МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1.

Пусть $ab = k\cdot 2^{14}\cdot 7^{10}$; $bc = l\cdot 2^{17}\cdot 7^{17}$, $ac = m\cdot 2^{20}\cdot 7^{37}$, где k, l, m – натуральные числа (это возможно по условию делимости и $a, b, c \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow ab\cdot bc\cdot ac = (abc)^2 = klm\cdot 2^{14+17+20}\cdot 7^{10+17+37} = 2^{51}\cdot 7^{64}\cdot klm$

но т.к. это $(abc)^2$, то степень вхождения двойки должна быть четной $\Rightarrow klm \,\vdots\, 2 \Rightarrow klm \geq 2$.

$\Rightarrow (abc)^2 \,\vdots\, 2^{51}\cdot 7^{64}\cdot 2 = 2^{52}\cdot 7^{64}$

~~т~~ $abc \,\vdots\, 2^{26}\cdot 7^{32}$ ~~~~ Но $abc \,\vdots\, ac \,\vdots\, 7^{37}$

~~~~ $\Rightarrow abc \,\vdots\, 2^{26}$, $abc \,\vdots\, 7^{37}$ $\Rightarrow abc \,\vdots\, 2^{26}\cdot 7^{37} \Rightarrow \underbrace{abc \geq 2^{26}\cdot 7^{37}}_{\text{оценка}}$, т.к. 2 и 7 взаимнопрост.

Пример: $a = 2^{8}\cdot 7^{20}$, $b = 2^{6}$, $c = 2^{12}\cdot 7^{17}$

Ответ: $2^{26}\cdot 7^{37}$
~~~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2.

НОД $(a, b) = 1$ по условию.

Пусть $\begin{cases}(a+b) \vdots m \\ (a^2-6ab+b^2) \vdots m\end{cases}$, т.е. дробь $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ сократима на m.

$a^2-6ab+b^2 = ((a+b)^2-8ab) \vdots m$ и $(a+b) \vdots m \Rightarrow (a+b)^2 \vdots m \Rightarrow 8ab \vdots m$

Пусть НОД $(a, m) = d_1$, НОД $(b; m) = d_2$; $a = d_1 \cdot a_1$, $b = d_2 \cdot a_2$.

Причем, очевидно $(a; d_2) = (b; d_1) = 1$, иначе не выполняется $(a; b) = 1$.

По предположению $\underset{\vdots d_1}{a} + b \vdots \underset{\vdots d_1}{m} \Rightarrow b \vdots d_1$. Однако в силу $(b; d_1) = 1$ это возможно только при $d_1 = 1$.

Аналогично $b, m \vdots d_2 \Rightarrow a \vdots d_2 \Rightarrow d_2 = 1$

$\Rightarrow 8ab \vdots m$, где a и b взаимнопросты с $m \Rightarrow 8 \vdots m \Rightarrow m \leq 8$. ← оценка.

Пример: $a = 3$, $b = 5 \Rightarrow$ дробь имеет вид $\frac{3+5}{9-6\cdot3\cdot5+25} = \frac{8}{-56}^{|:8} = -\frac{1}{7}$.

Ответ: при $m = 8$.

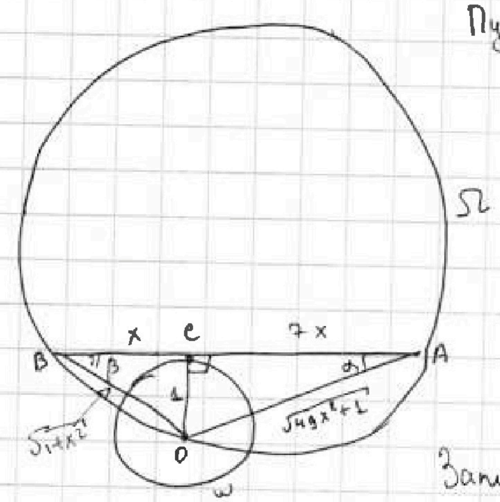
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.



