



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что степени вхождений 2 в abc никак не влияют на степень вхождений \Rightarrow в abc. Поэтому сможем найти макс. степень вхон. 2-ки.

ab: 2^{14} ; bc: 2^{13} ; ac: 2^{20} Перенумеровали

$(abc)^2 : 2^{51}$ Заметим, что степень вхон.

в квадрат любого пролого числа четна \Rightarrow

$(abc)^2 : 2^{52}$ Пример = $a = k_1 \cdot 2^{14}$ $b = k_2 \cdot 2^{13}$ $c = k_3 \cdot 2^{20}$

макс. степень вхожд. 2 в a это ~~24~~ 9

b в это 6 ~~вхождений~~ c > 10 ~~11~~

Теперь разберемся с 7. Пусть x_i - степени вхождений 7 в число i.

Тогда:

$$\begin{cases} x_a + x_b = 10 + k_1 \\ x_b + x_c = 17 + k_2 \\ x_c + x_a = 37 + k_3 \end{cases} \quad k_1, k_2, k_3 \geq 0$$

Ух сумма

$$x_a + x_b + x_c = \frac{32 + k_1 + k_2 + k_3}{2}$$

$$x_b \cdot x_a + x_b + x_c - x_c - x_a = -10 + k_1 + k_2 - k_3$$

$$x_b = -5 + \frac{k_1 + k_2 - k_3}{2}$$

Заметим, что $x_b \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{k_1 + k_2 - k_3}{2} \geq 5 \Rightarrow \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2} \geq 5 \quad (\text{т.к. } k_3 \geq 0) \Rightarrow$$

$$x_a + x_b + x_c \geq 37. \text{ Пример } x_a = 15; x_b = 0; x_c = 22$$

Чтого: Пример синации прого

a = ~~2⁹ · 7¹⁵~~ ; b = ~~2¹³ · 7¹³~~ $\Rightarrow abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

b = ~~2⁶ · 7¹³~~
c = ~~2¹⁷ · 7²²~~

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

u2

$$\text{Пусть } \begin{cases} a+b = mk_1 \\ a^2 - 6ab + b^2 = mk_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = mk_1 \\ (a+b)^2 - 8ab = mk_2 \end{cases}$$

$\rightarrow 8ab : m$. Заметим, что если $a : m$,

то так $a+b : m$ ~~то~~ $b : m$, то a и b взаимно
просты, аналогично $b : m$. Тогда образы

$b : m$. Пример на $m=8$

$$a=1; b=7$$

$$\frac{1+7}{49-42+1} = \frac{8}{8} = 1$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

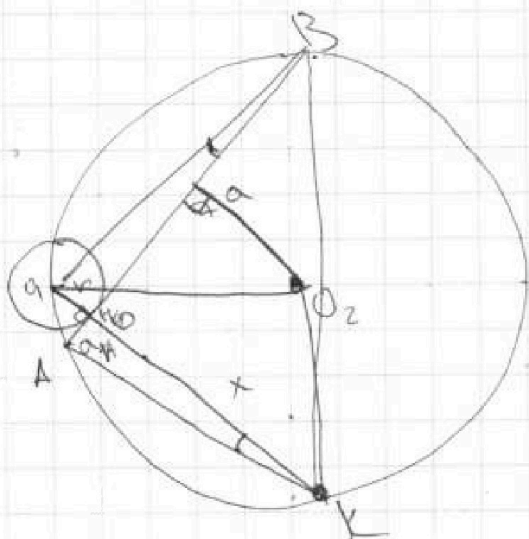
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



13



Стенки
 O_1, O_2 - центры
 окружностей.
 H - точка касания
 Луча Продана OH
 до пересечения с Ω
 в точке
 H Луча $HK = x$.

стенки точки OH и: $r \cdot x = a^2$

где $AB = a$

AK - биссектриса

$$x + r = \sqrt{2} \cdot r$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



24

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

ОГЗ:

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \left. \begin{array}{l} 1 \\ 1,5 \end{array} \right\}$$



$$x \in (-\infty; 1] \cup [1,5; \infty)$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4} \text{ — корней нет} \Rightarrow \text{всегда больше 0.}$$

Возведем в квадрат.

