k) = 10 + k$ вариантов, в нечётных строках: $15 - (6 - k) = 9 + k$ вариантов

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-16a + 10b = 0$$
$$5b = 8a$$

$$ax + 16a = y$$

$$a(x + 16) = y$$

$$a = \frac{y}{x+16} = \frac{y}{x+16} \cdot \frac{\sqrt{6318}}{\sqrt{6318}} = \frac{y\sqrt{6318}}{(x+16)\sqrt{6318}}$$

Всего вариантов $\sum_{k=0}^6 (10+k)$

В конкретном k четных строк всегда

на 4 больше, чем нечетных, т.к.

внизу левый квадрат имеет ординату $2k:2$,
и в верхний квадрат имеет ординату $24:2$.

\Rightarrow Всего вариантов всегда такую сумму

$$\sum_{k=0}^6 (13-k)(10+k) + \sum_{k=0}^6 (12-k)(9+k) =$$

$$= 13 \cdot 10 + 12 \cdot 11 + 10 \cdot 13 + 9 \cdot 14 + 8 \cdot 15 + 7 \cdot 16 + 6 \cdot 17 +$$
$$+ 12 \cdot 9 +$$

$$= 7 \cdot 130 + 4 \cdot 12 \cdot 9 + 2 \sum_{k=0}^6 k^2 + \sum_{k=0}^6 (10k + 13k -$$

$$- 9k - 12k) = 7(130 + 108) + 6 \cdot \sum_{k=0}^6 k - 2 \sum_{k=0}^6 k^2 =$$

$$= 7 \cdot 148 + 6 \cdot \frac{6 \cdot 4}{2} - 2 \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 13}{6} =$$

$$= 7(148 + 18 - 26) = 7 \cdot 140 = 980$$

Ответ: 980 вар.

(Используем формулы $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ и $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

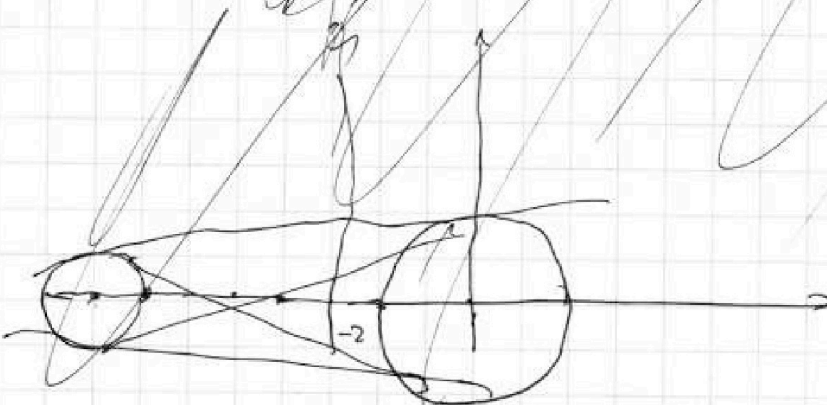
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недоступна!



~~$y = ax + 10b$~~

~~$(x+8)^2 + (ax+10b)^2 - 1 = (ax)^2 + x(20abx+10) + 100b^2 - 63$~~
 ~~$x^2 + 2ax + 1 + 20abx + 100b^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4$~~



← касательная, касательная...

$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$ - окружность с центром в $(-8; 0)$ и радиусом 1

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ - окружность с центром в $(0, 0)$ и радиусом 2.

Эти окружности не пересекаются, т.к. расстояние между центрами $(8) >$ сумме радиусов $(1+2=3)$

$\Rightarrow \frac{(x+8)^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 4} \leq 0$, когда

точка (x, y) лежит внутри одного из кругов, ограничивающих эти окружности (возможно на границе круга)

При этом $(x, y) \in$ прямой $ax - y + 10b = 0$

и эта прямая принадлежит допустимых положений точек (x, y) равно в 2-х точках.

Из этого вытекает, что $ax - y + 10b = 0$ - уравнение одной касательной к окружностям

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

с центрами $O(0,0)$ и $(-8,0)$ и радиусами 2 и 1 соответственно.

Помогает Внешние касательные. Они \perp линии центров-
и X - в центре меньшей окружности A .
 \Rightarrow их ось-стей.

