МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

Задача 1.

Пусть 2 число a 2 входит в степени α_1, в число b в степени α_2 и в число c в степени α_3.

Тогда т.к. $ab \vdots 2^{15} \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2 \geq 15$ $bc \vdots 2^{17} \Rightarrow \alpha_2+\alpha_3 \geq 17$

и $ac \vdots 2^{23} \Rightarrow \alpha_1+\alpha_3 \geq 23$ $\Rightarrow 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geq 15+17+23 = 55$

~~Итак~~ $\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 27{,}5$

Т.к. a, b, c - натуральные числа то $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ должны быть целыми неотрицательными числами

$\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 28$

~~Нам подходит~~ Т.к. нам нужно наименьшее возможное abc $\Rightarrow$ мы хотим чтобы $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ было наименьшим из возможных $\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 28$ ~~Нам подходит~~ При $\alpha_1 = 11$ $\alpha_2 = 4$ $\alpha_3 = 13$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 28$ и условие с делимостью выполняется

Пусть 7 входит в число a в степени β_1; в число b в степени β_2 и в число c в степени β_3

Также как и $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ должны быть целыми неотрицательными числами и:

$\beta_1+\beta_2 \geq 11$; $\beta_2+\beta_3 \geq 18$ и $\beta_1+\beta_3 \geq 39$ $\Rightarrow 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \geq 11+18+39 = 68$

$\Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 34$ но заметим, что $\beta_1+\beta_3 \geq 39$ и $\beta_2 \geq 0 \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 39$

Т.к. нам нужно наименьшее возможное abc, то мы хотим чтобы $\beta_1+\beta_2+\beta_3$ было наименьшим из возможных $\Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3 = 39$

При $\beta_1 = 16$ $\beta_2 = 0$ $\beta_3 = 23$ условие выполняется

Т.к. нам нужно наименьшее abc то a, b и c не должны делится на какие-то простые числа кроме 2 и 7

$\Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow$ Наименьшее возможное $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

и это ~~достигается при~~ можно получить при

$a = 2^{11} 7^{16}$ $b = 2^4$ $c = 2^{13} 7^{23}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача N2

$a^2-7ab+b^2 = a^2+2ab+b^2-9ab = (a+b)^2-9ab$

$\Rightarrow \dfrac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \dfrac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$

Если $a+b$ делится на m, то и $(a+b)^2$ делится на m

$\Rightarrow$ Чтобы мы могли сократить на m тогда $(a+b)^2-9ab$ делится на m $\Rightarrow$ и $9ab$ делится на m

Т.к. нам нужно наибольшее $m \Rightarrow m = \text{НОД}(a+b; 9ab)$

Пусть $a = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ $b = q_1^{\beta_1}\cdot q_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot q_m^{\beta_m}$ где p_i и q_i это простые числа
т.к. $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь, то никакое из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ не равно никакому из чисел $q_1, q_2, \ldots, q_m$

Заметим что тогда m не может делится ни на какое из чисел $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2 \ldots q_m$. Так как:
Пусть m делится на какое-то из этих чисел, без ограничение общности скажем, что на p_1
Тогда т.к. $a+b \vdots m$ то $a+b \vdots p_1$ заметим что $a \vdots p_1$ но тогда и $b \vdots p_1$ а такого быть не может
$\Rightarrow m$ не делится ни на какое из чисел $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2 \ldots q_m$
т.к. $9ab \vdots m$ и $m \not\vdots\, p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2 \ldots q_m$ $\Rightarrow$ наибольшее возможное $m = 9$
Пример чисел a и b когда $m=9$ $a=1$ $b=8$
$\frac{a}{b} = \frac{1}{8}$ - несократимая дробь $\dfrac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \dfrac{9}{9}$ в этом случае $m=9$

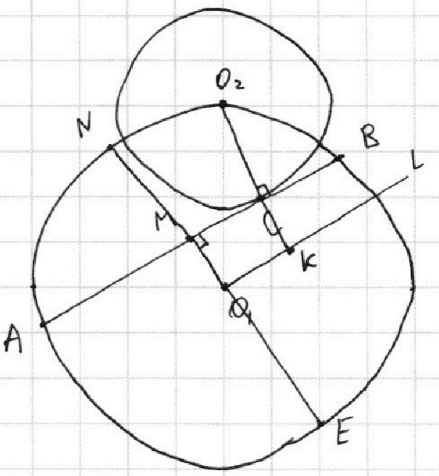
Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.



