



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \quad \text{Пусть } a = 2^{\alpha} \cdot 7^{\beta}, b = 2^m \cdot 7^n, c = 2^x \cdot 7^y$$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 2^{15} \cdot 7^{11} \\ b \cdot c &= 2^{17} \cdot 7^{18} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} \alpha + m \geq 15 \\ m + x \geq 17 \\ \alpha + x \geq 23 \end{cases} \\ a \cdot c &= 2^{23} \cdot 7^{39} \\ a \cdot b \cdot c &= 2^{\alpha+m+x} \cdot 7^{\beta+n+y} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} \beta + n \geq 11 \\ n + y \geq 18 \\ \beta + y \geq 39 \end{cases} \\ &\quad \begin{cases} \alpha \geq \frac{21}{2} \\ m \geq \frac{9}{2} \\ x \geq \frac{25}{2} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \\ &\quad \begin{cases} \beta \geq 32.16 \\ n \geq 0 \\ y \geq 23 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha + m + x \geq \frac{55}{2}, \beta + n + y \geq 39,$$

Т.к. $a, b, c \in N$, $\alpha, m, x, \beta, n, y \in N$

(очевидно, что $a \cdot b \cdot c$ кратн. 7. при
разложении a, b, c , Т.Е в их
разложении только 2 чл.)

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 - 9\alpha\beta + \beta^2} = \frac{\alpha + \beta}{(\alpha + \beta)^2 - 9\alpha\beta}$$

$$m = \alpha + \beta, \text{ если } 9\alpha\beta \neq (\alpha + \beta)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

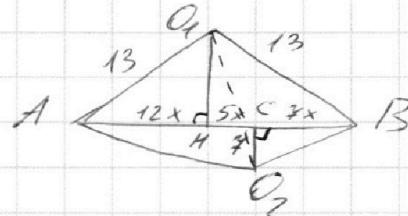
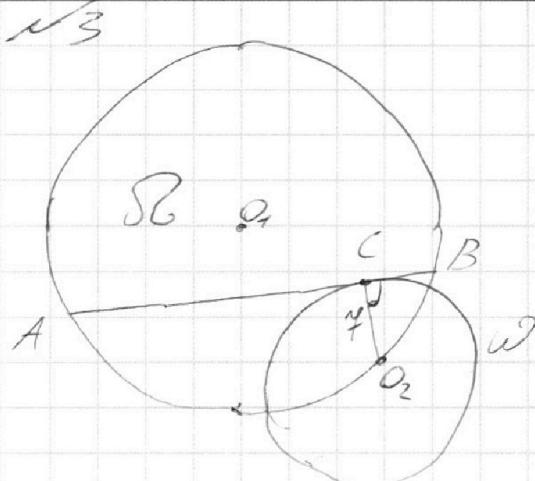
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AO_2^2 = 49 + 289x^2$$

$$BO_2^2 = 49 + 49x^2$$

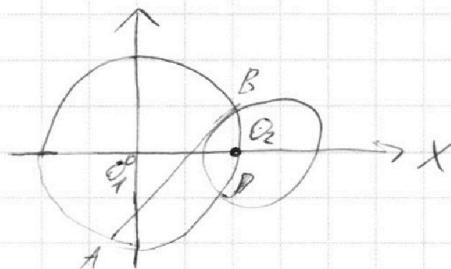
$$AO_2^2 - BO_2^2 = 13^2 - 289x^2 = 13^2$$

~~$$HO_1^2 = AO_1^2 - AH^2 \quad AH^2 = BO_2^2 - BH^2 \quad (\text{из угла})$$~~

~~$$169 - 144x^2 = 169 - 289x^2$$~~

$$HO_1 = \sqrt{169 - 144x^2}, \quad S_{AO_1 B} = \sqrt{(13+12x)(12x+12x)(13-12x)} \\ = 12x \cdot \sqrt{169 - 144x^2}$$