$O_2(0,0)$ $O_1(-8,0)$ окружность A радиус 0 ,
 $r_2=2$ $r_1=1$ т.к. $A \in O_1O_2$

$$\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r_2}{r_1} = 2 \Rightarrow y \text{ А координаты } (-16,0)$$

$$\Rightarrow AO_1 = 8$$

Отрезок касательной из A к оси-стей считается 0 , и
радиус r_1 равен $\sqrt{AO_1^2 + r_1^2} = \sqrt{63}$

\Rightarrow точки касания таковы, что
$$\begin{cases} (x-8)^2 + y^2 = 1 \\ (x+16)^2 + y^2 = 63 \end{cases}$$

вычитаем из одного уравнения второе:

$$\Rightarrow 16x + 256 - 64 = 62$$

$$\Leftrightarrow 16x = -130 \Rightarrow x = -\frac{65}{8} = -8\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{64} \quad y = \pm \frac{\sqrt{63}}{8}$$

Внешние касательные проходят через точку $(-16,0)$,
поэтому эти ~~заданы~~ уравнением $-16a + 16b = 0$
 $\Rightarrow 16b = 16a$

~~$a(x+16) = y$~~ \Rightarrow уравнение касательной имеет
вид $(x+16)a = y$

~~y~~ y одной из внешних касательных
наклон равен: $a_1 = \frac{\sqrt{63} \cdot 8}{16 - 8\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{63}}{63} = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

Второй касательный Внешние касательные симметричны относительно Ox , поэтому

$$y \text{ для второй вн. касат. прямой будет } a_2 = -a_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3\sqrt{4}} \cdot \text{Для } a_1, a_2 \rightarrow b = \frac{8}{5} a_1, \quad (a_2 = -\frac{\sqrt{4}}{2})$$

Посмотрим внутренние касательные.

Они пересекаются в центре отрицательной полуоси B этих окружностей. Радиусы R равны 0 , т.к. $B \in O_2$

$$\frac{BO_2}{BO_1} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} = -2 \Rightarrow y \text{ в координатах } (-\frac{2}{3}, 8, 0)$$

$$\text{т.е. } (-\frac{16}{3}, 0) \quad (-\frac{16}{3}, 0) \quad \text{т.е. } (-5\frac{1}{3}, 0)$$

$$BO_2 = 5\frac{1}{3} \Rightarrow BO_1 = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Отрезок касательной из B к окружности с центром $(-8, 0)$ и радиусом 3 равен $\sqrt{BO_2^2 - r^2} =$

$$= \sqrt{\frac{256}{9} - 9} = \sqrt{\frac{256 - 81}{9}} = \sqrt{\frac{175}{9}} = \frac{\sqrt{175}}{3} = \frac{5\sqrt{7}}{3}$$

Тогда точка касания с внутр. общей касательной

$$\text{такова, что } \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 9 \\ (x+5\frac{1}{3})^2 + y^2 = \frac{255}{9} \end{cases}$$

Вычитая из одного уравнения другое и получим:

$$16x + 63 - \frac{32}{3}x - \frac{256 - 245}{9} =$$

$$16x + 63 - \frac{32}{3}x - \frac{256 - 55}{9} = 0$$

$$\frac{16}{3}x + 63 - \frac{201}{9} = \frac{16}{3}x + 63 - \frac{64}{3} = 0$$

$$16x + 189 - 64 = 16x + 122 = 0. \quad x = -\frac{122}{16} = -\frac{61}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$
$$x+8 = \frac{3}{8}$$
$$y^2 = 1 - \frac{9}{64} = \frac{55}{64}$$
$$y = \pm \frac{\sqrt{55}}{8}$$

Внутр. касательные проходят через

точку $(-\frac{16}{3}, 0)$, поэтому $-\frac{16}{3}a + 10b = 0$

$$10b = \frac{16}{3}a$$

У внутр. касательных уравнение $a(x + \frac{16}{3}) = y$

логически $x = -\frac{61}{8}$

Для $y = \frac{\sqrt{55}}{8} \rightarrow a = \frac{\sqrt{55}/8}{\frac{3}{3}(-\frac{61 + 16 \cdot 3}{3})/8} = \frac{\sqrt{55}}{\frac{128 - 61 \cdot 3}{3}} = \frac{-3\sqrt{55}}{55}$

Для $y = -\frac{\sqrt{55}}{8} \rightarrow a = \frac{-\sqrt{55}/8}{\frac{3}{3}(-\frac{61 + 16 \cdot 3}{3})/8} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$

~~Для a_3, a_4 $b_3 = \frac{8}{15} a_3$ $b_4 = \frac{28}{15} a_4$~~

Для a_i $b_i = \frac{8}{15} a_i$ где $i = 3, 4$.