Пусть $BC = x \Rightarrow AC = 7x$, O - центр ω

$OC \perp AB$ по свойству касательной.

$\Rightarrow \triangle OCA$ и $\triangle OCB$ - прямоугольные ($\angle C = 90°$)

$\Rightarrow$ по т. Пифагора $OA = \sqrt{1+49x^2}$, $OB = \sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow \sin\angle BAO = \sin\angle CAO = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$.

Запишем т. синусов для $\triangle ABO$:

$\frac{OB}{\sin\angle BAO} = 2\cdot 5$ — радиус Ω по условию

$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^2}}{1/\sqrt{49x^2+1}} = 10 \quad \Rightarrow \sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{49x^2+1} = 10 \ \uparrow^2$

$(1+x^2)(49x^2+1) = 49(x^2)^2 + 50x^2 + 1 = 100$

Решаем биквадратное уравнение: $49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$.

$D/4 = 625 + 49\cdot 99 = 625 + 4851 = 5476 = 74^2$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{-25-74}{49} < 0 \text{ ПК}. \\ x^2 = \frac{-25+74}{49} = 1 \quad \Rightarrow x = 1. \end{array}\right.$

$AB = BC + AC = x + 7x = 8x = 8.$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$ ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} D = 25-4\cdot 2\cdot 3 = 1 \\ D_2 = 1-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq \frac{5-1}{4} = 1 \\ x \geq \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2} \end{array}\right. \\ x \in R \end{cases}$

Введём замену: $a = 2x^2-5x+3$, $b = 2x^2+2x+1$.

Тогда уравнение примет вид $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$

$a - b = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

$\Downarrow$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{a}-\sqrt{b} = 0 \\ \sqrt{a}+\sqrt{b} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ \sqrt{a}+\sqrt{b} = 1. \end{array}\right.$ подставим обратно x:

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 \\ \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \end{array}\right. \\ \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{7} \\ \cancel{\ldots} \end{array}\right.$ ← сложим эти 2 уравнения.

$2\sqrt{2x^2-5x+3} = 3-7x$, возведём в квадрат (ОДЗ: $3-7x \geq 0$, $x \leq \frac{3}{7}$)

$4(2x^2-5x+3) = 9-42x+49x^2$

$41x^2-22x-3=0$

$D/4 = 121+3\cdot 41 = 244 = 4\cdot 61 = (2\sqrt{61})^2$ $15^2 = 225 < 244 < 256$.

$\Downarrow$

$15 < 2\sqrt{61} < 16$

$\begin{cases} x_1 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41} \text{ удовл. ОДЗ} \\ x_2 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} > 1 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

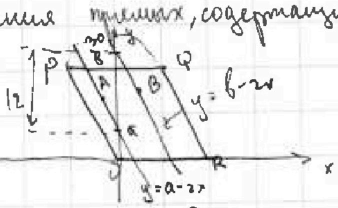
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Уравнения прямых, содержащих стороны парал-ма:

$$\begin{cases} PO: y+2x=0, & y=-2x \\ QR: y+2x-30=0 & y=30-2x \\ PQ: y-24=0, & y=24 \\ OR: y=0 \end{cases}$$



Пусть точки A и B лежат на прямых, описываемых уравнениями $y=a-2x$ и $y=b-2x$ соответственно (т.е. это прямые, проведённые через т. A и т. B, параллельные PO и QR)

По условию, чтобы пара $\{A;B\}$ нам подходила, должно выполняться $2x_2+y_2-(2x_1+y_1)=12$, т.е. $b-a=12$, $b=12+a$.

Заметим, что если $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$, то $a, b \in \mathbb{Z}$

При этом $0 \le a, b \le 30$, чтобы точки A и B не оказались снаружи
сторона PO сторона QR

=> существует 19 подходящих нам пар прямых, на которых лежали бы A и B: при $a=0$, $b=12$; $a=1$, $b=13$, ... $a=18$, $b=30$.

