МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 1

Посмотрим на степени 7:

Т.к. $11 + 18 < 39$, то 11 и 18 не являются обе минимальными, на которое делится.

Тогда сумма степеней хотя бы 39.

Пусть $deg_7(a) = 19$; $deg_7(b) = 0$; $deg_7(c) = 20$:

Тогда $deg_7(ab) = 19 \geq 11$; $deg_7(bc) = 20 \geq 18$;

$deg_7(ac) = 39 \geq 39$.

Посмотрим на степени 2:

Пусть $deg_2(a) = x$; $deg_2(b) = y$; $deg_2(c) = z$.

Тогда:

$x + y \geq 15$; $y + z \geq 17$; $z + x \geq 23$.

Тогда $2(x+y+z) \geq 55$

$x + y + z \geq \left\lceil \frac{55}{2} \right\rceil = 28$

Пусть $x = 10$; $y = 5$; $z = 13$:

Тогда: $deg_2(ab) = 15 \geq 15$; $deg_2(bc) = 18 \geq 17$,

$deg_2(ac) = 23 \geq 23$.

Ответ:

Тогда произведение минимум: $2^{28} 7^{39}$. Это выполняется

если подставить $a = 2^{10} 7^{19}$; $b = 2^5$; $c = 2^{13} 7^{20}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 2

Т.к. $\frac{a}{b}$ несократима, то НОД $(a,b) = 1 \Rightarrow$ прост.

пусть p – делитель $a+b$. Тогда он не является ни делителем a, ни делителем b (иначе пусть не умаляя общности $a \vdots p$, $b \not\vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b = \overset{a}{pd} + \overset{b}{(pn + r)}_{r \neq 0} = p(d+n) + r \not\vdots p$).

Тогда запишем $a+b = pq$.

Тогда $a^2 - 7ab + b^2 = pk$.

$a^2 + 2ab + b^2 - 7ab - 2ab = pk$

$(a+b)^2 - 9ab = pk$

$p^2q^2 - 9ab = pk$

$p(pq^2 - k) = 9ab \vdots p$. $a \not\vdots p, b \not\vdots p \Rightarrow 9 \vdots p$.

Значит $p = 3$. Также возможен вариант $m = 9$, т.к. a и $b \not\vdots 3$, 9 подходит. Пример:

$a = 1$; $b = 8$: $\frac{1+8}{1+7\cdot8\cdot1 - 8^2} = \frac{9}{1-56+64} = \frac{9}{9} = 1$.

Ответ: $m = 9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$11+18+39 = 2(a+b+c)$

$4 \quad 7$

$a+b+c = 34$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{km}{nm}$

НОД $(a,b)=1$

$a+b \vdots p$

$a \not\vdots p$

$b \not\vdots p$

$a+b = pk$

$a^2-7ab+b^2 = pq$

$(a+b)^2-9ab = pq$

$pk-9ab = pq$

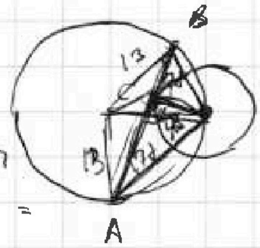
$\to 9ab = p(k-q)$

$p \to 3$

$p \to 9$

$p \to 1$

$\frac{1+2}{1-14+4} = \frac{3}{9}$



$\frac{\sqrt{45^2 x^2+49}}{2} =$

$45^2x^2+45 =$

$=13^2+13^2-2\cdot13^2\cos$

$17^2x^2+49 =$

$=13^2+13^2-2\cdot13^2\cos\beta$

$\cancel{\{3x^2-6x+2\}}$

$\begin{cases} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases}$

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1-2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 81x^2-18x+1$

$6x^2-3x+2-2\sqrt{\quad} = 81x^2-18x$

$-2\sqrt{\quad} = 75x^2-15x+2$

$4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1) = (75x^2-15x+2)^2$

$4(9x^4+9x^3+3x^2-18x^3-18x^2-6x+6x^2+6x+2) =$

$=(75^2x^4-2\cdot75\cdot15x^3+2\cdot2\cdot75x^2+15^2x^2-2\cdot2\cdot15x+4)$

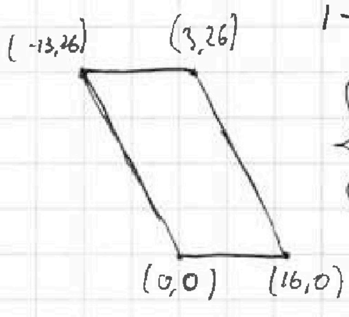
$4(9x^4-9x^3-9x^2+2) = 75^2x^4-30\cdot75x^3+4\cdot75x^2+15^2x^2-4\cdot15x+4$