Построим систему координат



$O_2(0, 13)$

$$x^2 + y^2 = 13^2 \quad \text{укл. в } \Omega$$

$$x^2 + (y-13)^2 = 4^2 \quad \text{укл. в } \omega$$

Пусть $A(m; n), B(k; p)$ тогда

$$AB = \sqrt{(k-m)^2 + (p-n)^2}, \quad \text{тогда}$$

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 13^2 \\ k^2 + p^2 = 13^2 \end{cases}$$

Найдём уравнение, зод
предшущую AB , как каск.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y_{AB} = \ell x + C$$
$$\begin{cases} n = m\ell + C \\ p = k\ell + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} \ell &= \frac{p - n}{k - m} \\ C &= n - \frac{mp - mn}{k - m} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Пусть $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \ell$, $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = k$, тогда

$$\ell - k = \ell^2 - k^2 \Leftrightarrow (\ell - k)(\ell + k - 1) = 0$$

$$I \quad \ell = k$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$II \quad \ell + k = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(3x^2 - 6x + 2)} = 1$$

$$4(9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2) = 36x^4 - 36x^3 + 33x^2 - 12x + 4$$

$$6x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 4 \cdot 6 \cdot 9 = 4 \cdot 78$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{6 \cdot 9}$$

Ограничения:

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{корни, наружу входят все}$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

последовательности

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

16

$$\begin{cases} \alpha x + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 11(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8b - \alpha x \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow$$

=> исходная система

записано два сл-я,

в которых из четырех

решений будут

использованы только прямой $y = 8b - \alpha x$,
исключив вспомогательные.

После исключения четырех решений
может когда $y = 8b - \alpha x$ - останутся пять.

стк-ли $(x^2 + y^2 = 1)$ и $(x^2 + (y-12)^2 = 16)$.

Получим симметрическое, как видно из нач. 1 стр.

$$\begin{cases} y = 8b - \alpha x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad x^2(\alpha^2 + 1) - 16\alpha b x + 64b^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} y = 8b - \alpha x \\ x^2 + (y-12)^2 = 16 \end{cases} \quad x^2(\alpha^2 + 1) - 2x(8ab - 12\alpha) + 64b^2 - 192b + 144 = 0$$

$$\frac{D_1}{4} = 0 \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} 64\alpha^2 b^2 - 64\alpha^2 b^2 + \alpha^2 - 64b^2 + 1 = 0 \\ 64\alpha^2 b^2 - 192\alpha^2 b + 144\alpha^2 - 64\alpha^2 b^2 + 192\alpha^2 b + 128\alpha^2 - 64b^2 + 192b - 128 = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{D_2}{4} = 0 \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} 64\alpha^2 b^2 - 192\alpha^2 b + 144\alpha^2 - 64\alpha^2 b^2 + 192\alpha^2 b + 128\alpha^2 - 64b^2 + 192b - 128 = 0 \end{array} \right.$$

$$\alpha^2 - 64b^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

$$16\alpha^2 - 64b^2 + 192b - 128 = 0 \quad (2)$$

$$(2) - 16 \cdot (1) : 960b^2 + 192b - 192 = 0$$

$$60b^2 + 12b - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 60 = 64$$

$$b = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{20}$$

$$\rightarrow (1) : \alpha^2 - 16 + 1 = 0$$

$$\alpha = \pm \sqrt{15}$$

$$b_2 = \frac{3}{10}$$

$$\alpha^2 - \frac{144}{25} + 1 = 0$$

$$\alpha = \pm \frac{\sqrt{179}}{5}$$

$$\text{Ответ: } \pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{179}}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.