Пусть $AC = 17x$ и $CB = 7x$

Пусть O_1 центр окружности Ω

O_2 центр окружности ω

$O_2C = 7$

Опустим из O_1 перпендикуляр на AB получим точку M. т.к. O_1 центр окружности $\Rightarrow AM = BM = \frac{17x+7x}{2} = 12x$

$\Rightarrow CM = 5x$

Запишем теорему Пифагора для $\triangle O_1MA$

$AM^2 + O_1M^2 = AO_1^2$

Проведем из O_1 прямую $l \parallel AB$ Пусть $O_2C \cap l = k$

$O_1k \parallel O_1M \Rightarrow O_1MCk$ - прямоугольник $\Rightarrow Ck = O_1M = y \quad O_1k = CM = 5x$

Запишем теорему Пифагора для $\triangle O_1O_2k \quad O_1k^2 + O_2k^2 = O_1O_2^2$

$O_1O_2 = O_1A$

$\Rightarrow AM^2 + O_1M^2 = O_1k^2 + O_2k^2 \quad \Rightarrow 144x^2 + y^2 = 25x^2 + 49 + y^2 + 14y$

$\Rightarrow 119x^2 - 14y = 49 \quad \Rightarrow 17x^2 - 2y = 7 \quad \cancel{y = \frac{17x^2 - 7}{2}} \quad x^2 = \frac{7+2y}{17}$

$\triangle NMA \sim \triangle BME$

$\Rightarrow \frac{NM}{BM} = \frac{MA}{ME} \Rightarrow \frac{13-y}{12x} = \frac{12x}{13+y} \Rightarrow 144x^2 = 169 - y^2$

$\cancel{y^2 = \frac{289x^4 + 49 - 238x^2}{4}} \quad \cancel{\Rightarrow 576x^2 = 676 - 289x^4 - 49 + 238x^2}$

$\cancel{\Rightarrow 289x^4 + 338x^2 - 627 = 0}$

$\Rightarrow 144 \cdot \frac{7+2y}{17} = 169 - y^2 \quad \Rightarrow 1008 + 288y = 2873 - 17y^2$

$17y^2 + 288y - 1865 = 0 \qquad D = 288^2 + 4 \cdot 17 \cdot 1865 = 209764 = 458^2$

$y > 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-288 + 458}{2 \cdot 17} = \frac{170}{34} = 5$

$x^2 = \frac{7 + 2 \cdot 5}{17} = \frac{17}{17} = 1 \qquad x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = 1$

$AB = 24x = 24$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4.

Заметим что $(3x^2-6x+2)-(3x^2+3x+1)=1-9x$

обозначим $3x^2-6x+2=a$ $\quad 3x^2+3x+1=b$ $\quad (a, b \geq 0)$

Получим что $\sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b$ $\quad a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

Тогда есть 2 случая

1 случай. $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$

$\Rightarrow \sqrt{a}=\sqrt{b} \Rightarrow a=b \Rightarrow 3x^2-6x+2=3x^2+3x+1 \Rightarrow 9x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{9}$

2 случай: $\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq 0 \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}=1$

$\Rightarrow \sqrt{3x^2-6x+2}=1-\sqrt{3x^2+3x+1}$ возведем обе части в квадрат:

$3x^2-6x+2=3x^2+3x+2-2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2+3x+1}=9x$ возведем обе части в квадрат:

$12x^2+12x+4=81x^2$

$69x^2-12x\cancel{+}-4=0$

$D=12^2+4\cdot4\cdot69=16\cdot9+16\cdot69=16\cdot78$

$x_1=\frac{12-4\sqrt{78}}{2\cdot69}=\frac{6-2\sqrt{78}}{69}$ $\quad x_2=\frac{12+4\sqrt{78}}{2\cdot69}=\frac{6+2\sqrt{78}}{69}$

Мы получили 3 корня: $\frac{1}{9}$; $\cancel{6}\ \frac{6-2\sqrt{78}}{69}$; $\frac{6+2\sqrt{78}}{69}$

~~Подставим их в выражения $3x^2-6x$~~ Проверим будут ли с этими корнями выражения $3x^2-6x+2$ и $3x^2+3x+1 \geq 0$

$3\cdot\frac{1}{81}-6\cdot\frac{1}{9}+2=\frac{1}{27}-\frac{2}{3}+2=\frac{1-18+54}{27}=\frac{37}{27}>0$