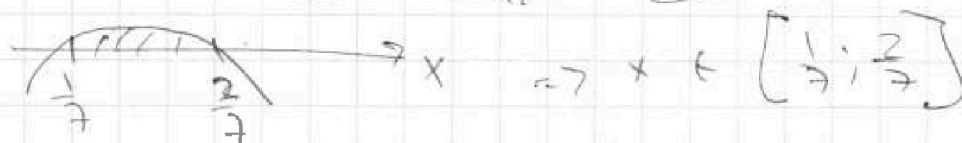
$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = (2 - 7x)^2$$

$$2 - 7x - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = (2 - 7x)^2$$

$$2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = (7x - 1)(2 - 7x)$$

$$(7x - 1)(2 - 7x) \geq 0$$

$$28x^2 - 26x + 2 \geq 0 \quad x_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{24}}{56}$$



$$\Rightarrow 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (7x - 1)^2(2 - 7x)^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

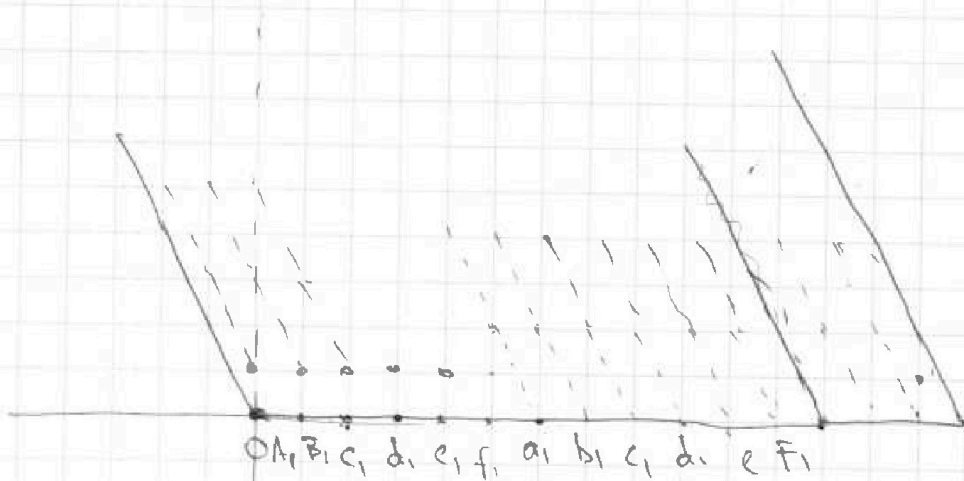


- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

р 5



Закфиксируем x_1 и y_1 . Тогда мы получаем пар (x_2, y_2) это прямая $y_2 = 12 + x_1 + y_1 - 2x_2$.

Возьмем точки на прямой как $y = 0$.

Для каждой точки найдем в паре ей прямая с мин. решеткой (через 6 кл. вправо от нее). И на каждой этой прямой будет на 10.13 точек 13 разных решеток.

А на ~~каждой~~ прямой будет 10.13 точек.

Возьмем теперь точки на $y = 1$. Тут аналогично будет для каждой точки в паре ей прямая с 13 разными решетками. Однако теперь будет на одну меньше $-2x_2$ т.к. уменьшилась решетка. И на этом уровне будет 9.13 точек.

На уровне $y = 2$ ситуация будет аналогичная где макс. уровень $y = 24$. \Rightarrow вообще уровень будет на одну меньше $2x_2 + 12$. На паре уровней решеткой будет 13 (9.13). Уровней $+ 10$ уровней будет 12. А на последнем еще 10.13 точек.

