



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



M
 $a \cdot b = 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $b \cdot c = 2^{17} \cdot 7^{18}$
 $a \cdot c = 2^{23} \cdot 7^{39}$
 $a \cdot b \cdot c = 2^{d+m+x} \cdot 7^{b+n+y}$

Пусть $a = 2^d \cdot 7^b$, $b = 2^m \cdot 7^n$, $c = 2^x \cdot 7^y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d+m \geq 15 \\ m+x \geq 17 \\ d+x \geq 23 \\ b+n \geq 11 \\ n+y \geq 18 \\ b+y \geq 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \geq \frac{21}{2} \\ m \geq \frac{9}{2} \\ x \geq \frac{25}{2} \\ b \geq 16 \\ n \geq 0 \\ y \geq 23 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d+m+x \geq \frac{55}{2}, b+n+y \geq 39,$$

Т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, $d, m, x, b, n, y \in \mathbb{N}$

(очевидно, что $a \cdot b \cdot c$ миним. при
максимальных a, b, c , т.е. в их
разложении только 2 и 7)

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-2ab} \quad m = a+b, \text{ если } 2ab = (a+b)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

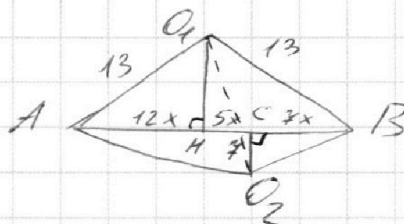
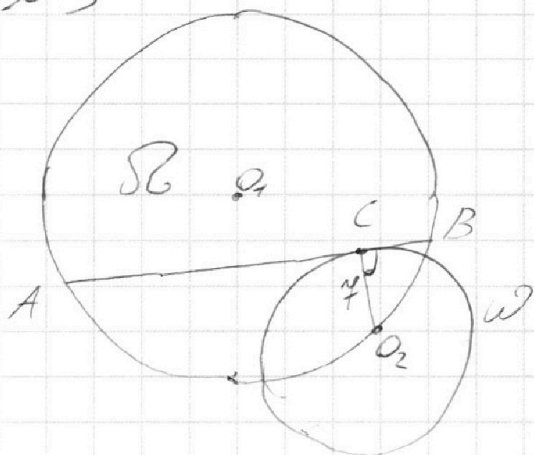
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



√3



$$AO_2^2 = 49 + 289x^2$$

$$BO_2^2 = 49 + 49x^2$$

$$AO_2^2 - BO_2^2 = 43^2 - 289x^2 = 13^2$$

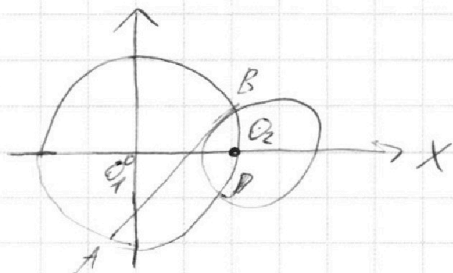
$$HO_1^2 = AO_1^2 - AH^2 = BO_1^2 - BH^2 \quad (\text{по т. Пифагора})$$

$$169 - 144x^2 = 169 - 289x^2$$

$$HO_1 = \sqrt{169 - 144x^2}, \quad S_{AO_1B} = \sqrt{(13+12x) \cdot 12x \cdot 12x \cdot (13-12x)}$$

$$= 12x \cdot \sqrt{169 - 144x^2}$$

Построим систему координат



$$O_2(0; 13)$$

$$x^2 + y^2 = 13^2 \quad \text{— уравнение } \Omega$$

$$x^2 + (y - 13)^2 = 3^2 \quad \text{— уравнение } \Omega'$$

Пусть $A(m; n)$, $B(k; p)$ тогда

$$AB = \sqrt{(k-m)^2 + (p-n)^2}, \quad \text{при этом}$$

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 13^2 \\ k^2 + p^2 = 13^2 \end{cases}$$

$$k^2 + p^2 = 13^2$$

Найдём уравнение, заданное хордой AB, как касательную.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y_{AB} = kx + C$$

$$\begin{cases} n = m\theta + C \\ p = k\theta + C \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\theta = \frac{p - n}{k - m}$$

$$C = n - \frac{mp - mn}{k - m}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Пусть $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \ell$, $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = k$, тогда

$$\ell - k = \ell^2 - k^2 \Leftrightarrow (\ell - k)(\ell + k - 1) = 0$$

I $\ell = k$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

II $\ell + k = 1$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(3x^2 - 6x + 2)} = 1$$

$$4(9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2) = 36x^4 - 36x^3 + 33x^2 - 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 69 = 4 \cdot 77$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{77}}{69}$$