$3\cdot\frac{1}{81}+3\cdot\frac{1}{9}+1>0$ т.к. все слагаемые больше 0

$3\cdot\left(\frac{6-2\sqrt{78}}{69}\right)^2-6\cdot\frac{6-2\sqrt{78}}{69}+2>0$ т.к. $3\cdot\left(\frac{6-2\sqrt{78}}{69}\right)^2>0$ и $2>0$ $\quad \frac{6-2\sqrt{78}}{69}<0 \Rightarrow -6\cdot\frac{6-2\sqrt{78}}{69}>0$

$3\cdot\frac{6-2\sqrt{78}}{69}=\frac{6-2\sqrt{78}}{21}>-1 \Rightarrow 3\cdot\frac{6-2\sqrt{78}}{69}+1>0 \Rightarrow 3\cdot\left(\frac{6-2\sqrt{78}}{69}\right)^2+3\cdot\frac{6-2\sqrt{78}}{69}+1>0$

корнями уравнения $3x^2-6x+2$ будут числа $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

Заметим что $\frac{3-\sqrt{3}}{3}<\frac{6+2\sqrt{78}}{69}<\frac{3+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ т.к. $3x^2-6x+2$ возраст. функция

$\Rightarrow 3\cdot\left(\frac{6+2\sqrt{78}}{69}\right)-6\cdot\left(\frac{6+2\sqrt{78}}{69}\right)+2<0 \Rightarrow \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$ не подходит

Ответ: $\frac{1}{9}$; $\frac{6-2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5.

Найдем функцию для прямой OP и прямой QR

$y_{OP} = kx + b$ в точке O $0 \cdot k + b = 0 \Rightarrow b = 0$

в точке P $-13 \cdot k = 26 \Rightarrow k = -2$

$y_{OP} = -2x$

т.к. OPQR - параллелограмм $\Rightarrow OP \parallel QR \Rightarrow k_{OP} = k_{QR} = -2$

$\Rightarrow y_{QR} = -2x + b$ в точке R. $-2 \cdot 16 + b = 0 \Rightarrow b = 32$

$y_{QR} = -2x + 32$

Пусть мы выбрали $x_1 y_1$ тогда выразим $y_2 = -2x_2 + (14 + 2x_1 + y_1)$

$14 + 2x_1 + y_1$ это какое-то число $\Rightarrow$ ~~прямая~~ т.к. коэффициент при $x_2 = -2$ то прямая на которой будут лежать точки $x_2\ y_2$ с заданными $x_1\ y_1$ будет параллельна OP и QR

$\Rightarrow$ т.к. точки лежат внутри параллелограмма или на границе

$\Rightarrow 0 \le 14 + 2x_1 + y_1 \le 32 \Rightarrow -14 \le 2x_1 + y_1 \le 18$

Пусть $\underbrace{y_1 + 2x_1 = a}_{-14 \le a \le 18}$ тогда $y_1 = -2x_1 + a$

Тогда прямая на которой лежат нужные нам x_1, y_1 также параллельна OP и QR т.к. коэффициент при $x_1 = -2$

$\Rightarrow 0 \le a \le 32$ и $-14 \le a \le 18 \Rightarrow 0 \le a \le 18$

$\Rightarrow 0 \le y_1 + 2x_1 \le 18$ $\quad y_2 + 2x_2 = 14 + 2x_1 + y_1 \Rightarrow 14 \le y_2 + 2x_2 \le 32$

$26 \ge y_1 \ge 0 \Rightarrow -13 \le x_1 \le 9$ $\quad 0 \le y_2 \le 26 \Rightarrow -6 \le x_2 \le 16$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

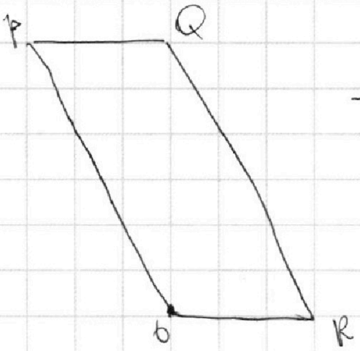
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 458 \\ \times\ 458 \\ \hline 3664 \\ +\ 2290 \\ 1832 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha = \frac{25}{50+10x} = \frac{5}{10+2x} = \frac{5}{5+x}$