При этом каждая из прямых (вида $y=2k-2x$) имеет 13 целых точек внутри и на границе параллелограмма, т.е. решений системы

$\begin{cases} y=2k-2x \\ 0 \le y \le 24 \end{cases}$ $\Downarrow$ в целых числах при $0 \le 2k \le 30$, $0 \le k \le 15$ $(k \in \mathbb{Z})$

$0 \le 2k-2x \le 24$ => $k-12 \le x \le k$, т.е. $x \in \{k-12, k-11, \dots k-1, k\}$

А каждая прямая вида $y=2k+1-2x$ имеет 12 точек внутри параллелограмма

$\begin{cases} y=2k+1-2x \\ 0 \le y \le 24 \\ 0 \le 2k+1 \le 30 \end{cases}$, $y, k, x \in \mathbb{Z}$ => $0 \le 2k+1-2x \le 24$ => $2(k-12)+1 \le 2x \le 2k+1$

$\Downarrow$

$k-12+\frac{1}{2} \le x \le k+\frac{1}{2}$

=> при $x \in \mathbb{Z}$ $k-12+1 \le x \le k$

=> $x \in \{k-11, k-10, \dots k-1, k\}$.

Среди 19 пар прямых через т. A и т. B в 9 $a, b \vdots 2$, в 8 – $a, b \not\vdots 2$. Т.к. для всех точек, лежащих на прямой вида $y=t-2x$ $y+2x=t=const$, то для каждой выбранной прямой ($y=a-2x$ или $y=b-2x$) нам подходят все (любые) целые точки с неё внутри параллелограмма.

=> по правилу сложения и умножения всего пар точек A и B у нас $9 \cdot 13 \cdot 13 + 8 \cdot 12 \cdot 12 = 2673$.

пары с чётными a, b
вар. точек на $y=a-2x$
вар. точек на $y=b-2x$
пар с нечётными a и b

Ответ: 2673

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

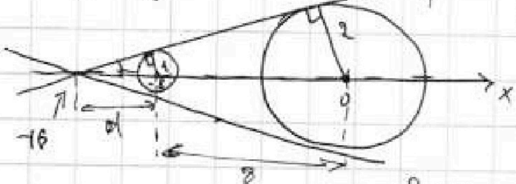
Заметим, что $(x+8)^2+y^2-1\le 0$ – ур-ние ~~окружности~~ круга с центром $(-8;0)$ и радиусом $\sqrt{1}=1$,
$x^2+y^2-4\le 0$ – с центром $(0;0)$ и радиусом 2.

Причём эти круги не имеют общих точек. (мин. x для второй $x=-2$, т.к. $x^2-4\le -y^2\le 0 \Rightarrow |x|\le 2$) макс. x для первой: $x=-7$, т.к. $(x+8)^2-1\le -y^2\le 0 \Rightarrow |x+8|\le 1$); $-7<-2$) $\Rightarrow$ неравенство $((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0$ верно для всех точек этих кругов, и только для них.

С каждым из кругов любая прямая плоскости может иметь либо 0, либо 1 (касание), либо бесконечно много точек (секущая).

Т.к. $ax-y+10b=0$ – ур-ние прямой, и система должна иметь ровно 2 решения, то эта прямая должна иметь в сумме с двумя кругами ровно 2 общих точки $\Rightarrow$ по 1 с каждым $\Rightarrow$ это одна из 4х общих касательных.

1) рассмотрим две внешние общие касательные. В силу симметрии они пересекутся на линии центров кругов (в данном случае – OX), образуют равные углы α с этой осью.



Пусть расстояние от точки пересечения касат. до центра меньшего круга – $d \Rightarrow$ до другого центра $d+8$ (т.к. $0-(-8)=8$)

Радиусы, проведённые в точки касания одной из касательных, перпендикулярны ей $\Rightarrow$ параллельны друг другу $\Rightarrow$ с OX и этой касат. образуют подобные прямоуг. $\Delta\Delta \Rightarrow \frac{1}{d}=\frac{2}{d+8}$, где 1 и 2 – длины радиусов.