Итого сумма это $130 + 12 \cdot 13 \cdot 19 = 3184$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

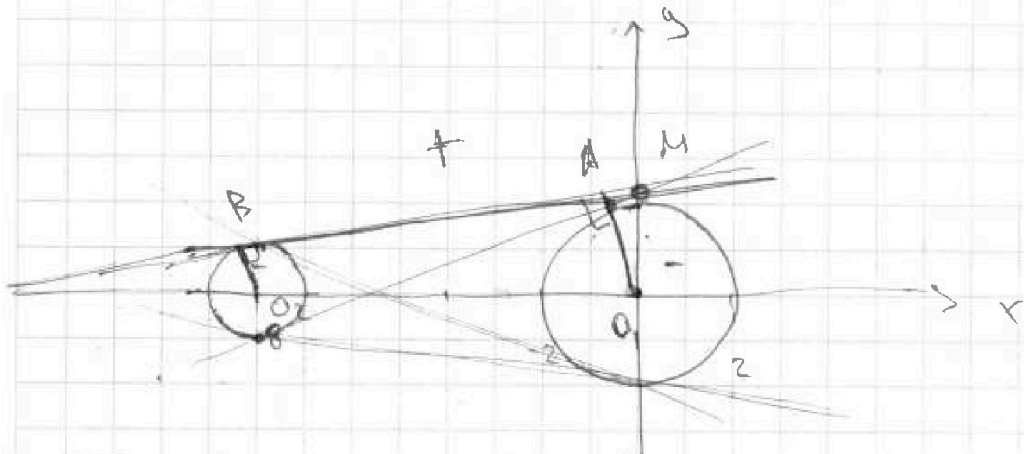


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решим уравнения

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Это 2 окружности.



Тогда когда (x, y) находится на ней, она имеет выражение $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)$ принимает 0, а когда "проходит" между окруж. имеет знак. Поэтому внутри окр. отриц. значение произведения, а вне полож.
 Так мы увидим когда прямая имеет равно 2 точки пересечения, то это будет общ. касат. Если можно провести 1 касат. Но достаточно взять 2-х верхних, или нижних будут симметричны и не будут отличаться только знаком. Рассмотрим более подробно касат. Пусть она касается в точке A и B. Тогда $O_2O_1 = 8 \Rightarrow$ Пусть прямая касат. пересекает ось x в точке C. \Rightarrow из координат $O_2C = O_2O_1 = 8 \Rightarrow CO_1 = 16$. Пусть эта же касат. пересекала ось y в точке M. Тогда:

~~$\frac{O_1C}{O_1A} = \frac{O_2C}{O_2A}$~~ \rightarrow их стороны не равны

$$a_1 = \frac{O_1M}{O_1C} = \frac{O_1A}{AC} = \frac{2}{\sqrt{16^2 - 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{252}} = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

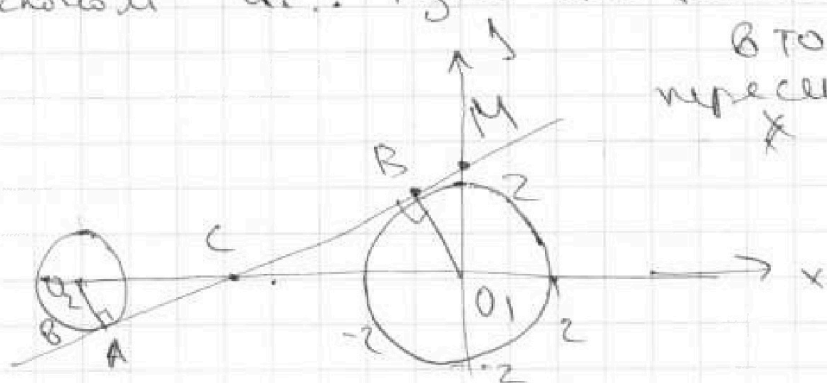
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим касательную к окружности в точке A . Пусть эта касательная l в точке A и B пересекает ось x в T . C ось y в T .



$$\Delta O_2 \nabla C \nabla O_1 \text{ в } C \Rightarrow O_2 C = \frac{8}{3} \Rightarrow CO_1 = \frac{16}{3}$$

$$CB = \sqrt{\frac{256}{9} - 4} = \frac{\sqrt{220}}{3} ; a_2 = \frac{O_1 M}{CB} = \frac{O_1 B}{CB} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{220}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{55}}$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{63}} ; a_2 = \frac{6}{\sqrt{55}} \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{\sqrt{63}} ; a_4 = -\frac{6}{\sqrt{55}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{63}} ; -\frac{1}{\sqrt{63}} ; \frac{6}{\sqrt{55}} ; -\frac{6}{\sqrt{55}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