$0 = x^4(75^2-36)-x^3(30\cdot75-36)+x^2(15^2+4\cdot75+36)-4\cdot15x-4$

1	1
2	4
~~3~~	~~0~~
4	7
5	7
~~6~~	~~0~~
7	4
8	1

$\frac{1+8}{1-7\cdot8+64} = \frac{9}{19} = 1$

$-\frac{64}{56}$
8



$\begin{cases} 45^2x^2+45 = 2\cdot13^2-2\cdot13^2\cos\alpha \\ 17^2x^2+49 = 2\cdot13^2-2\cdot13^2\cos\beta \\ 34^2x^2 = 2\cdot13^2-2\cdot13^2\cos(\alpha+\beta) \end{cases}$

$\cos\alpha = 1-\frac{49(1+x^2)}{2\cdot13^2}$

$\cos\beta = 1-\frac{49+17^2x^2}{2\cdot13^2}$

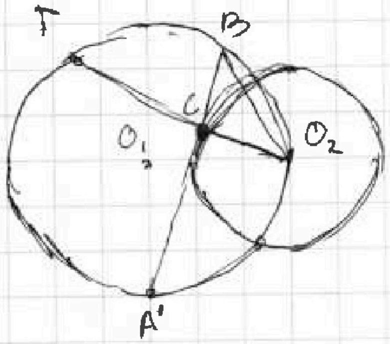
$34^2x^2 = 2\cdot13^2-2\cdot13^2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3



Пусть O_1 и O_2 - центры окружностей Ω и ω соотв.
Пусть T - вторая т. пересеч O_2C с Ω. Отметим т. A' так, что $\angle A'O_1O_2 = 90^\circ$.

Докажем, что это положение нашей т. A.
Т.к. при монотонном изменении угла $A'O_1O_2$, $\frac{AC}{CB}$ монотонно изменяется (при уменьш ($A' \to \omega \cap \Omega$) $\frac{AC}{CB} \to 0$; при увелич ($B \to \omega \cap \Omega$) $\frac{AC}{CB} \to \infty$)).
Значит только 1 расположение верное.

Т.к. $\angle A'O_1O_2 = 90^\circ$, то $A'O_2^2 = \cancel{\ } 13^2 = A'C^2 + CO_2^2 = A'C^2 + 7^2 = 17^2 + 7^2$. Отсюда $\angle A'BO_2 = \frac{\angle A'O_1O_2}{2} = 45^\circ$
$\Rightarrow \angle BCO_2 = 90^\circ \Rightarrow CB = CO_2 = 7$. $\Rightarrow \frac{A'B}{BC} = \frac{17}{7}$. $\Rightarrow$ A' - есть точка A. $\Rightarrow AB = AC + BC = 24$.

Ответ: $AB = 24$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

Наш параллелограмм имеет сторону, паралл Ox, и сторону, парал $y=-2x$.

Отсюда пусть $y_1 = y_2 \Rightarrow x_2 - x_1 = 7$.

$\Rightarrow$ на одной прямой возможно взять 10 или 9 точек (в зависимости от количества расположенных на прямой точек): 14 по 10 (13 по 9). Если $y_1 = y_2 + 2$, то $x_2 - x_1 = 8$.

Также на вариантов расположить ~~вдоль~~ эти точки паралл переносом вдоль 1 прямой: 10 или 9 ~~т.~~ (13 по 10, 12 по 9). Тогда ~~далее~~ заметим, что при увелич $y_1 - y_2$, мы передвигаемся вдоль стороны $\parallel$ $y=-2x$. $\Rightarrow$ на кажд гориз. выборе т. А кол-во вариантов будет одинакого.