Ограничения:

$$3x - 6x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \Rightarrow \text{корни, получ. во II сл. явл. негодными}$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \Rightarrow$$

 => Исходная система задаёт два ш.я, в каждом из которых решений будут.
 Является точка прямой $y = 8b - ax$, лежащая внутри окружности.
 Тогда система имеет 2 решения только тогда $y = 8b - ax$ — общая касат. окр.-ей $(x^2 + y^2 = 1)$ и $(x^2 + (y - 12)^2 = 16)$.
 Получим систему, касаясь кот. ш.я. ~~1 шт.~~

$$\begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad x^2(a^2 + 1) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2 + (y - 12)^2 = 16 \end{cases} \quad x^2(a^2 + 1) - 2x(8ab - 12a) + 64b^2 - 192b + 144 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{D_1}{4} = 0 \\ \frac{D_2}{4} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 64a^2b^2 - 64a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 1 = 0 \\ 64a^2b^2 - 192a^2b + 144a^2 - 64a^2b^2 + 192a^2b + 128a^2 - 64b^2 + 192b - 128 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 64b^2 + 1 = 0 & (1) \\ 16a^2 - 64b^2 + 192b - 128 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) - 16 \cdot (1): 960b^2 + 192b - 144 = 0$$

$$20b^2 + 4b - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 60 = 64$$

$$b = \frac{-2 \pm 8}{20} \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{3}{5}$$

$$\rightarrow (1): a^2 - 16 + 1 = 0$$

$$a = \pm\sqrt{15}$$

$$a^2 - \frac{144}{25} + 1 = 0$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

Ответ: $\pm\sqrt{15}$; $\pm \frac{\sqrt{119}}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-4ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$$9ab : a+b$$

$$36x^4 - 36x^3 + 33x^2 - 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 276 = 312$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc : 2^{14} \cdot 7^8, \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = ?$$

$$(6x^2 - 3x + 2)^2 = 36x^4 - 24x^3 + 4 + 9x^2 + 4$$

$$a = 2^{\alpha} \cdot 7^{\beta}, \quad b = 2^{\gamma} \cdot 7^{\omega}, \quad c = 2^{\eta} \cdot 7^{\mu}$$

$$9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2x$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 15 & (1) \\ \beta + \omega = 11 & (2) \\ \gamma + \eta = 14 & (3) \\ \omega + \mu = 18 & (4) \\ \alpha + \eta = 23 & (5) \\ \beta + \mu = 39 & (6) \end{cases}$$

$$(1) - (3) + (5) : 2\alpha = 21$$

$$(3x^2 + 3x + 1)(3x^2 - 6x + 2)$$

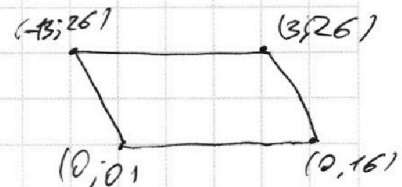
$$3x - 6x^2 - 2 \geq 0 \quad y(OP) = -2x$$

$$I \quad x\beta = 1 \quad II \quad x\beta = -\frac{1}{2}$$

$$4. \quad \epsilon \pm k = \epsilon^2 - k^2 \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Uparrow \quad \Uparrow$$

$$6x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

$$(\epsilon - k)(\epsilon + k - 1) = 0 \quad P=0$$



$$I \quad \epsilon = k \quad II \quad \epsilon = 1 - k$$

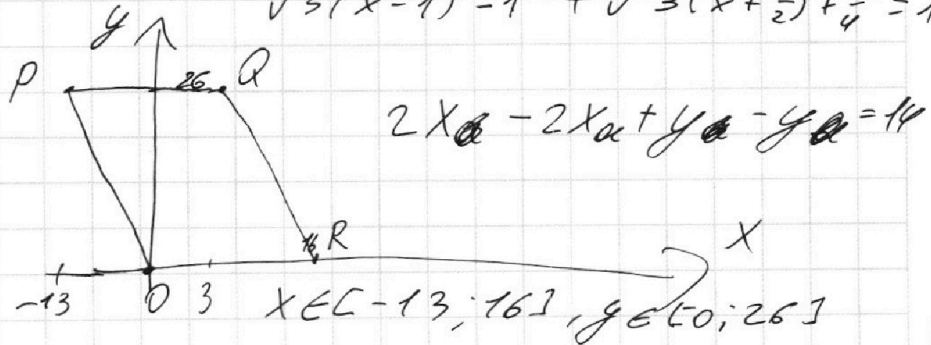
$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} + \sqrt{3(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + y - pb = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