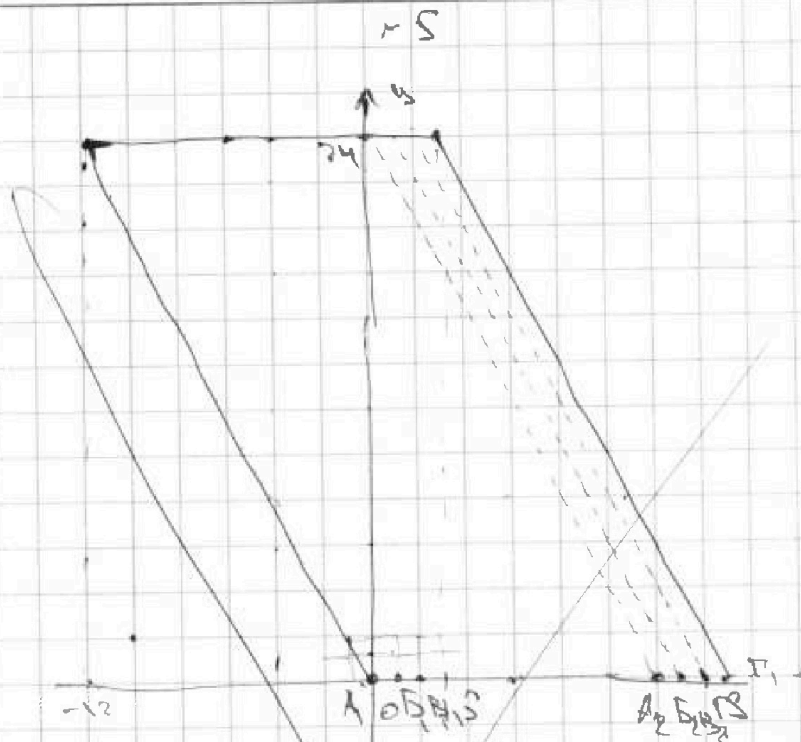
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!



Зафиксируем точку (x_1, y_1) где y_1 и найдем
мн. точек (x_2, y_2) удовлетв. условиям задачи

Пусть $x_1 = 0; y_1 = 0$

$\rightarrow 2x_2 + y_2 = 12 \rightarrow y_2 = 12 - 2x_2$. То есть

для фиксированной точки x_1, y_1 в \mathbb{Z}

то есть пары (x, y) на прямой $y_2 = 12 - 2x_2 + y_1 + 2x_2$

Тогда выберем минимальную границу. На ней
можно найти и точки A_1, B_1, C_1, D_1 ~~каждой~~

$(0, 0); (1, 0); (2, 0); (3, 0)$ каждой из

которых соответствует и ~~каждой~~ мн. точек-пар.

(с прилики) на каждой прямой находим

13 ~~целых~~ точек \rightarrow для каждой границы

будет $24 \cdot 4$ пар. Подумавшим на следующей

паре x и y чисел (по $x=1$). Там аналогично

и прилики на каждой из которых 13 решений.

При этом пары не повторяются, что и всего пар

$4 \cdot 24 \cdot 13$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b = mk_1$$

