



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$x/n \rightarrow x$ делится на n

$ab/2^{14} 7^{10}$

если умножить $ab \cdot bc$, то оно будет делиться на

$bc/2^{17} 7^{17}$

$$2^{14} 7^{10} \cdot 2^{17} 7^{17} = 2^{31} 7^{27}$$

$ac/2^{20} 7^{37}$

после умножения abc^2 на ac оно будет делиться

$abc \cdot \min^{-7}$

на $2^{31} 7^{27} \cdot 2^{20} 7^{37} = 2^{51} 7^{64}$

$a^2 b^2 c^2$ делится на $2^{51} 7^{64}$, но 7^{51} не делится

на 2, поэтому нельзя сразу взять корень ^{т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$}

если $a^2 b^2 c^2$ делится на 2^{50} , то и 50-макс. степень

факты в делителе, то $a^2 b^2 c^2$ не делится на 2^{51}

если $a^2 b^2 c^2$ делится на 2^{52} , то все условия

выполняются $a^2 bc / 2^{52} 7^{64}$

$$abc / 2^{26} 7^{32}$$

тогда abc мин. если оно равно $2^{26} 7^{32}$

Ответ: $abc = 2^{26} 7^{32}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

$a \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$b \in \mathbb{N}$

$\frac{a}{b}$ несократима

если числитель сократим на m , то

m_{\max}

$$a+b = km, \text{ где } k \in \mathbb{N}$$

$$(a+b)^2 - 8ab = k^2 m^2 - 8ab$$

$k^2 m^2 - 8ab$ должно делиться на m , тогда

$8ab$ должно делиться на m

~~если ab~~ если $\frac{a}{b}$ несократима, то они не имеют общих

простых множителей. тогда если ab делится на

m , то в m есть: только множителем a (1)
только множителем b (2) ~~или~~
множителем и a и b (3)

если (1), то $a+b$ не делится на m , аналогично (2) и (3)

~~так~~ следовательно если $8ab$ делится на m , а ab нет,

то $m_{\max} = 8$

Ответ: $m_{\max} = 8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

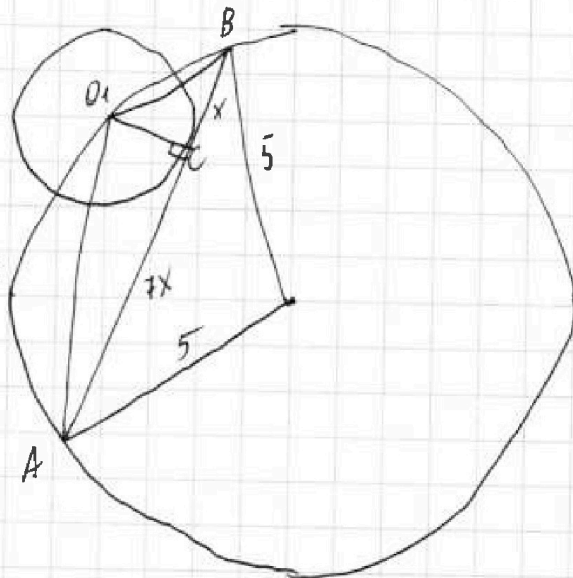
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3
Дано
 $\frac{AC}{CB} = 7$
 $\Gamma_O = 1$
 $\Gamma_B = 5$
AB-?

Пусть $BC = x$ $AC = 7x$
 $\sin \angle O_1BC = \frac{O_1C}{\sqrt{O_1C^2 + x^2}} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
по т. Пифагора для $\triangle O_1BC$



по теореме синусов для

$\triangle AO_1B$

$$\frac{AO_1}{\sin \angle O_1BC} = 2R, \text{ а } R \text{ ок. окр} = 5$$

$$AO_1 \sqrt{x^2 + 1} = 10 \quad \text{т. пифагора для } \triangle AO_1C$$

$$AO_1 = \sqrt{O_1C^2 + AC^2} = \sqrt{1 + 49x^2}$$

$$\sqrt{1 + 49x^2} \sqrt{x^2 + 1} = 10$$

$$(1 + 49x^2)(x^2 + 1) = 100 \Rightarrow 49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \quad x^2 = t$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0 \quad t = 1, \text{ второе } t < 0 \text{ т.к. вершина}$$

параболы $t_2 = \frac{-50}{98}$, а следовательно t_2 левее на оси.