Ответ: $a \in \left\{ -\frac{\sqrt{4}}{21}; \frac{\sqrt{4}}{21}; -\frac{3\sqrt{55}}{55}; \frac{3\sqrt{55}}{55} \right\}$



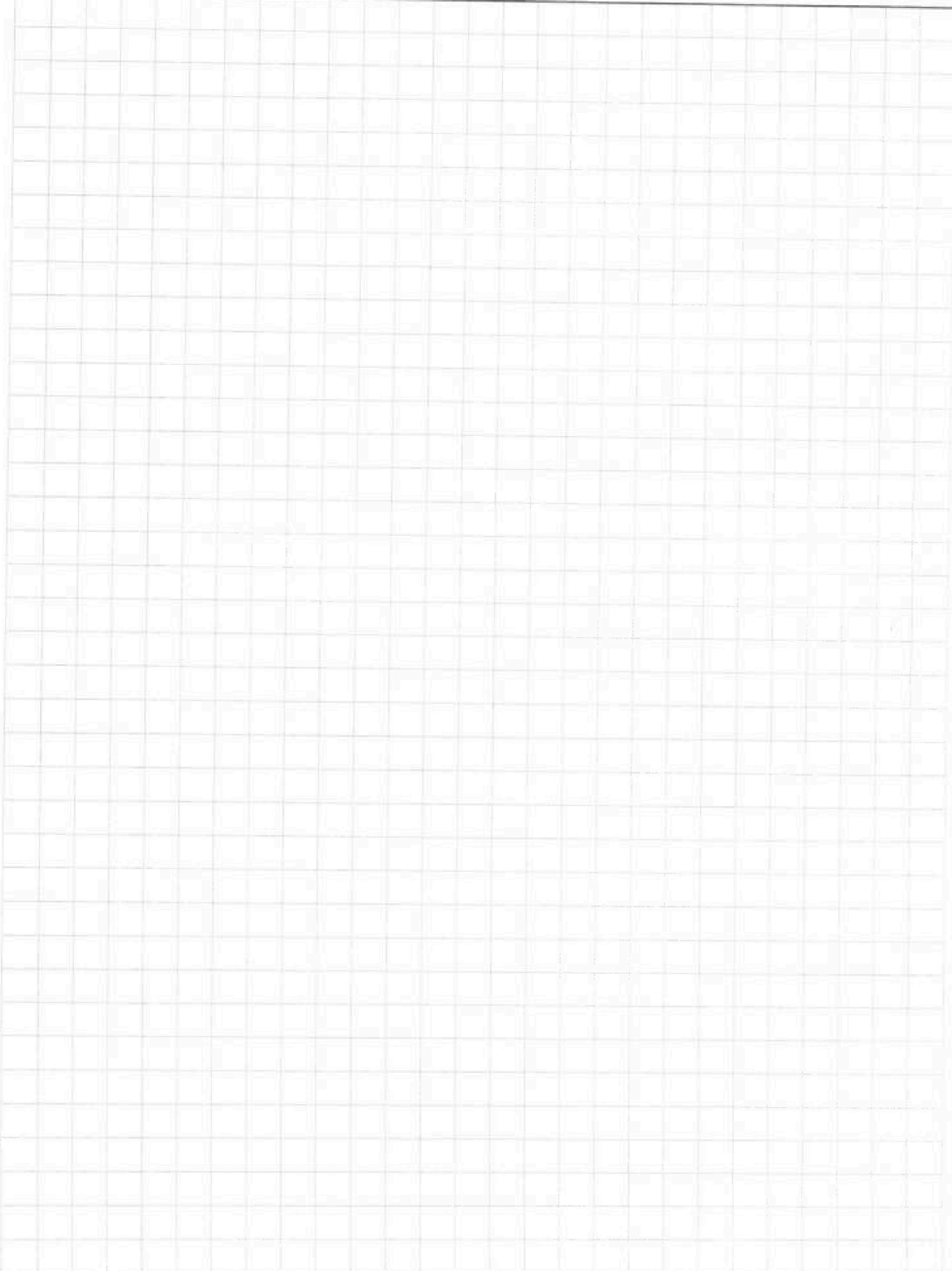
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