граница $y = pb - ax$

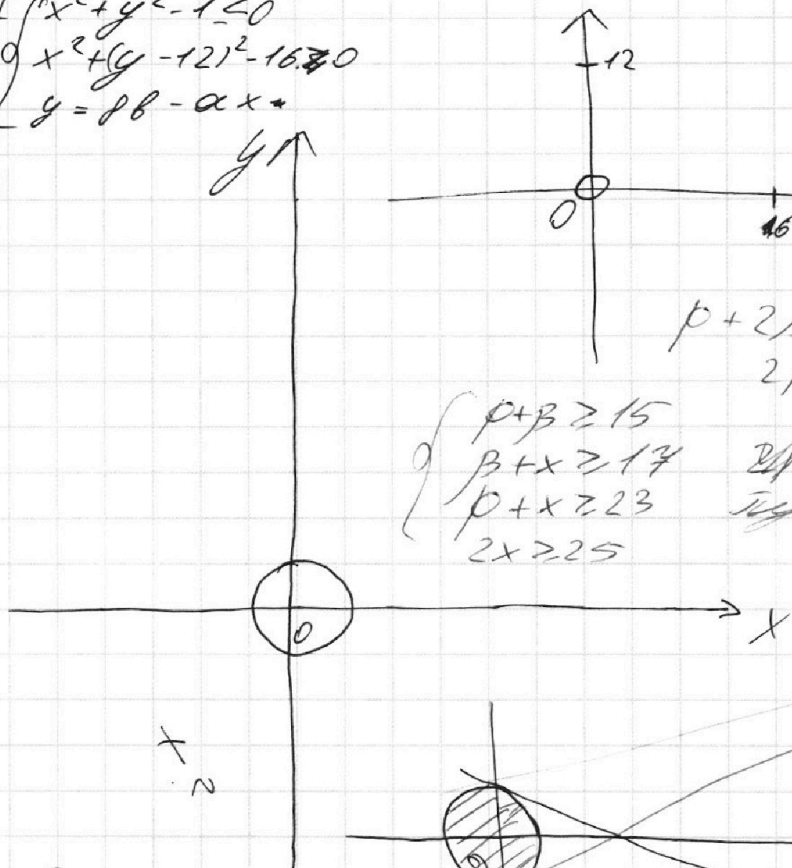
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0 \\ y = pb - ax \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^p \cdot 3^k \\ b &= 2^p \cdot 5^q \\ c &= 2^r \cdot 5^s \end{aligned}$$

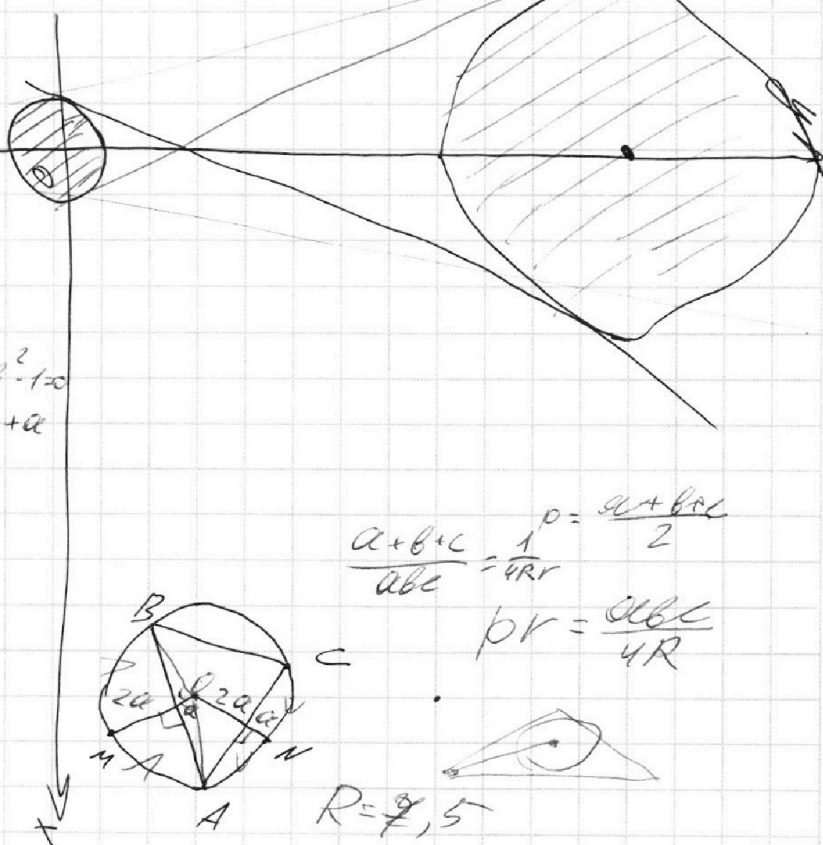
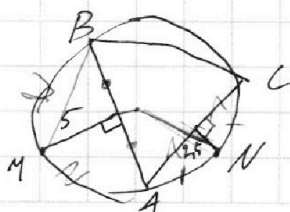
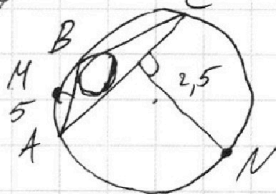
$$\begin{cases} p + q = 15 \\ p + r = 17 \\ p + s = 23 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p + 2q + r - p - r &= 15 + 17 - 23 \\ 2q &= 9, 2r = 21, 2s = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} p + q \geq 15 \\ p + r \geq 17 \\ p + s \geq 23 \\ 2s \geq 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q \geq 5, r \geq 19, s \geq 13 \\ p = 6, q = 5, r = 10, s = 13 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} x^2 + (pb - ax - 12)^2 &= 16 \\ x^2(1+a^2) &+ 64b^2 - 16abx + a^2x^2 &= 1 \\ x^2(a^2+1) - 16abx + 64b^2 - 1 &= 0 \\ D=0 &= 64a^2b^2 - 64ab^2 + a^2 &= 0 \\ \frac{D}{4} &= 16a^2b^2 - 16ab^2 + \frac{a^2}{4} &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{abc} &= \frac{1}{4Rr} \\ p &= \frac{a+b+c}{2} \\ pR &= \frac{abc}{4R} \end{aligned}$$