$\Rightarrow$ таких случаев: $10\frac{14\cdot15}{2} + 9\frac{13\cdot14}{2} = 2385$

Также есть случаи, когда $y_2 > y_1$.

Тогда мы двигаемся уже вдоль прямой $k=2x$ (при изм разн. y_1 и y_2).

А значит, каждый раз кол-во вариантов паралл.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

переноса по горизонтали увеличивается на 2. (также присутствуют „нечётные" строки, где число целых т. на 1 меньше. самих строк также на 1 меньше).

Тогда число таких расстановок будет:

$13 \cdot 12 + 12 \cdot 11 + 12 \cdot 14 + 11 \cdot 13 + 11 \cdot 16 + 10 \cdot 15$

$13 \cdot 12 + 12 \cdot 25 + 11 \cdot 29 + 10 \cdot 15 = 925$

Тогда всего перестановок $2389 + 925 =$
$= 3314$

Ответ: 3314 пары.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

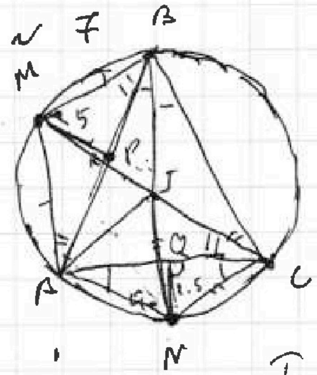
МФТИ

№6

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2+1)(x^2+(y-12)^2-16)\leq 0 \end{cases}$$

Чтобы выполнялось неравенство возможны 2 случая:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1\leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2-1\geq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\leq 0 \end{cases}$$



Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$, I - центр впис. окр.

P - середина AB, Q - середина AC.

Тогда: $\angle NAC = \angle ABN = \angle NBC = \angle ACN = \beta$;

$\angle MAB = \angle ACM = \angle MCB = \angle MBA = \gamma$

Тогда по лемме о трезубце:

$AN = NC = IN$; $AM = MB = MI$. $\angle ANB = 2\gamma$ (опир на дугу AB). ~~$AN = 2.5/\sin\beta$~~. $\angle IAN = \alpha + \gamma = 90 - \beta$

$\Rightarrow$ по т. синусов: $\frac{AI}{\sin 2\gamma} = \frac{AN}{\sin(90-\beta)}$, $AI = AN\frac{\sin 2\gamma}{\cos\beta}$.

$AN = \frac{2.5}{\sin\beta} \Rightarrow AI = \frac{2.5\cdot\sin 2\gamma}{\sin\beta\cos\beta} = 5\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}$. Аналогично

$AI = 10\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\gamma} \Rightarrow 5\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta} = 10\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\gamma} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{AC}{\sin 2\beta} = \frac{AB}{\sin 2\gamma} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$.

Т.к. $AN = NI$, $AM = MI$, то $AMIN$ - дельтоид $\Rightarrow$

$\Rightarrow AI \perp MN$. Также MN - серпер к AI

$\Rightarrow 2AN\cdot\sin\gamma = AI = 2AM\cdot\sin\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2.5\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{5\sin\beta}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin^2\gamma = 2\sin^2\beta \Rightarrow \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow MB = MA = \sqrt{2}\,AN = \sqrt{2}\,NC$, ~~AI~~.

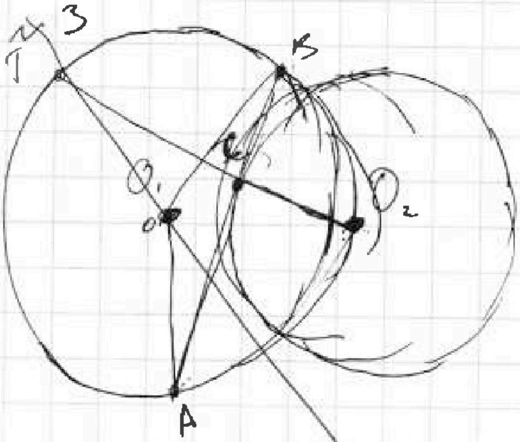
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 3



Пусть O_1 и O_2 центры окружностей Ω и ω соотв. Пусть т. T — второе пересечение прямой O_2C с Ω.