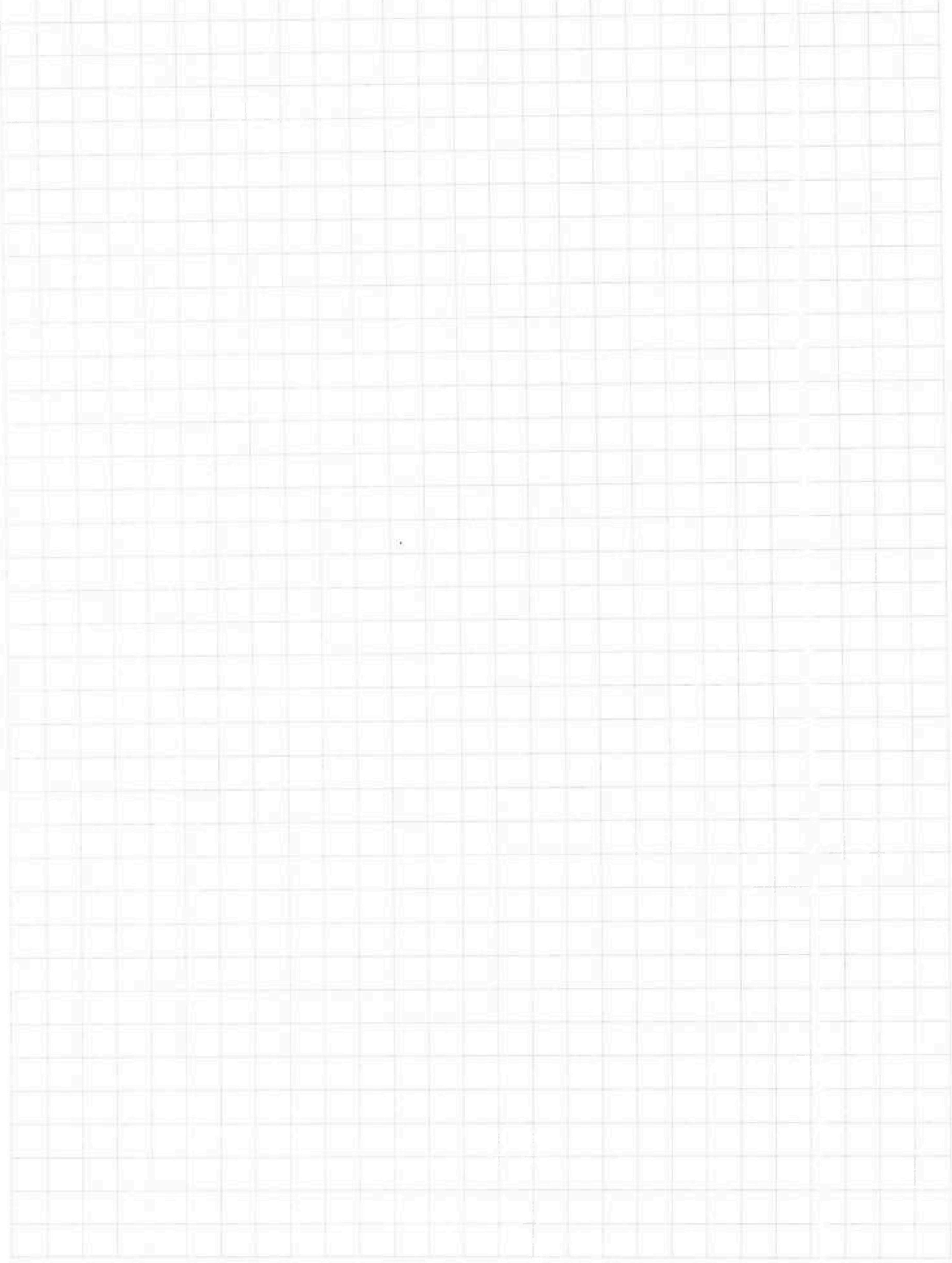
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице!