$$R = 7,5$$

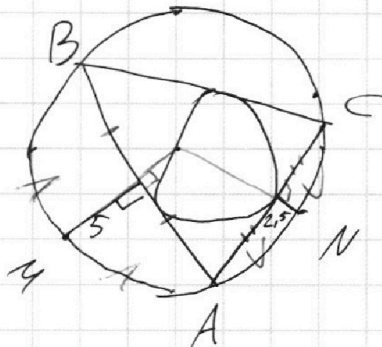
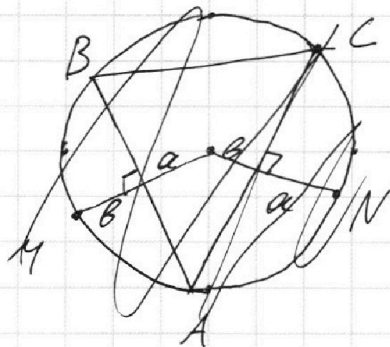
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \dots$$

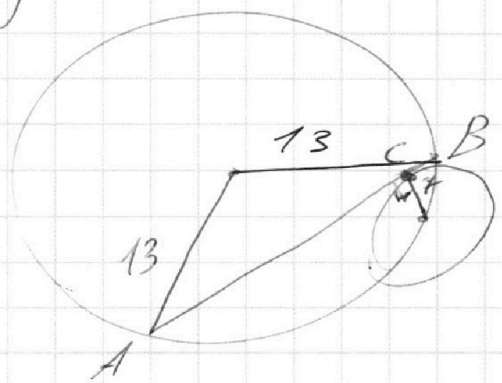
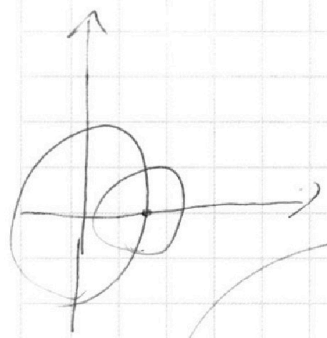
$$\begin{aligned} AB &: 2^{15} 4^{11} \\ BC &: 2^{17} 4^{18} \\ AC &: 2^{23} 4^{39} \end{aligned}$$

$$a = 2 \cdot 4^{\beta}, \quad b = 2 \cdot 4^{\gamma}, \quad c = 2 \cdot 4^{\delta}$$