$$\frac{a+b}{a^2 - 4ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$9ab : a+b$$

$$\text{Ans} \quad 69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 276 = 312$$

$$ab : 2 \overset{15}{\cdot} 4 \overset{11}{\cdot}$$

$$BC : 2^{14} \cdot 7^{10}, AB : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\alpha = 2 \cdot 7^{\beta}, \beta = 2 \cdot 7^{\omega}, C = 2^n \cdot 7^m$$

$$9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2$$

$$2 + \delta = 15 \text{ (1)}$$

$$(1) - (3) + (5) : 2x = 21$$

$$3x^2 + 3x + 7)(3x^2 - 6x + 2)$$

$$B + W = 11 \quad (2)$$

$$3x - 6 + \frac{2}{2} \geq 0$$

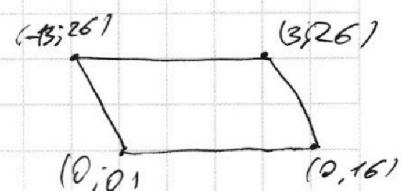
$$\begin{cases} \theta + n = 17 \\ \omega + m = 18 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

$$I \quad x_6 = 1 \quad II \quad x_6 = -\frac{1}{3}$$

$$\beta + m = 39(6)$$

$$q. \epsilon_{+K} = \epsilon_{-K}^2 \downarrow \downarrow \uparrow \uparrow$$

$$(t-k)(t+k-1) = 0 \quad P=9$$

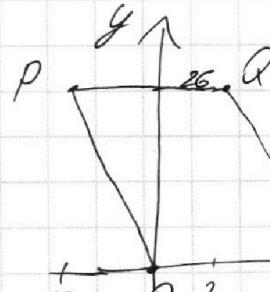


$$I \ell = k \quad II \quad \ell \neq 1-k$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 4$$

$$y = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} + \sqrt{3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$2x_6 - 2x_{a6} + y_6 - y_{a6} = 14$$

-13, 161, geto, 263 X

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \alpha x + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

рассмотрим $y = 8b - \alpha x$

$$I \quad x^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

$$II \quad x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0$$

$$III \quad y = 8b - \alpha x$$

y_1



12

$$P + \beta = 15$$

$$\beta + x = 17$$

$$P + x = 23$$

ММЗ

$$P + 2\beta + x - P - x = 15 + 17 - 23$$

$$2\beta = 9, 2P = 21, 2x = 25$$

$$\begin{cases} P + \beta \geq 15 \\ \beta + x \geq 17 \\ P + x \geq 23 \\ 2x \geq 25 \end{cases}$$

$$P \geq 5, \beta \geq 12, x \geq 13$$

$$P = 5, \beta = 10, x = 13$$

x

0

x_2

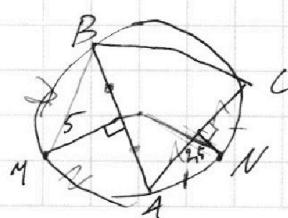
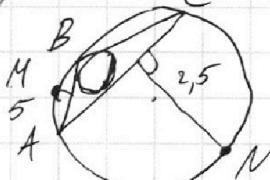
$$x^2 + (8b - \alpha x - 12)^2 = 16$$

$$x^2(1 + \alpha^2)$$

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + \alpha^2 x^2 = 1$$

$$x^2(\alpha^2 + 1) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = 0 = 64a^2b^2 - 64ab^2 + \alpha^2 - 64b^2$$