$$(a-b)^2 - 4ab = mk_2$$

$$(a+b)^2 - 8ab = m$$

$$8a+b = m$$

$$8a+b = m$$

$$8a+b = m$$

$$(8a+b)$$

$$8a+b = m$$

$$8a+b = m$$

$$b = m$$

$$(b-7a-1) = m$$

$$8 = m$$

$$10 \ 8$$

$$5 \ 3$$

$$3 \ 8 \ 6 \ 8$$

$$10 \ 8$$

$$25 + 9$$

$$100 + 64$$

$$806$$

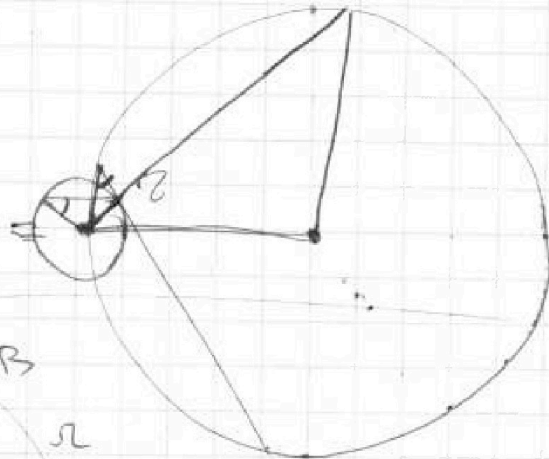
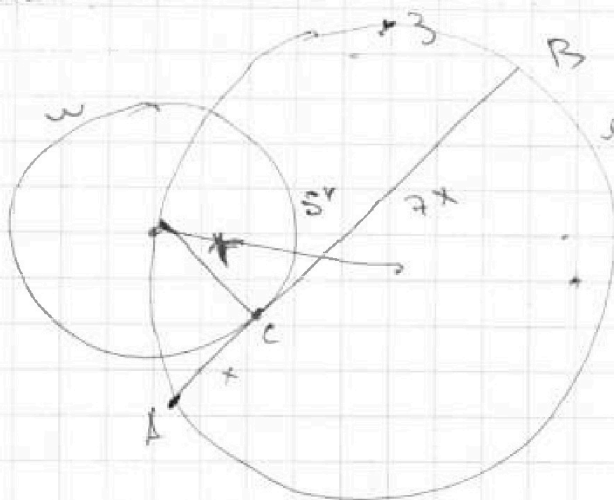
$$7 \ 1$$

$$50 + 42$$

$$7, 1$$

$$7+1$$

$$49+1 = 42$$



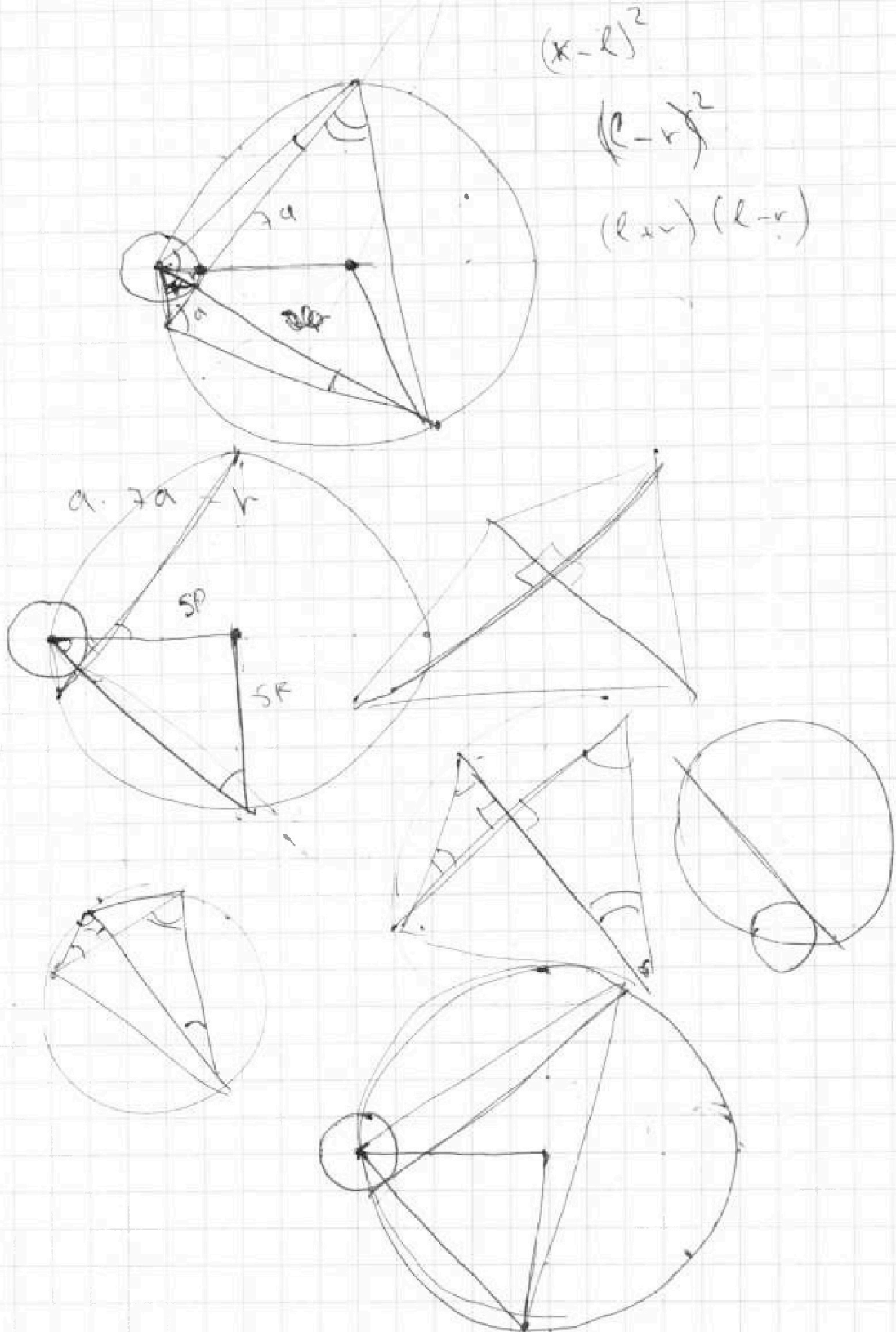
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