Тогда заметим, что ровно одна точка C на ω удовлетворяет равенству $AC/BC = \frac{17}{7}$ по дискр. непрерывности*. Докажем, что нам подходит т. C, такая, что $CT = 17$. Тогда степ. т. C отн $\Omega = -7 \cdot 17 = -x7 \cdot 17x \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 1 \Rightarrow AC = 17$, $CB = 7$. Докажем, что $\angle ACO_2 = 90^\circ$ (тогда AB касательная).

$AO_2 = \sqrt{AO_1^2 + O_1O_2^2} = 13\sqrt{2} = \sqrt{17^2 + 7^2} = \sqrt{338} = \sqrt{2 \cdot 169} = 13\sqrt{2}$. Значит, по т. ~~Пифагора~~ косинусов $\angle ACO_2 = 90^\circ$ ($\cos = 1$) $AC \perp CO_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow AB$ касательная к ω. А т.к. т. C подходит и она единственная, то $AB = AC + BC = 24$.

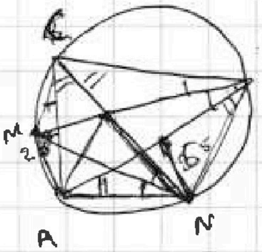
Ответ: 24

*если мы загоним т. A близко к т. пересеч Ω и ω, то $\frac{AC}{BC} \to 0$, если т. B, то $\frac{AC}{BC} \to \infty$. ~~При сдвигании т. A~~ при увелич $\angle O_2O_1A$ $\frac{AC}{BC}$ растёт. ~~от т. пересеч~~ $\frac{AC}{BC}$ растёт. (а функц. $\frac{AC}{BC}$ — непрерывна).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



B $\frac{5}{\sin\gamma}$ $\frac{2.5}{\sin\beta}$

$\frac{5}{\sin\gamma}\cdot\sin\beta = \frac{2.5\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}$

$2 = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}$

$2x_2^2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

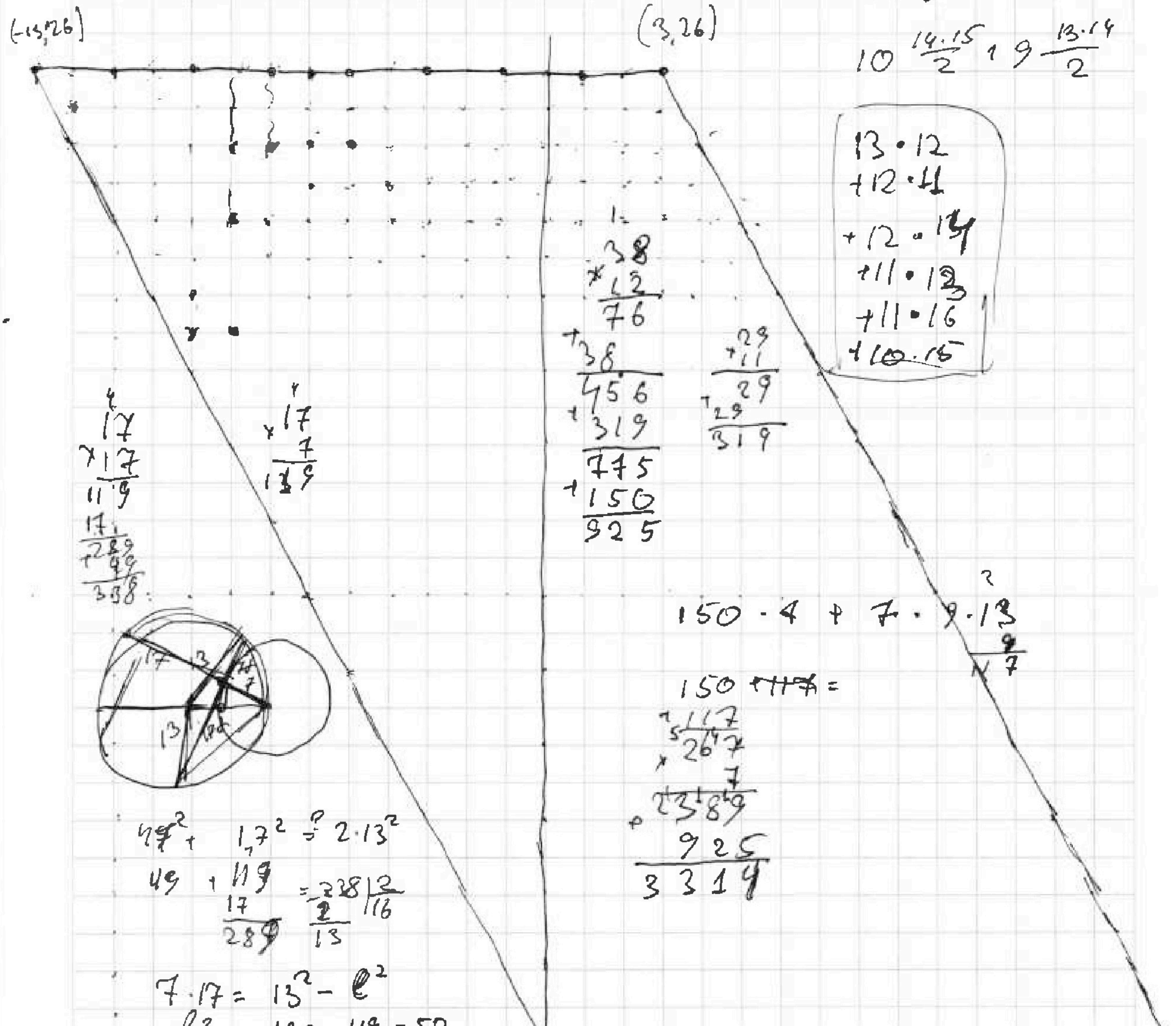
$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$