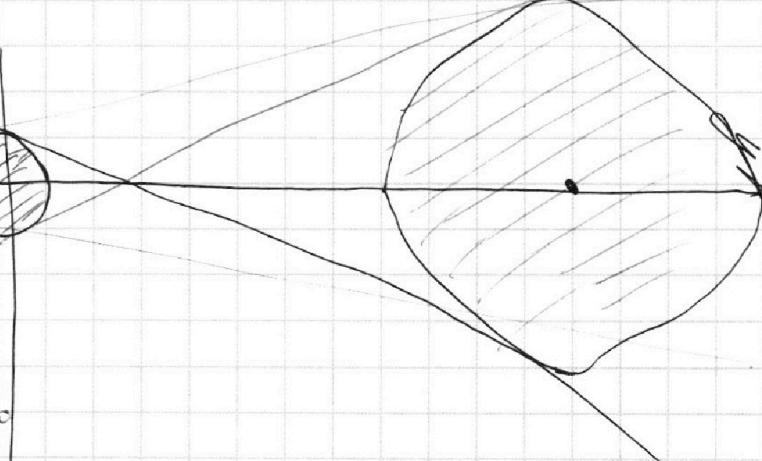


x

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{abc} = \frac{P}{4Rr}$$

$$Pr = \frac{\alpha \beta \gamma}{4R}$$

$$R = 7,5$$



I

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

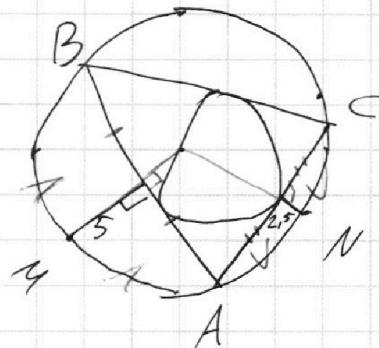
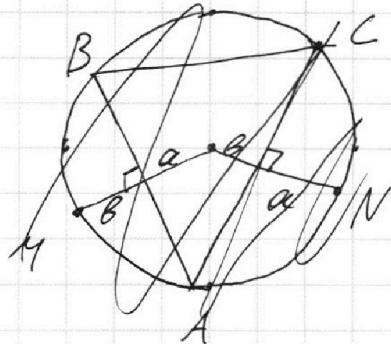
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\cos 2x}{\cos 2y} = \frac{\cos 2y}{\cos 2z}$$

$$AB = 2^{15} \cdot 4^{11}$$

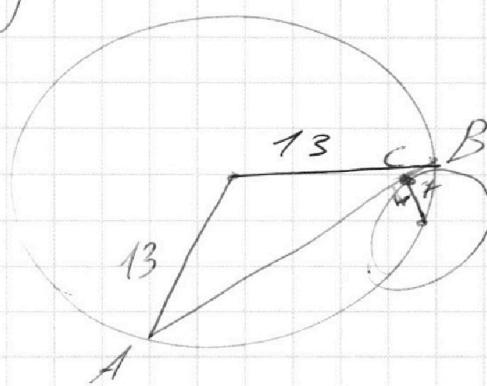
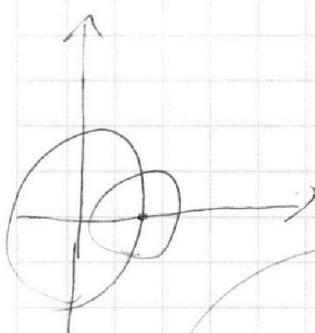
$$BC = 2^{14} \cdot 4^{18}$$

$$AC = 2^{23} \cdot 4^{39}$$

$$a = 2^2 \cdot 4^3, b = 2^k \cdot 4^m, c = 2^x \cdot 4^y$$

$$\begin{cases} d + k = 15 \\ k + x = 14 \\ d + x = 23 \end{cases} \quad \begin{cases} d \geq \frac{21}{2} \\ k \geq \frac{9}{2} \\ x \geq \frac{25}{2} \end{cases}$$

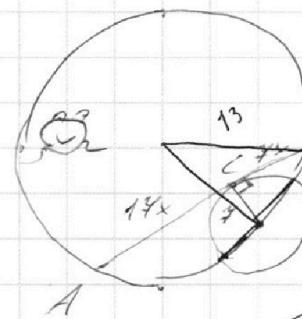
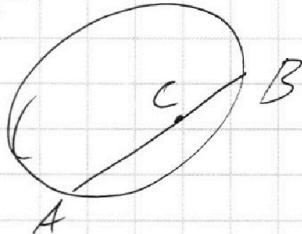
$$ABC = 2^{28} \cdot 4^{61}$$



$$\frac{d + b}{a^2 + b^2 - fab}$$

$$d + k + x \geq \frac{55}{2}$$

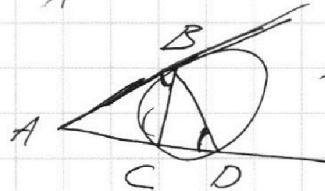
$$AB = ?$$



$$\begin{array}{r} x \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 14 \end{array}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - fab} \quad fab \equiv a+b$$

$a \approx b$ \Rightarrow задача



$$AB^2 = AC \cdot AD$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$$