$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 14 \\ \hline 68 \\ 17 \\ \hline 238 \end{array} + \begin{array}{r} 16 \\ \times\ 13 \\ \hline 48 \\ 16 \\ \hline 208 \end{array} = \boxed{446}$$

$x_1 = 0 \quad y_1 = 0$

$y_2 = 14 - 2x_2$

0	14
1	12
2	10
⋮	
7	0

$y_2 = (\underbrace{14 + y_1 + 2x_1}_{b}) - 2x_2 = b - 2x_2$

$-2x_2 \qquad -2x_2 + 32$

$0 \le b \le 32$

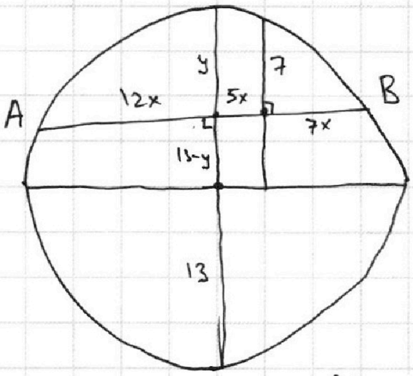
$0 \le 14 + y_1 + 2x_1 \le 32$

$-14 \le y_1 + 2x_1 \le 18$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{y}{12x} = \frac{12x}{26-y} \qquad 144x^2 = 26y - y^2$$

$$144x^2 + 169 + y^2 - 26y = 25x^2 + 400 + y^2 - 40y$$

$$119x^2 + 14y = 231$$

$$17x^2 + 2y = 33$$

$$y = \frac{33-17x^2}{2} \qquad 144x^2 = 429 - 221x^2 - y^2$$

$17 \cdot 17 = 119$ 17

$33 \cdot 13$: 99, 33, 429

$17 \cdot 13$: 51, 17, 221

$365x^2 - 4$

$429 - 365x^2 = y^2$

$33 \cdot 17$: 231, 33, $561 \cdot 2 = 1122$

$1122 - 730 = 392$

$33 \cdot 33$: 99, 99, 1089

$429 \cdot 2 = 858$

$365 \cdot 2 = 730$

$$1089 + 289x^4 - 1122x^2 = 858 - 730x^2$$

$1089 - 858 = 231$

$$289x^4 - 392x^2 + 231 = 0 \qquad x = t$$

$392 \cdot 392$: 784, 3528, 1176, 153664

$153664 - 288^2$

$288 \cdot 288$: 2304, 2304, 576, 82944

$289 \cdot 231$: 289, 867, 578, $66759 \cdot 4 = 267036$

$6 \cdot \frac{24}{69} =$

$3x(x-6)$

$\frac{24}{21} \cdot \left(\frac{24}{69} - 6\right) + 2$

$$3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 3 - 2\sqrt{3x^2-6x+2}$$

$$2\sqrt{3x^2-6x+2} = 2 - 9x$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 4 + 81x^2 - 36x$$

$441 \cdot 3$

$\frac{6-2\sqrt3}{6} = \frac{3-\sqrt3}{3} \qquad \frac{3+\sqrt3}{3}$

$420 \cdot 420$: 84, 168, 176400

$1865 \cdot 68$: 14920, 11190, 126820

$17 \cdot 7 = 119 \cdot 2 = 238$

$78 \cdot 4 = 312$

$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \qquad \frac{3+\sqrt3}{3} \qquad 18 + 6\sqrt{78} > 207 + 69\sqrt3$

$169 \cdot 4 = 676$, $- 49$, 627

$440 \cdot 440$: 176, 176

$\frac{3-\sqrt3}{3}$

$~~6+2\sqrt{78}~~$

$6 + 2\sqrt{78} \qquad 69 + 21\sqrt3$

$450 \cdot 450$: 225, 180, 202500

$169 \cdot 17$: 1183, 169, 2873

$144 \cdot 4 = 576$

$2\sqrt{78} + 21\sqrt3 \qquad 63$

$\sqrt{312} - \sqrt{\ }$

$576 - 238 = 338$

$144 \cdot 7 = 1008$

$2873 - 1008 = 1865$

$400 \cdot 400 = 160000$

$458 - 288 = 170$

$458 \cdot 458$: 4

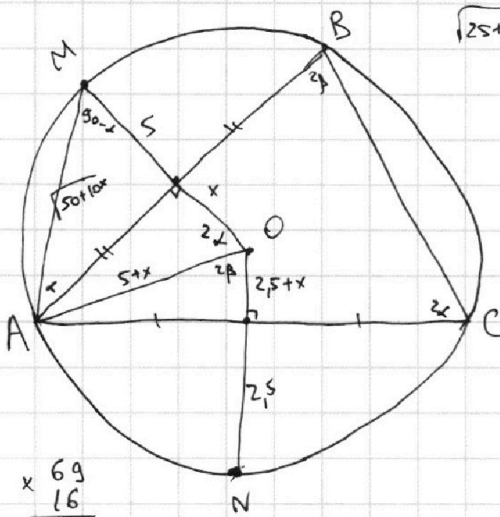
$$82944 + 126820 \qquad 209764$$

$126820 + 82944 = 209764$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{25+10x}$