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (2x^{\overset{-3}{-3}}) (x - \frac{3}{2}) = \frac{2}{2} (x - \frac{3}{2}) (x - \frac{3}{2}) \geq 0$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} (-\infty; \frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$2x^2 + 2x + 1 \neq 0$ при $\forall x$, т.к. дискриминант равен $2^2 - 2 \cdot 4 = -4 < 0$, а старший коэффициент > 0

$$\Rightarrow O \cap \mathbb{R} : x \in (-\infty; \frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} =$$

$$= \frac{2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} =$$

$$\neq \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \neq 0, \text{ т.к. } 2x^2 + 2x + 1 \text{ строго } > 0 \right)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \frac{2 - 4x}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$$

$$= 2 - 4x$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \text{ или } 2 - 4x = 0$$

Рассмотрим случаи

~~Возведем в квадрат~~ $x = \frac{2}{4} \in O \cap \mathbb{R} \Rightarrow x = \frac{2}{4}$ - корни

~~Возведем в квадрат~~ $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$ Возведем в

квадрат -

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Продолжим на обороте.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Перенесём всё что не под корнем
влево и снова возведём в квадрат.

$$(1 - 4x)^2 = (-2\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 3 \cdot 41 \cdot 4 = 16 \cdot 61$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x_1 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < 0, \text{ т.к. } 11 < 2\sqrt{61}, \text{ т.к. } 121 < 4 \cdot 61$$

~~$x_1 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$~~

$$x_1 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \approx \frac{11 - 2 \cdot 7.8}{41} = \frac{11 - 15.6}{41} = \frac{-4.6}{41} < 0$$

$1 - 4x = -2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} < 0$
 $\Rightarrow x > \frac{1}{4}$

$x_1 < 0 \Rightarrow x_1$ — не
корень исходного
уравнения.

$$x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}, \text{ т.к. } \sqrt{61} \approx 7.8$$

$$22 + 4\sqrt{61} \approx 22 + 4 \cdot 7.8 = 53.2$$

$$4\sqrt{61} < 53.2 - 22 = 31.2, \text{ т.к. } 61 < 101 \text{ и } 16 \cdot 61 < 101^2$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \approx \frac{11 + 15.6}{41} = \frac{26.6}{41} \approx 0.65$$

Проверим, что $x_2 \in (0, 1/3)$. $15 > 8 > \sqrt{64} > \sqrt{61}$
 $\Rightarrow 30 > 2\sqrt{61} \Rightarrow 41 > 2\sqrt{61} + 11 \Rightarrow 1 > \frac{2\sqrt{61} + 11}{41} = x_2$

$$\Rightarrow x_2 \in (0, 1/3). \quad x_2 > \frac{11}{41} > \frac{11}{44} > \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 - 4x_2 < 0 \Rightarrow (1 - 4x_2)^2 = (-2\sqrt{2x_2^2 + 2x_2 + 1})^2$$

$$\Rightarrow 1 - 4x_2 = -2\sqrt{2x_2^2 + 2x_2 + 1}$$

Счит!

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 492 \end{array} \quad \begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$1000 - 8 - 16 = 1000 - 24 = 976$$

$$\begin{array}{r} 976 \\ - 946 \\ \hline 30 \\ - 26 \\ \hline 46 \end{array}$$

121 + 55 =

183

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



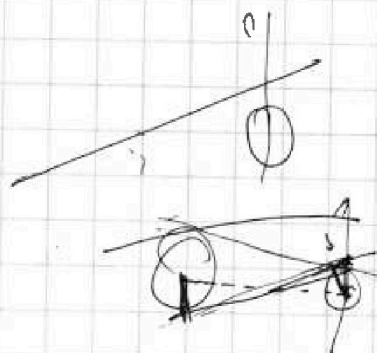
$$l: ax + by + c = 0$$

$$d(x, y, l) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$ax - y + 10b = 0$$

$$(-8; 0) \quad \frac{|-8a + 10b|}{a^2 + 1} = 1$$

$$(0; 0) \quad \frac{|10b|}{a^2 + 1} = 2$$



$$|10b| = 2a^2 + 2$$

$$|-8a + 10b| = a^2 + 1$$

$$1) b \geq 0, -8a + 10b \geq 0$$

$$-8a = a^2 - 1$$

$$a^2 - 8a + 1 = 0$$

$$D = 64 - 4 = 60$$

$$a = \frac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$$

$$\frac{10b^2 - 1}{6a^2 - 10b^2}$$

$$\frac{8}{4a} - \frac{10}{4} + 3 =$$

$$= \frac{8}{4a}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \quad -16, 0$$