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$AB = 7x + x = 8x = 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

14

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 + 2 - 7x$$

$$D = 4 - 8 = -4$$

$$D < 0$$

$$2 - 7x = t \quad 2x^2 + 2x + 1 = n$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$\sqrt{n+t} - \sqrt{n} = t$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$\sqrt{n+t} = t + \sqrt{n} \Rightarrow t > 0$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1,5 \\ 1 \end{cases}$$

$$n+t = t^2 + 2\sqrt{n}t + n$$

$$x > 1 \quad x \leq 1 \cup x \geq 1,5$$

$$t^2 + 2\sqrt{n}t - t = 0$$

$$t(t + 2\sqrt{n} - 1) = 0 \Rightarrow t = 0 \quad t + 2\sqrt{n} - 1 = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow 2 - 7x = 0$$

$$2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 1 = 0$$

$$x = \frac{2}{7} \quad 6 \text{ O } 23$$

$$4(2x^2 + 2x + 1) = (7x - 1)^2$$

$$44x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x_6 = \frac{11}{44}$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 44 = 976$$

$$\sqrt{D} = 4\sqrt{61}$$

$$x = \frac{11 \pm 4\sqrt{61}}{44} \quad 6 \text{ O } 23$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{61}}{11} \quad x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7} \quad x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печка QR-кода недопустима!

№5

Дано

$P(-12; 24)$

точки P и O лежат на прямой $y_1 = -2x_1 + 12$

$Q(0; 0)$

тогда если другая прямая будет $y_2 = -2x_2 + 12$,⁽²⁾

$R(3; 24)$

то $y_2 - y_1 = -2x_2 + 2x_1 + 12$

$R(15; 0)$

$$y_2 + 2x_2 - y_1 - 2x_1 = 12$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$n = ?$

зато это и есть наше условие.

получается, что если A и B лежат на этих двух прямых и B на (2), а A на (1), то условие всегда выполняется. на $y_1 = -2x_1$ в пределах фигуры:

$(0; 0)$ ~~$(-1; 2)$~~ $(-1; 2)$ $(-2; 4)$... $(-12; 24)$ 13 точек.

столько же на второй. тогда количество пар

$$13 \cdot 13 = 169.$$

ур. прямой QR $y_3 = -2x_3 + 30$ (3)

тогда если $y_4 = -2x_4 + 18$,⁽⁴⁾ то ситуация повторяет.

но B теперь на y_3 ,^{(3) прямая} а A на (4). $n = 169 + 169 = 338$

Ответ: $n = 338$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если внутренними образцами

$$\triangle ACO_1 \sim \triangle BCO_2$$

$$\frac{O_1C}{O_2C} = \frac{1}{2} \quad O_1C = x$$
$$O_2C = 2x$$

$$O_1O_2 = 3x = 8$$

$$x = \frac{8}{3} \Rightarrow CO_2 = \frac{16}{3}$$

$$\beta = \angle CBO_2 = \angle CO_2B \quad \cos \beta = \frac{2 \cdot 3}{16} = \frac{3}{8} \quad \text{из } \triangle CBO_2$$