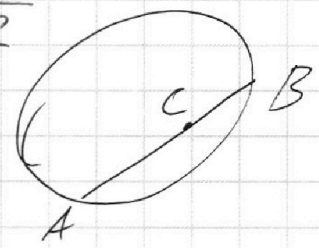
$$\begin{cases} d + k \geq 15 \\ k + x \geq 17 \\ d + x \geq 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \geq \frac{21}{2} \\ k \geq \frac{9}{2} \\ x \geq \frac{25}{2} \end{cases}$$

$$abc = 2^{28} 4^{61}$$

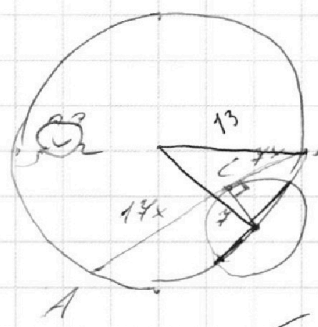
$$d + k + x \geq \frac{55}{2}$$



AB = ?



$$\frac{d+b}{a^2+b^2-7ab}$$

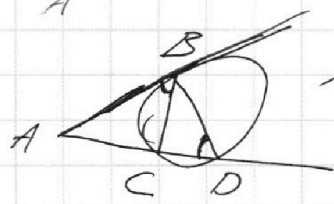


$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$9ab \stackrel{a+b}{=} \dots$$

a и b взаимно...



$$\begin{aligned} AB^2 &= AC \cdot AD \\ \frac{AB}{AD} &= \frac{AC}{AB} \end{aligned}$$

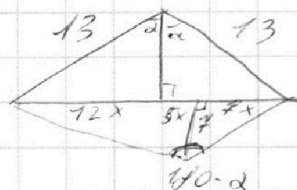
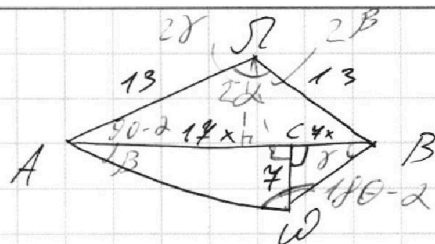
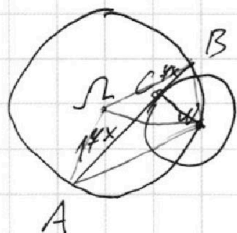
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

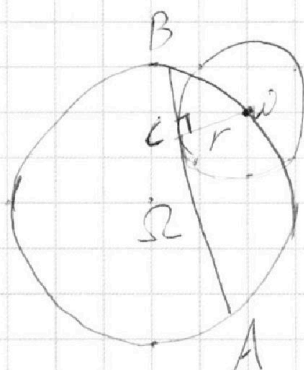
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\gamma + \beta = 2$$



$$64a^2b^2 - 64ab^2 - 64b^2 + a + 1 = 0$$

$$a^2 - a - 1 + \frac{a+1}{64b^2} = 0$$

$$a^2 - a \left(\frac{64b^2 - 1}{64b^2} \right) - 1 = 0$$

$$D =$$

$$x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 144 + 2(12ax - 8abx + 96b) = 16$$

$$x^2(a^2 + 1) - 2x(8ab - 12a) + 128 - 192b = 0$$

$$D = 0 = 64a^2b^2 - 96a(192a^2b + 144a^2 - 128a^2 + 192a^2b + 128 + 192b)$$

$$a^2(64b^2 + 16) + 192b - 128 = 0$$

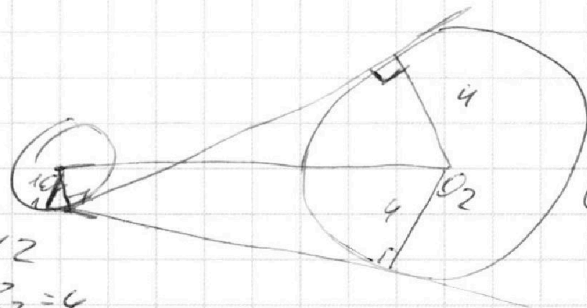
$$a^2(64b^2 + 16) - a(64b^2 + 16) - 64b^2 + 1 = 0$$

$$16a^2 + a(64b^2 - 1) + 64b^2 - 1 + 192b - 128 = 0$$

$$a^2 - 64b^2 + 1 = 0$$

$$16a^2 - 64b^2 +$$

(0; 0)



(0; 12)

$$O_1O_2 = 12$$

$$R_1 = 1, R_2 = 4$$

$$960b^2 + 192b - 144 = 0$$

$$120b^2 + 24b - 18 = 0$$

$$60b^2 + 12b - 9 = 0$$

$$20b^2 + 4b - 3 = 0$$

$$\begin{array}{r} \times 64 \\ 15 \\ \hline 320 \\ 64 \\ \hline 960 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 16 \\ \hline 1024 \\ 25 \end{array}$$