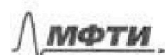
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~a = 2^10~~
~~c = 2^10~~

b = 2^6

a = 2^9 c = 2^10 b = 2^6



64-1

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$\frac{a+b}{(a-b)^2-4ab}$

x+1

~~a+b~~ ~~(a-b)^2-4ab~~

(x-1)(2x-3)

a+b; m: a^2+b^2-6ab

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$



~~2x^2-5x+3 = 0~~

~~$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1.5 \end{cases}$~~



$\sqrt{(x+1)(2x-3)} = \sqrt{2x^2+2x+1} + 2-7x$

$2x^2+2x+1 \geq 0$

$x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{4}$

$2-7x - 2\sqrt{\dots} = (2-7x)^2$

(2-7x)(1-7x)

~~u~~ $(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = ((2-7x)(1-7x))^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k_1$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot k_2$

$ac = 2^{30} \cdot 7^{37} \cdot k_3$

$(abc)^2 = 2^{61} \cdot 7^{64} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$

$2^{32} \cdot 7^{64}$

$\frac{2^{32} \cdot 7^{64}}{2^{61} \cdot 7^{64}} = \frac{2^{-29}}{1}$

62

31

~~$b: 2^{17} \cdot 7^{17}$~~ ~~$a: 2^{14} \cdot 7^{10}$~~

$a = 2^{10} \cdot 7^5$

$b = 2^4 \cdot 7^5$

$$\begin{cases} y_a + y_b = 10 \\ y_b + y_c = 17 \\ y_a + y_c = 37 \end{cases}$$

$y_c = 22$

$a^2 = 2^{27} \cdot 7^{30}$

\Rightarrow

$a = 2^2$

$a = 7^{15}$

$a = 2^{14}$

$c = 7^{17}$

$x_a + x_b \geq 10 + k_1$

$x_b + x_c \geq 17 + k_2$

$x_c + x_a \geq 37 + k_3$

$2x_c = 64 - k_2 + k_3 - k_1$

$2x_a = 30 - k_3$

$2x_b = -10 + k_1 + k_2 - k_3$

$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{\frac{2^2 + 7^2}{2}}$

$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$

$y = ax + b$

~~2x~~

$2x_b + x_a + x_c \geq 27$

$x_c + x_a \geq 37$

~~$a^2 = 2^{24} \cdot 7^{17}$~~ ~~$a = 2^{22}$~~ ~~$a = 2^2$~~ ~~$a = 7^{15}$~~

~~k_1~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



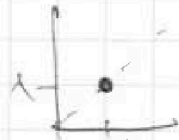
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



12.13

13.19.12

13-10



19
12

$$\begin{array}{r} 20 \\ 12 \\ \hline = 240 \\ - 12 \\ \hline 228 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b=0 \\ ax_0-by_0+c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 12 \\ \hline 38 \\ 19 \\ \hline 228 \end{array}$$