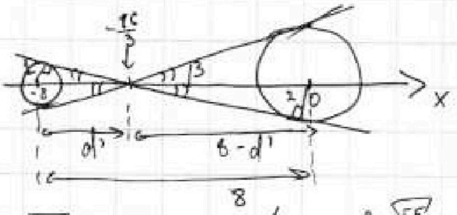
$\Rightarrow d+8=2d \Rightarrow d=8$.

В меньшем из треугольников найдём второй катет по т. Пифагора: $\sqrt{8^2-1}=\sqrt{63}$

$\Rightarrow tg\alpha=\frac{1}{\sqrt{63}}=\frac{\sqrt{63}}{63}$

По условию касательные имеют уравнение $y=ax+10b \Rightarrow a$ – тангенс угла, который образует ~~касательная~~ прямая с положит. направлением $OX \Rightarrow$ для внешних касательных $a=\pm\frac{\sqrt{63}}{63}$.

2) аналогично для внутренних общих касательных: Только они уже образуют угол β с OX.



Запишем аналогичное отношение подобия: $\frac{d'}{1}=\frac{8-d'}{2}$

$\Rightarrow 2d'=8-d' \Rightarrow d'=\frac{8}{3}$

$\Rightarrow$ второй катет в меньшем треугольнике $\sqrt{\frac{64}{9}-1}=\frac{\sqrt{55}}{3}$ $\Rightarrow tg\beta=\frac{1}{\sqrt{55}}\cdot 3=\frac{3\sqrt{55}}{55}$.

$\Rightarrow$ для ~~внешних~~ внутренних касательных $a=\pm\frac{3\sqrt{55}}{55}$

Для каждого из 4х случаев мы знаем точку на прямой ($(-16;0)$ или $(-\frac{16}{3};0)$) и её коэф. наклона $\Rightarrow$ можно восстановить $10b$ и b, b будет существовать.

Ответ: $a\in\{-\frac{\sqrt{63}}{63}; +\frac{\sqrt{63}}{63}; -\frac{3\sqrt{55}}{55}; +\frac{3\sqrt{55}}{55}\}$.

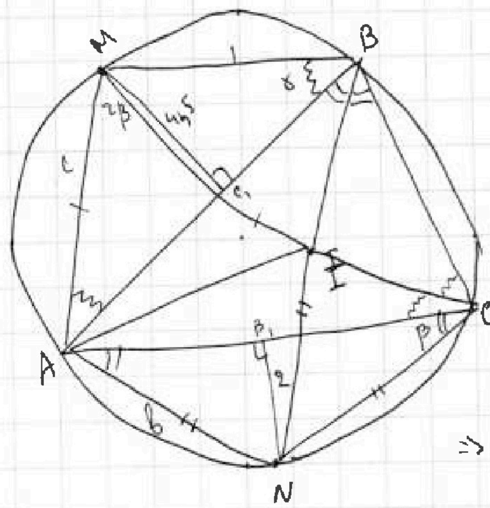
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7



По лемме о трезубце $AM=MB=MI$, $AN=NC=NI$, где I - центр вписанной окружности $\triangle ABC$ (т.к. т. пер. биссектр) (*)

Пусть C_1, B_1 - основания перпендикуляров из M на AB и из N на AC соответственно.

$I = CM \cap BN$, т.к. BN и MC - биссектрисы (дуги AN и NC, AM и MB равны).

Пусть $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$

$\Rightarrow \angle AMI = \angle AMC = \frac{\cup AC}{2} = \angle ABC = 2\beta$,

$\Rightarrow$ в $\triangle AMI$ по т. косинусов ($AM = MI = c = MB$):

$AI^2 = c^2 + c^2 - 2c\cdot c\cdot\cos 2\beta = 2c^2(1-\cos 2\beta) = 2c^2\cdot 2\sin^2\beta$

$\Rightarrow AI = 2c\cdot\sin\beta$. (1)

$\angle ACN = \frac{\cup AN}{2} = \angle ABN = \frac{\angle ABC}{2} = \beta$ $\Rightarrow$ в прямоуг. $\triangle CB_1N$ $\sin\beta = \frac{B_1N}{NC} = \frac{2}{b}$, где $b = AN = NI = NC$.