$50+2x^2+20x-2$

$(50+2x^2+20x)(1-\cos\alpha)=50+10x$

$1-\cos\alpha=\frac{25+5x}{25+x^2+10x}=\frac{5(5+x)}{(5+x)^2}=\frac{5}{5+x}$

$\cos\alpha=\frac{x}{5+x}$ $\qquad a,b\geq 0$

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

$3x^2-6x+2-(3x^2+3x+1)=1-9x$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$a-\sqrt{a}=b-\sqrt{b}$ $\qquad a+b-2\sqrt{ab}=a^2+b^2-$

$a^2+a-2a\sqrt{a}$

$69\cdot 16$: 414, 69, 1104

1) $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ $\qquad 3x^2-6x+2=3x^2+3x+1$ $\qquad x=\frac{1}{9}$ $\qquad \frac{1}{27}-\frac{2}{3}+2$

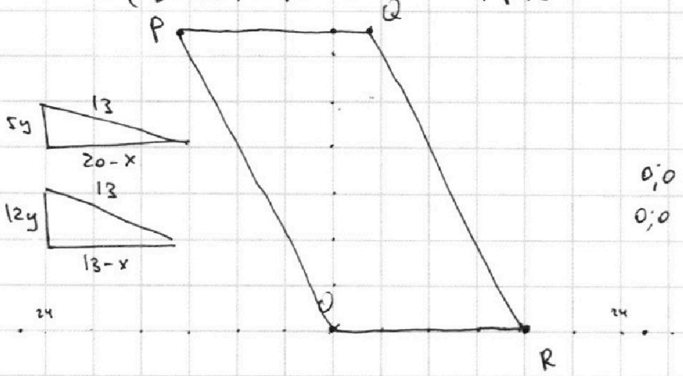
2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$

$\sqrt{3x^2-6x+2}=1-\sqrt{3x^2+3x+1}$ $\qquad 3x^2-6x+2=3x^2+3x+2-2\sqrt{3x^2+3x+1}$

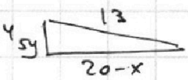
$2\sqrt{3x^2+3x+1}=9x$

$12x^2+12x+4=81x^2$ $\qquad 69x^2-12x-4=0$ $\qquad 144+16\cdot 69=1248$

$16(9+69)=16\cdot 78$ $\qquad 4\sqrt{78}$



$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$



$y_2=14+2x_1$ $\qquad ab: 2^{15}7^{11}$

$0;0 \quad 0;14$ $\qquad bc: 2^{17}7^{18}$

$0;0 \quad 1;16$ $\qquad ac: 2^{23}7^{39}$

$x+y+z=34$ $\qquad z=23$, $x=16$, $y=0$ $\qquad 2^{23}7^{35}$

$x+y=15$ $\qquad z-x=2$

$y+z=17$ $\qquad x-y=6$

$z+x=23$ $\qquad z-y=8$

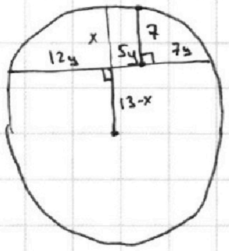
$x+y\geq 15$

$y+z\geq 17$ $\qquad x+y+z\geq\frac{55}{2}=27,5$ $\qquad x+y+z\geq 28$

$x+z\geq 23$

kx $\qquad -13k=26$ $\qquad k=-2$ $\qquad 16k+b=0$ $\qquad k=-2$

$3k+b=26$ $\qquad b=32$



$0,0;\ -1;2$ $\qquad 14\cdot 14$ $\qquad 17\cdot 14$: 68, 17, 238 $\qquad 17\cdot 14=238$ $\qquad 16\cdot 13$: 48, 16, 208 $\qquad 446$