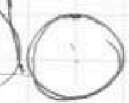
$$13(228+6) = 13 \cdot 238$$

2380

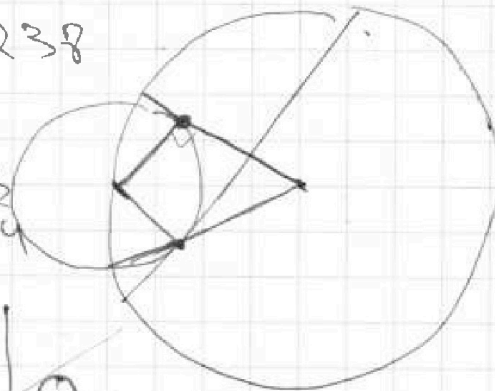
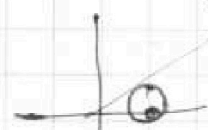
209

3184

(ax_0+by_0+c)

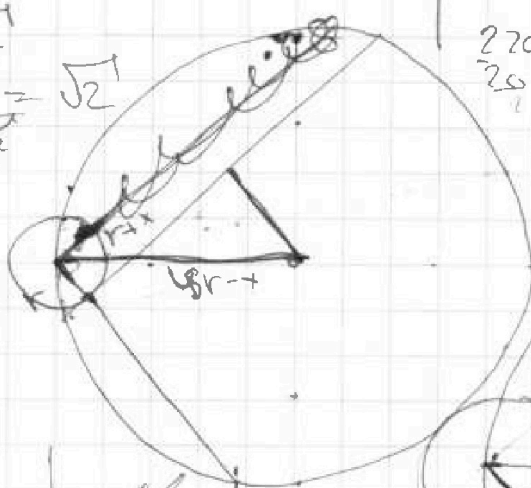


$$\begin{array}{r} 238 \\ 70 \\ \hline 703 \end{array}$$



$$\sqrt{r^2+b^2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{a+b}$$



$$\begin{array}{r} 220 \\ 20 \\ \hline 250 \end{array}$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$

$$\sqrt{a}$$

16

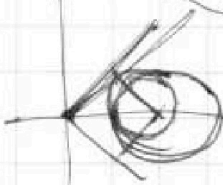
2

32

64

256

4



$$\sqrt{a+b}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ 36 \\ \hline 220 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 252 \\ 24 \\ \hline 276 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

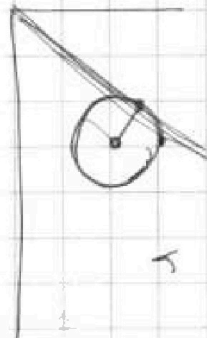
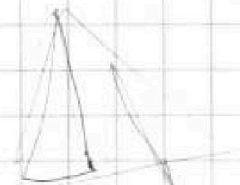
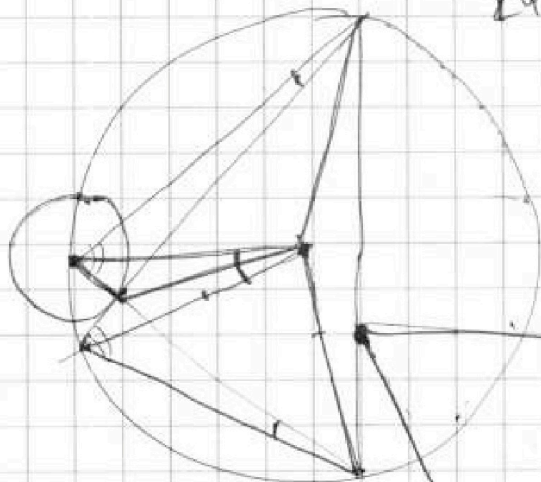


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$24x - 49x^2 - 2 \pm 2x$$

$$x_{1,2} = -21 \pm \dots$$



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 2}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$\sqrt{(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2} = r$$

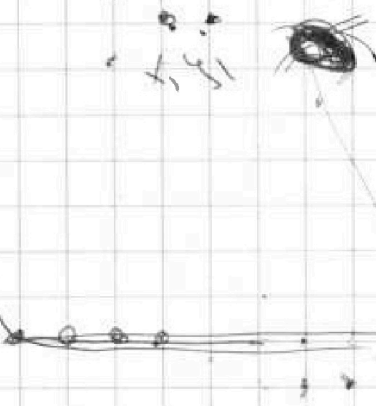
$$y = ax + b$$

$$a = \frac{y_0 - x_0}{b}$$

$$\sqrt{(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2} = r$$

$$ax + b = y_0 - x_0$$

$$\sqrt{(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2} = r$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