$$\angle CBO_2 = \angle BDO_2 \quad \angle CO_2B = \angle BDO_2 = \beta$$

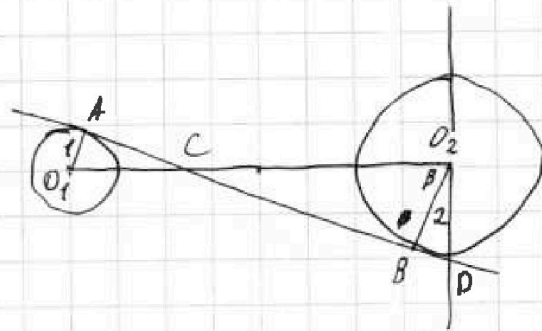
$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\text{из } \triangle DBO_2 \quad DO_2 = \frac{BO_2}{\sin \beta} = \frac{2 \cdot 8}{\sqrt{55}} \quad DO_2 = -10b$$

$$a = \frac{10}{16} \quad b = -\frac{1}{\sqrt{55}} \quad \text{и аналогично касательная „снизу вверх“}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{55}} \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

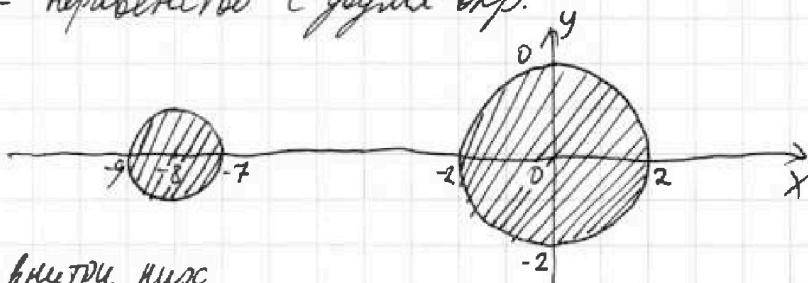
Дано
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) - прямая (2) - неравенство с двумя окр.

$$(x+8)^2 + y^2 = 1^2$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$



и это выполняется только внутри них

тогда 2 решения если эта прямая касается этих

двух окр. : если внешним образом, то

$$\cos \alpha = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8} \text{ тогда } EA = 8$$

$$E(-16; 0)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$\text{при } x=0 \quad y=10b \Rightarrow MD = 10b$$

$$10b = \frac{2}{\sin \alpha} \text{ из } \triangle MDC$$

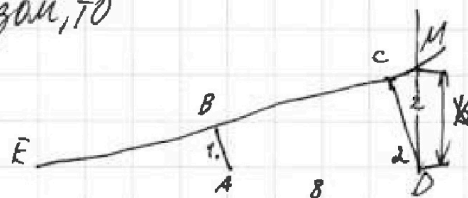
$$10b = \frac{16}{\sqrt{63}}$$

график через E $\Rightarrow y = ax + 10b \quad 0 = -16a + 10b$

$$a = \frac{10b}{16} = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

и если снизу идет касательная,

$$\text{то } a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода не обязательна!

№7

Дано

$$\angle AM = \angle MB \Rightarrow$$

$$\angle AM = \angle MB$$

$$AE = EB$$

$$\angle AN = \angle NC$$

$$\angle AN = \angle NC \Rightarrow$$

$$ME = 4,5$$

$$\Rightarrow AH = HC$$

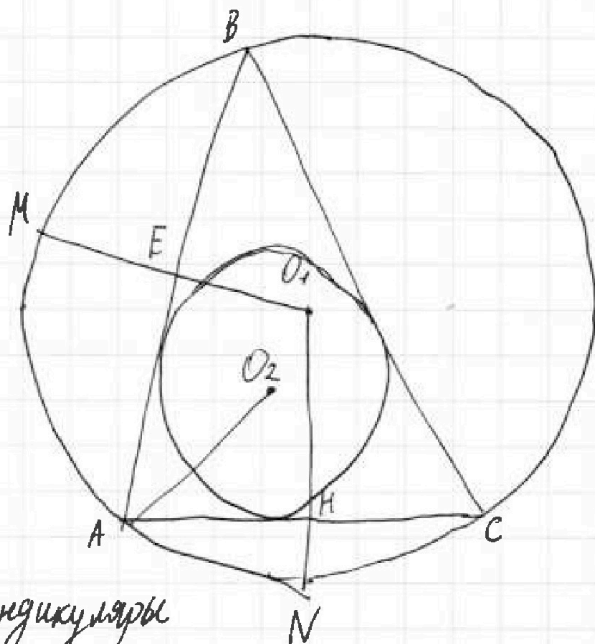
$$NH = 2$$

тогда ME и NH

$$AO_2 = ?$$

серединные перпендикуляры

и пересек. в центре описанной окр.