16
14 · 10
13 · 9

13 · 10
12 · 9

$10\ \frac{14\cdot 15}{2}\ 1\ 9\ \frac{13\cdot 14}{2}$

13 · 12
+12 · 11
+12 · 14
+11 · 13
+11 · 16
+10 · 15



38 × 12 = 76, 38 → 456
456 + 319 = 775
775 + 150 = 925

29 × 11 = 29, 29 → 319

17 × 17 = 119, 17 → 289
289 + 99 = 388

17 × 7 = 119

$150\cdot 4 + 7\cdot 9\cdot 13$

$9 \times 13 = 117$

$150 + 117 =$

117 → 267
267 × 7 = 2389
2389 + 925 = 3314

$49^2 + 1{,}7^2 \stackrel{?}{=} 2\cdot 13^2$

$49 + 119$

$238 : 2 = 116$

$17^2 = 289$

$2 \cdot 13$

$7\cdot 17 = 13^2 - \ell^2$

$\ell^2 = 169 - 119 = 50$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

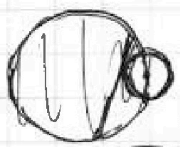
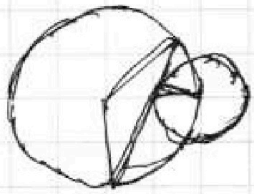
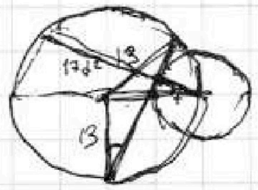
$$24^2x^2 = 2\cdot13^2 - 2\cdot13^2\left(\frac{2\cdot13^2-49-49x^2}{2\cdot13^2}\cdot\frac{2\cdot13^2-49-17^2x^2}{2\cdot13^2} - \sqrt{\left(1-\left(\frac{2\cdot13^2-49-49x^2}{2\cdot13^2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{2\cdot13^2-49-17^2x^2}{2\cdot13^2}\right)^2\right)}\right)$$

$$\cos^2\gamma = \frac{\cos^2\beta}{2-\cos^2\beta}$$

$$24^2x^2 = 2\cdot13^2 - \cancel{2\cdot13^2}\left(\frac{2\cdot13^2-49-49x^2}{2\cdot13^2}\cdot\frac{2\cdot13^2-49-17^2x^2}{\cancel{2\cdot13^2}} - \frac{\sqrt{4\cdot13^4-(2\cdot13^2-49-49x^2)^2}}{2\cdot13^2}\cdot\frac{\sqrt{4\cdot13^4-(2\cdot13^2-49-17^2x^2)^2}}{\cancel{2\cdot13^2}}\right)$$