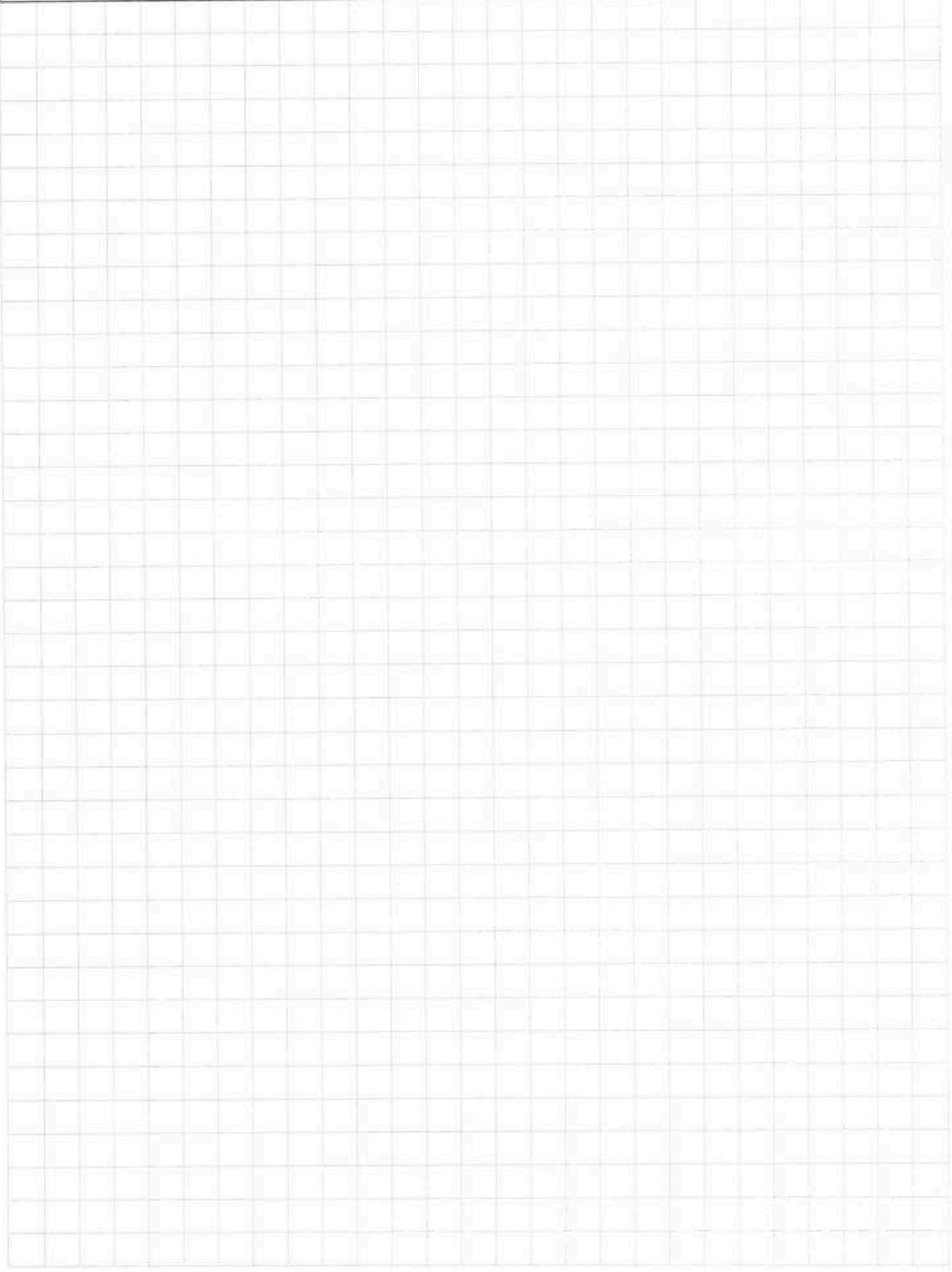
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