O_2 - центр ~~биссектрис~~ впис. окр $\Rightarrow O_2$ - пересечение биссектрис.

$\angle AM = \angle MB \Rightarrow M$ лежит на CO_2 . аналогично N на BO_2

по теореме $BO_2 = 2O_2H$ $CO_2 = 2O_2E$

$$BO_2 = 2(R - 4,5) = 2R - 9 \quad CO_2 = 2(R - 2) = 2R - 4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.
 Отметьте крестиком номер задачи,
 решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
 страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2 - 7x = t$$

$$2x^2 + 2x + t = n$$

$$\sqrt{n+t} - \sqrt{n} = t$$

$$\sqrt{n+t} = t + \sqrt{n}$$

$$n+t = t^2 + 2\sqrt{n}t + n$$

$$t = t^2 + 2\sqrt{n}t$$

$$t^2 + t(\sqrt{n} - 2) = 0 \quad t^2 + t(2\sqrt{n} - 1) = 0$$

$$t + 2\sqrt{n} - 1 = 0$$

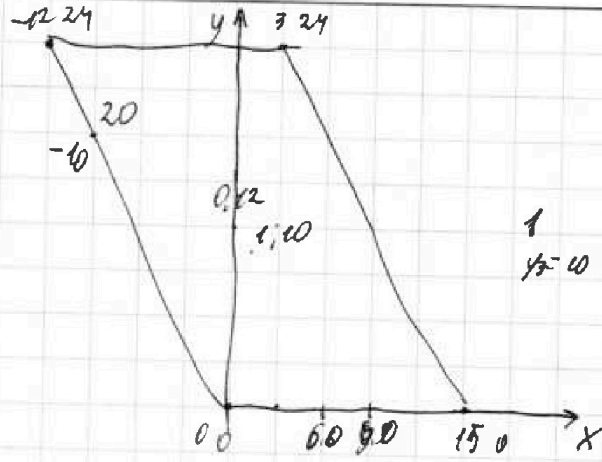
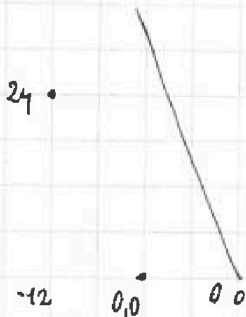
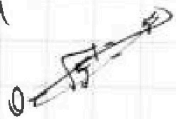
$$2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1 = 0$$

$$4(2x^2 + 2x + 1) = 7x - 1$$

~~$$\sqrt{n} - \sqrt{n+t} = t$$~~

~~4x^2~~

~~7x-1~~



$$y_1 = 2x$$

$$y_2 = -2(x - 15) = -2x + 30$$

$$t = 0 \quad t(t + 2\sqrt{n} - 1) = 0$$

$$2 \times 2 - 2 \times 1 + 4 \times 2 - 4 \times 1 = 12$$

$$y_2 - y_1 = -2x_2 + 30 + 2x_1$$

$$2x_2 + 2x_1 + y_2 - y_1 = 30$$

$$y_3 = -2x + 30$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 11$$

$$y_3 = -2x + 12$$

$$4x^2 - 22x + 3$$

$$y_3 = -2(x - 6)$$

$$\frac{y_1 + y_2}{y_1} = \dots$$

A BC

D CE

AD BD CD

AC BC C

AE BE

$$2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 12 - 0 = 12$$

$$0 + 2 \cdot 12 + 12 - 24 = 12$$

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 10 + 10 - 20 = 2 + 20 + 10 - 20 = 12$$