$13+6=19$

$$2\cdot13^2\cdot24^2x^2 = 4\cdot13^4 - (2\cdot13^2-49-49x^2)(2\cdot13^2-49-17^2x^2) - \sqrt{(4\cdot13^4-(2\cdot13^2-49-49x^2)^2)(4\cdot13^4-(2\cdot13^2-49-17^2x^2)^2)}$$

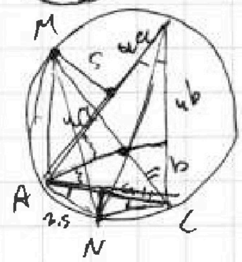




$\cancel{7\alpha\cdot17\alpha = 7\cdot y}$

$17x^2 = y$

$\cancel{7}\alpha\cdot17\alpha = \cancel{7}\cdot\beta$

$\beta = 17\alpha^2$



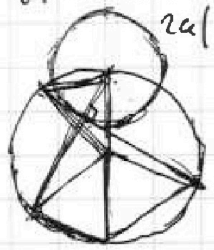
$AB = \frac{10\cos\gamma}{\sin\gamma}$ $\quad AN = \frac{2.5}{\sin\beta}$

$AN = \frac{AC}{2\cos\beta}$

$AM = \frac{AB}{2\cos\gamma} = \frac{5}{\sin\gamma}$ $\quad \frac{AC}{2\cos\beta} = \frac{2.5}{\sin\beta}$

$\frac{AI}{\sin2\gamma} = \frac{AM}{\sin(90-\beta)} = \frac{AM}{\cos\beta} = \frac{AB}{2\cos\gamma\cos\beta}$ $\quad AC = \frac{5}{tg\beta}$

$AB = \frac{10}{tg\gamma}$



$AI = \frac{AB\sin2\gamma}{2\cos\gamma\cos\beta} = \frac{10\cdot\sin2\gamma}{2\cos\gamma\cos\beta\, tg\gamma} =$

$= \frac{10\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\gamma\cos\beta\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}} = 10\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} = 5\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$

$\boxed{tg\gamma = 2tg\beta}$

$7+17\alpha^2$

$\frac{AI}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(90+\gamma)} = AB\frac{\sin\beta}{\cos\gamma} = 10\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ $\quad 5\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 10\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$

$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = 2\sqrt{\frac{1-\cos^2\beta}{1-\cos^2\gamma}}$ $\quad \cos^2\beta - \cos^2\beta\cos^2\gamma = 2(\cos^2\gamma - \cos^2\beta\cos^2\gamma)$

$\cos^2\beta = 2\cos^2\gamma - \cos^2\beta\cos^2\gamma$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{(x-1)(3x-2)-x} - \sqrt{(x+1)(3x+1)-x} = 1-9x$

15 17 23

$\frac{11+18+39}{2} =$

$a+b \geq 15$

$b+c \geq 17$

$c+a \geq 23$

$a+b+c \geq \left\lceil \frac{15+17+23}{2} \right\rceil = \frac{56}{2} = 28$

$CP(CP+5) = AC \cdot CB$

$BQ(BQ+2.5) = \underset{AC\sqrt{2}}{AB} \cdot CB$

10 5

$\sqrt{2} \cdot CP(CP+5) = BQ(BQ+2.5)$

$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$

$\cancel{b = \frac{ax+y}{8}}$

$\cancel{x^4 + x^2(y-12)^2 - 16x^2 + x^2y^2 + y^2(y-12)^2 - 16y^2}$

$\cancel{-x^2-(y+12)^2+16 \leq 0}$

$\cancel{x^4 + x^2y^2 - 24yx^2 + 144x^2}$

$x^2+y^2-1 \leq 0$

$x^2+(y-12)^2-16 \geq 0$

$x^2+y^2-24y+144-16 \geq 0$

$x^2+y^2-1-24y+129 \geq 0$

$24y \leq 129$

$y \leq \frac{129}{24} = \frac{43}{8}$

$|y| \leq 1$

$x^2+y^2-1 \geq 0$

$x^2+(y-12)^2-16 \leq 0$

$x^2+y^2-24y+144-16 \leq 0$

$24y \geq 129$

$y \geq \frac{43}{8}$