$$\begin{cases} 100b^2 + 160ab + 64a^2 = a^2 + 1 \\ 100b^2 = 4a^2 + 1 \end{cases}$$

$$25b^2 = a^2 + 1$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5}$$

$$b > 0$$

$$b = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5}$$

$$64a^2 + 3 \pm \frac{160}{5} a \sqrt{a^2 + 1} = 0$$

$$64a^2 + 3 = 32a \sqrt{a^2 + 1}$$

$$64a^2 + 3 = 32a \sqrt{a^2 + 1}$$

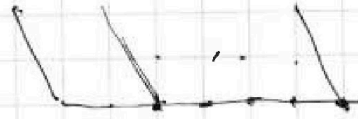
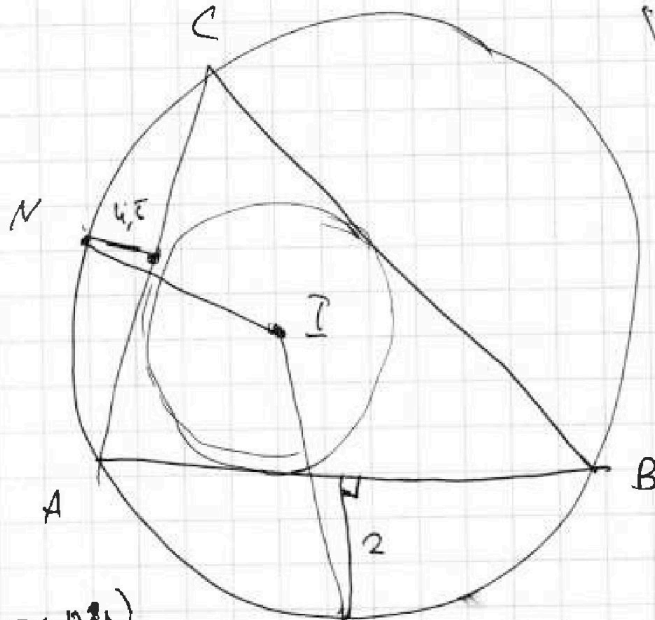
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице.

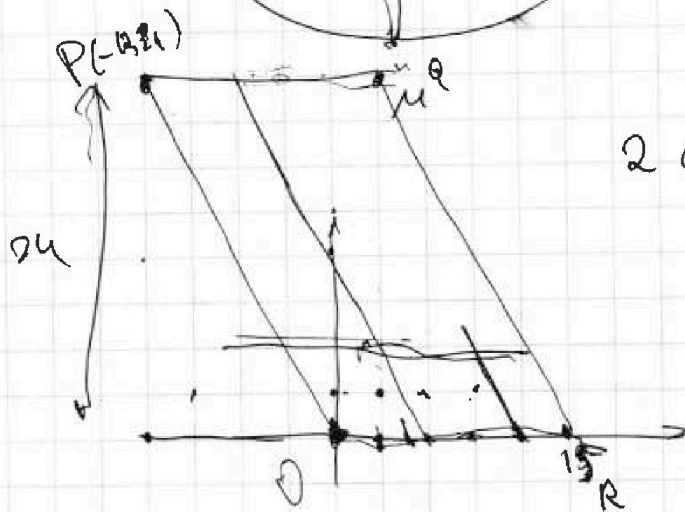
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!



$$7 - 2 = 5$$



$$2d_x + d_y = 12$$

$$x_2 - y_1 = 0$$

$$x_2 - x_1 = 6$$

$$16 - (6 - k) = 10 + k$$

0 ... 3 6 ... 15

$$x_2 \geq 6$$

6, 2, ..., 15

$$10 \cdot 24 \quad (\text{or } 6, 0)$$

$$d_y \geq 2$$

$$x_2 - x_1 = 5$$

$$y_2 \geq 2, x_2 \geq 5$$

23

$$d_y = 4 \quad d_x = 4$$

$$x_2, y_2 \geq 4$$

$$d_y = 6 \quad d_x = 3$$

$$12 \quad 22$$

$$y_2 \geq 6, x_2 \geq 3$$