Аналогично $\angle MBA = \angle MCA = \gamma$, в $\triangle MBC$, $\sin\gamma = \frac{4,5}{c}$

Пусть R - радиус опис. окр $\triangle ABC$ $\Rightarrow$ в $\triangle AMB$ по т. синусов $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$,

в $\triangle ACN$ по т. синусов $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$

$\Rightarrow \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{c}{4,5/c} = \frac{c^2}{4,5} = 2R = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{b}{2/b} = \frac{b^2}{2}$ $\Rightarrow \frac{c^2}{9}\cdot 2 = \frac{b^2}{2} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{3}{2}$.

Пусть $c = 3y$, $b = 2y$ $\Rightarrow \sin\beta = \frac{2}{b} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}$.

Подставим c и $\sin\beta$ в (1): $AI = 2\cdot 3y\cdot\frac{1}{y} = 6$.

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

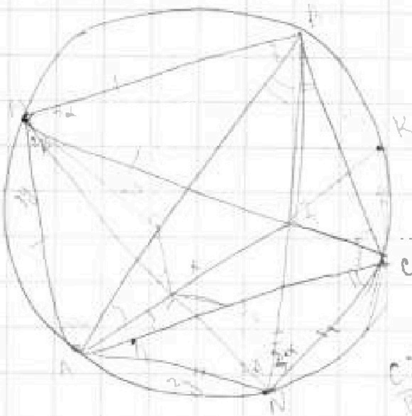
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

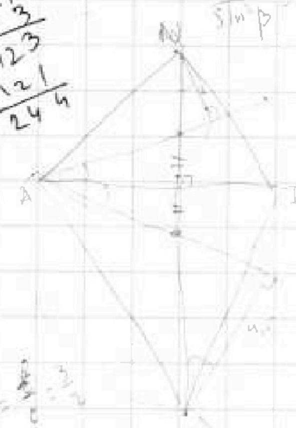
МФТИ

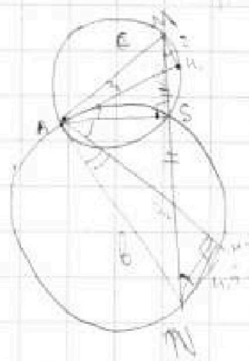
Черновик

$\frac{c}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$\begin{cases} x^2 = 2c^2(1-\cos 2\beta) \\ x^2 = 2b^2(1-\cos 2\alpha) \end{cases}$