- 0 0
 -1 2
 -2 4
 -3 6
 -4 8
 -5

13 70 202

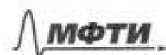
13 70 202

169

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &= 2^{14} \cdot 7^{20} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &= 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$$b^2 = 2^{14+17-20} \cdot 7^{10+17-37} = 2^7 \cdot 7^{-10}$$

7 не может быть

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = 2^{14+20-17} \cdot 7^{37+10-17}$$

$$a^2 = 2^{17} \cdot 7^{30}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{20}$$

$b \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} ab &= 2^{14} \cdot 7^{20} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &= 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$$c^2 = 2^{20+17-14} \cdot 7^{37+17-10} = 2^{23} \cdot 7^{44}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{17+14+23} \cdot 7^{30+20+44} = 2^{54} \cdot 7^{94}$$

$$abc = 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{b} = \frac{a+b}{b}$$

$$(a+b) / m \Rightarrow a+b = km$$

$$a^2 - 6ab + b^2 / m$$

$$(a-b)^2 - 4ab$$

$$(a+b)^2 - 8ab \quad | m$$

$$k^2 m^2 - 8ab \quad | m$$

$$\frac{a}{b} = \frac{60 \cdot 8}{580} = \frac{6}{59}$$

$$a = 6b + t$$

$$8ab \quad | m$$

$$8(6b+t)b$$

$$8(6b^2 + 8tb)$$

$$\frac{16}{256-504}$$

$$\frac{16}{248}$$

$$\frac{8}{124}$$

$$\frac{4}{62}$$

$$\frac{2}{31}$$



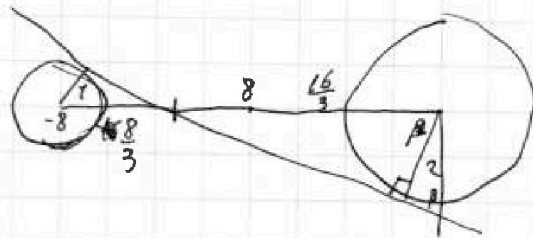
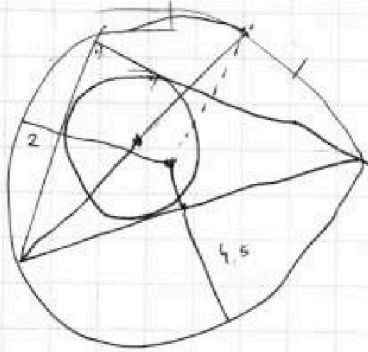
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

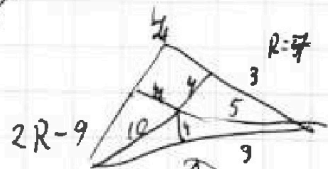


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

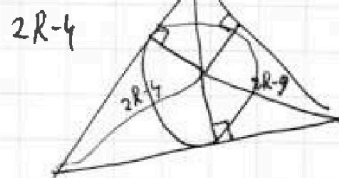


$$\begin{aligned} 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \beta = \frac{2 \cdot 3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$



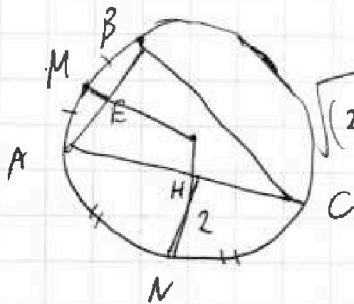
$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$