$169-144y^2=169+x^2-26x$

$x^2+144y^2=26x$ $\qquad y=\frac{\sqrt{x(26-x)}}{12}$ $\qquad 25y^2+400+x^2-40y=144y^2+169+x^2-26x$

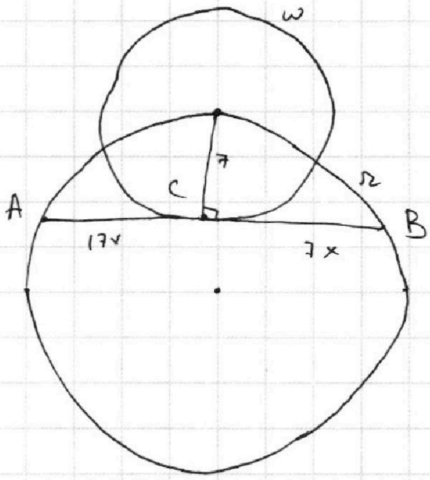
$14x+119y^2=231$

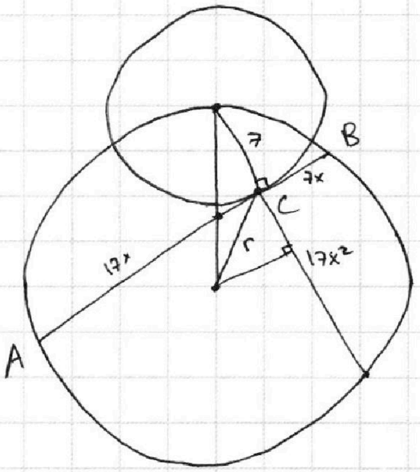
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





$17x \cdot 7x = 13^2 - r^2$

$r = \sqrt{169 - 119x^2}$

$\dfrac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$

НОД$(a, b) = 1$

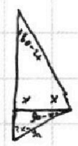
$$\frac{17x - \frac{7}{tg\alpha}}{26 - \frac{7}{\sin\alpha}} = \frac{(17x\overset{tg\alpha}{} - 7)\sin\alpha}{(26\sin\alpha - 7)tg\alpha} = \frac{(17x\,tg\alpha - 7)}{26\sin\alpha - 7} \cdot \cos\alpha = \frac{17x\sin\alpha - 7\cos\alpha}{26\sin\alpha - 7} = \frac{1}{x\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$$

$\dfrac{7}{\sin\alpha} : \left(7x + \dfrac{7}{tg\alpha}\right) = \dfrac{1}{x\sin\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}$

$$\frac{17x\sin\alpha - 7\cos\alpha}{26\sin\alpha - 7} = \frac{\cos\alpha + x\sin\alpha}{x\sin\alpha\cos\alpha}$$

$\dfrac{7}{17x} = \dfrac{7x}{y}$ $\quad y = 17x^2$

$\dfrac{\sqrt{49 + 49x^2}}{\sqrt{17^2x^2 + 17^2x^4}} = \dfrac{7}{17x}$



$90 - x = 180 - 2x \quad x = 90$

$\dfrac{7 \cdot 2}{7 + 17x^2} = \dfrac{y}{13}$

$y = \dfrac{182}{7 + 17x^2}$

$7^2 + r^2 - 2 \cdot 7r \cdot \cos\alpha = 13^2 \qquad 7^2 - 119x^2 - 14 \cdot r \cdot \cos\alpha = 0$

$7 - 17x^2 - 2r\cos\alpha = 0$

$2r\cos\alpha = 7 - 17x^2 \qquad \cos\alpha = \dfrac{7 - 17x^2}{2\sqrt{13^2 - 119x^2}}$

$r^2 + 17^2x^4 + 2r \cdot 17x^2 \cdot \cos\alpha = 13^2$

$7^2 - 14r\cos\alpha = 17^2x^4 + 34rx^2 \cdot \cos\alpha$

$7(7 - 2r\cos\alpha) = 17x^2(17x^2 + 2r\cos\alpha)$

$14 \times 13 = 42 + 14 = 182$

$\dfrac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \dfrac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$

$a + b \qquad 9ab \qquad a + b \,\vdots\, 9$

$\dfrac{1}{8} \qquad \dfrac{9}{65 - 56} \qquad \dfrac{9}{9} = 1 \qquad \dfrac{4}{5}$

9

$a^2 + b^2 - 7ab = a^2 + b^2 + 2ab - 9ab = (a+b)^2 - 9ab$