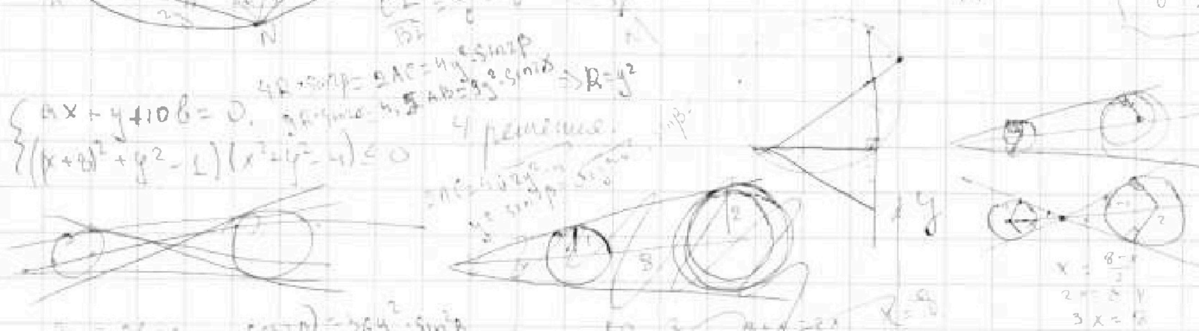


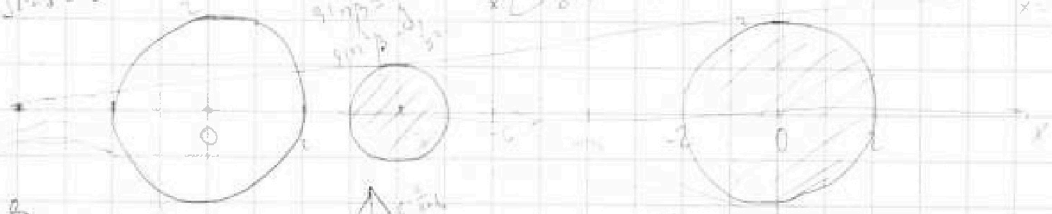
$\frac{c^2}{b^2} = \frac{9}{4}$

$\frac{c}{b} = \frac{3}{2}$

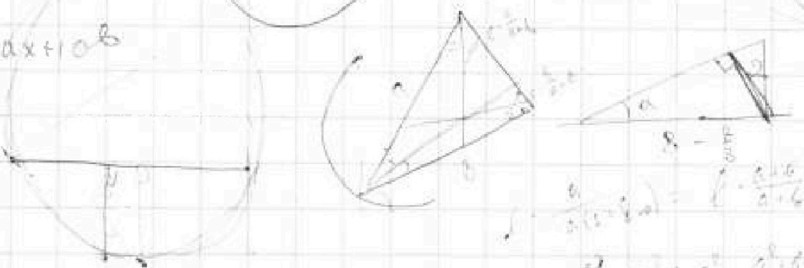
$\begin{cases} ax + y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \le 0 \end{cases}$

4 решения





$y = ax + 10b$



$2x^2 + 2x + 3 - 2x^2 + 5x - 3 = 7x - 7$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$

$a + b - 2\sqrt{ab} = a^2 + b^2 - 2ab = (a+b)^2 - 4ab$

$(a+b)(a+b-1) = 2ab(2\sqrt{ab} - 1)$

$a - \sqrt{a} = b - \sqrt{b}$

$a + \sqrt{a} = b + \sqrt{b}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

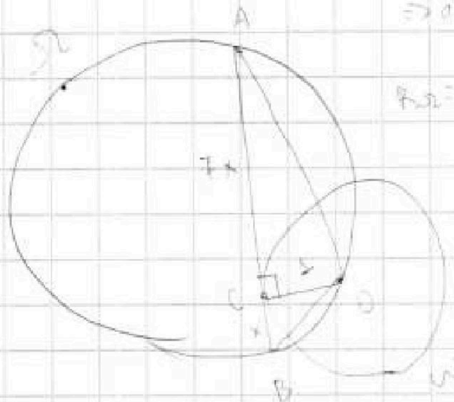
1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☒	☒	☒

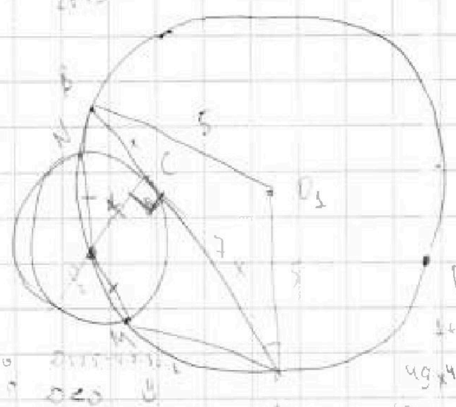
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$\Rightarrow a, b = \frac{m}{4}$





$(1+x^2)(1+49x^2) = 100$

$1 + x^2 + 49x^2 + 49x^4 = 100$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 + (2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1}$

$\frac{1}{47} \le x \le 1$

$2(y_2 - y_1) + y_2 - y_1 = 12$