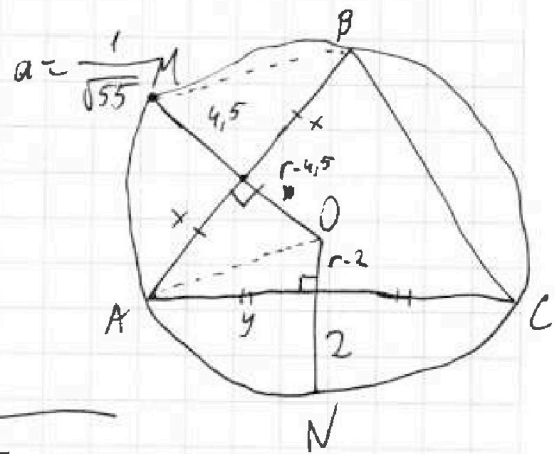
$$\frac{2 \cdot 8}{\sqrt{55}} = \frac{16}{\sqrt{55}}$$



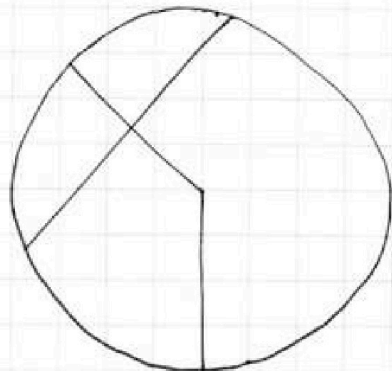
$$ME = 4,5$$



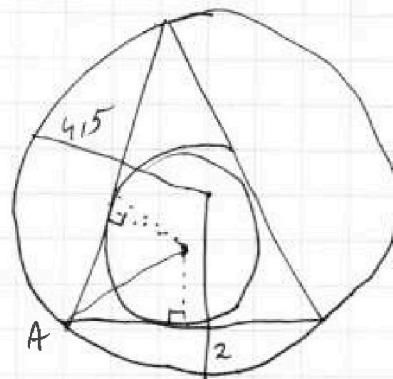
$$\sqrt{(2R-4)^2 + r^2}$$



$$x^2 + (r-4,5)^2 = y^2 + (r-2)^2$$



R r-?



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

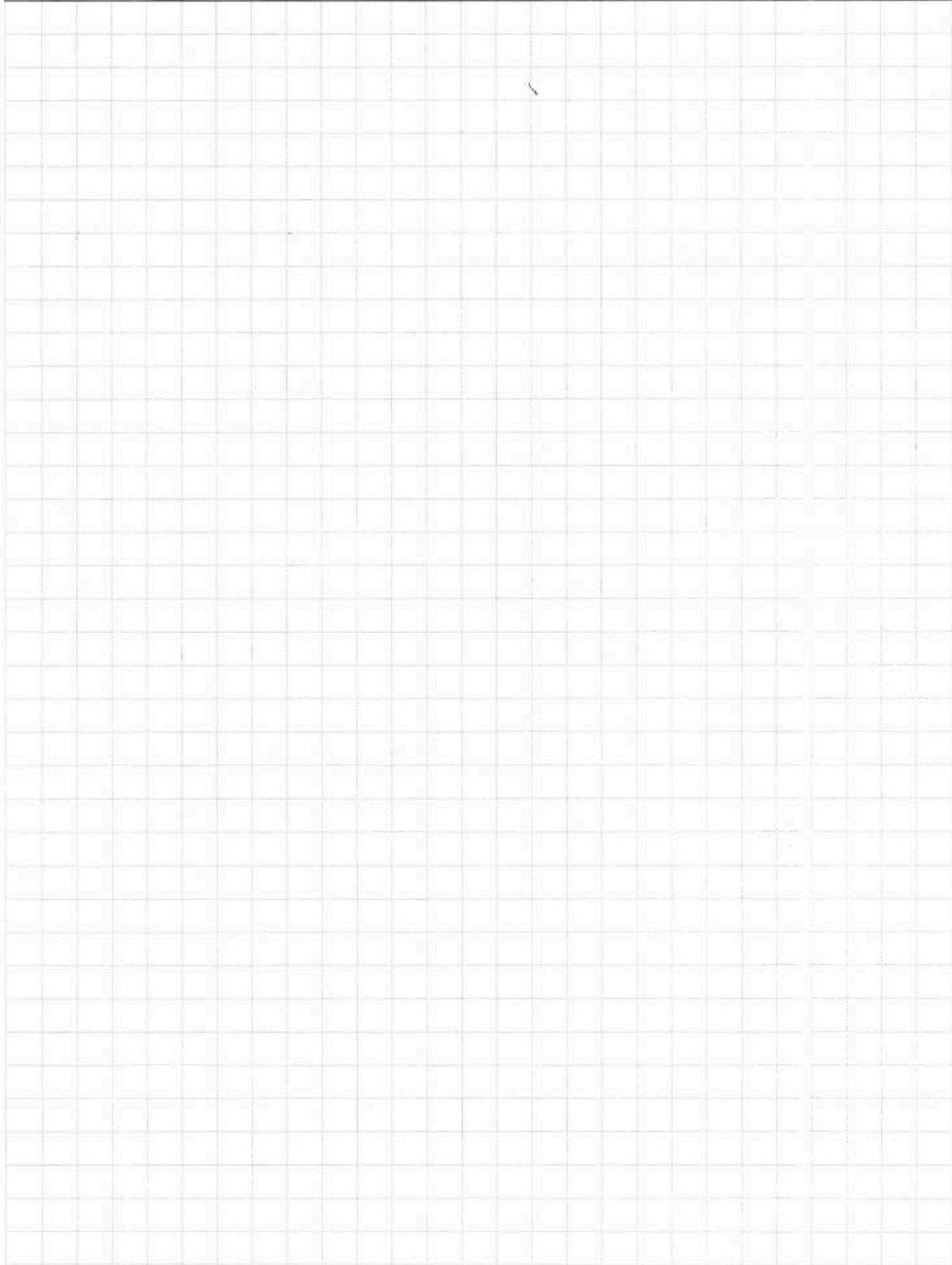
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6

$$ax - y + 10b = 0$$

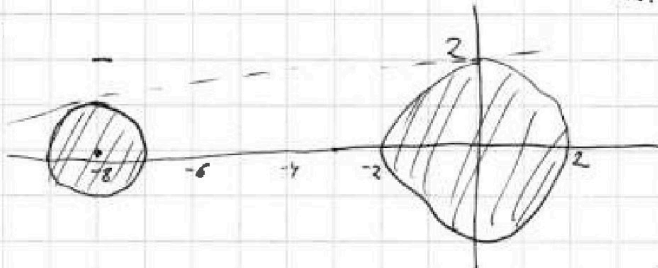
$$y = \sqrt{4-a^2} + \frac{1}{2\sqrt{4-a^2}} |x-a|$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$\theta = \sqrt{4-a^2} + \frac{-16}{2\sqrt{4-a^2}} + \frac{a}{2\sqrt{4-a^2}}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$x = -8 \quad y = 0$$



$$y = ax + 10b$$

касание сверху и снизу

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{63}{64}}$$

$$y = \sqrt{4-x^2}$$

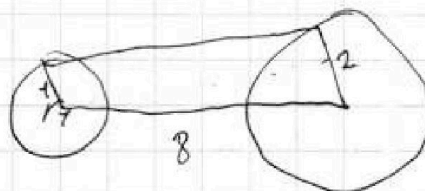
$$y' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{8}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{64}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{8}$$

$$x = -16 \quad y = 0$$

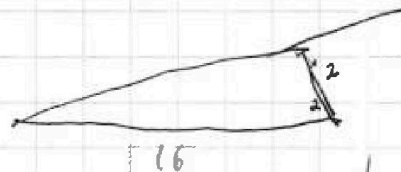


$$2 \cdot \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{\sqrt{63}}{4}$$

$$0 = -16a + 10b$$

$$a = \frac{10}{16} b$$

$$a = \frac{10}{\sqrt{63}}$$



$$2 \cdot \frac{8}{\sqrt{63}} = \frac{16}{\sqrt{63}}$$

