



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№

Т.к. нам надо найти наименьшее abc , то скажем, что
числа a, b и c ~~имеют вид~~ имеют вид $2^x \cdot 7^y$ без дополнительных
множителей. a_2, b_2, c_2 — степени ~~чисел~~ при a, b, c соответственно.
 a_7, b_7, c_7 — аналогично степени при 7 .

$$a_2 + b_2 \geq 14$$

$$b_2 + c_2 \geq 17$$

$$a_2 + c_2 \geq 20$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 51$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 26$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c(\min) = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Ответ: ~~2²⁶ · 7³⁷~~ $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

, если обе ab делятся
на $(a+b)$, то есть
дробь можно было бы сократить
на $a+b$, но \rightarrow

$\Rightarrow \frac{ab}{a+b}$ - несократимая дробь, т.к. $a+b$ не имеет общих
делителей $\Rightarrow a+b$ не имеет делителей на, кроме

, но член $8ab$ можно сократить еще и на 8
то есть если ab будет делиться на 8, то
и всю дробь можно будет разделить на 8.
если мы берем $a=3$ и $b=5$, то это работает
($\frac{a}{b}$ - несокр., $a+b$ кратно 8.)

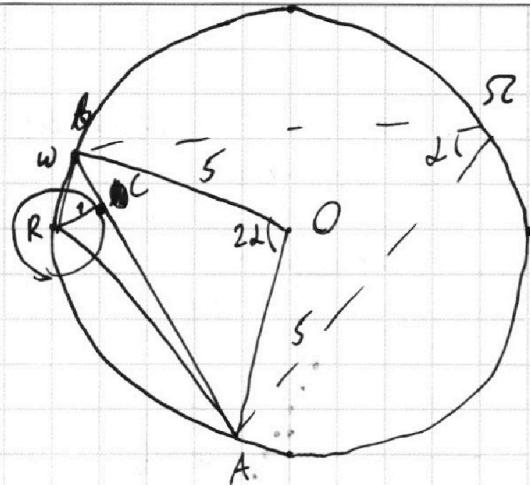
$$\Rightarrow m = 8$$

Ответ: $m = 8$

- | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 2 | <input checked="" type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | 6 | <input type="checkbox"/> | 7 |
|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle AOB = 2L$
Тогда $\angle BAO = \angle ABO = 90 - L$
поэтому.

Пусть $BC = y$. Тогда $AC = 8y$

По т-му синусов для $\triangle AOB$:

$$\frac{5}{\sin(90-L)} = \frac{8y}{\sin 2L} \Rightarrow 8y = 5 \cdot 2 \cdot \sin L \\ \Rightarrow y = \frac{5}{4} \cdot \sin L$$

$\angle BRA$ - вписанный и отнимается на дугу, противоположную дуге
 $2L \Rightarrow \angle BRA = 180 - L$

$$\sin \angle BRA = \sin(\angle BRC + \angle CRA) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+49y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{7y}{\sqrt{1+49y^2}} =$$

$$= \frac{8y}{\sqrt{(1+y^2) \cdot (1+49y^2)}} \quad \sin \angle BRA = \sin(180 - L) = \sin L \\ \sin L = \frac{y \cdot 4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{8y}{\sqrt{(1+50y^2+49y^4)}} = \frac{4y}{5} \Rightarrow (10)^2 = 1 + 50y^2 + 49y^4$$

$$49y^4 + 50y^2 - 99 = 0$$

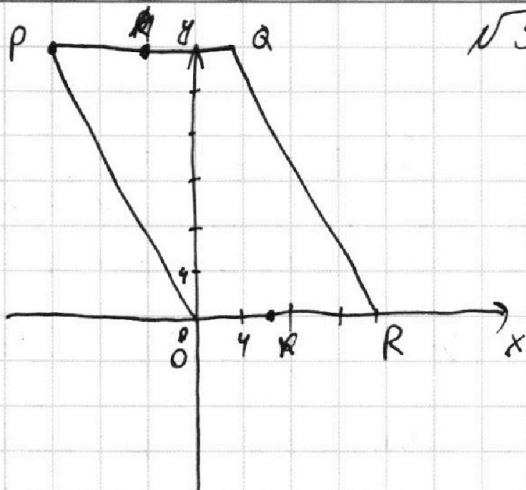
$$y = \sqrt{\frac{-50 + \sqrt{50^2 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{2 \cdot 49}} =$$

$$= \sqrt{\frac{-50 + \sqrt{11904}}{98}} = \sqrt{\frac{98}{98}} = 1 \quad \Rightarrow AB = 8y = 8$$

Ответ: $AB = 8$

- | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | 4 | <input checked="" type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | 6 | <input type="checkbox"/> | 7 |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|

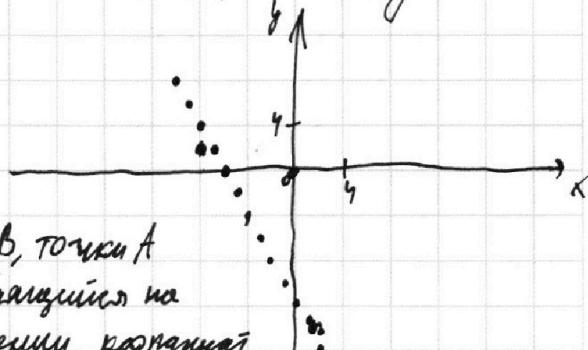
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15

Поймем, как выходит
 $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 - 12 = 0$

Скажем, что $x_2, y_2 = 0$



Относительно точки В, точки А
(возможные) образуют ряд, находящийся на
прямой $y = -12 - 2x$ (при заменении координат
 x, y у точки В) Наклон прямой -2 , как и у параллелей.

⇒ Если точки В (возможные) будут находиться в параллелях

$$\text{с } \triangle MQR, \quad X_K = X_0 + 6, \quad X_M = X_0 + 6 \\ Y_K = Y_0, \quad Y_M = Y_0$$

Для каждого из точек В будут доступны 13^в точек А
 $\frac{M(K)(Y_p - Y_0)}{2} + 1 = 13, \quad \frac{Y_p - Y_0}{2} = 12$
Несколько параллелей

⇒ Число параллелей равнества точек В для которых есть 13
точек + 6 параллелей: $(X_A - X_n + 1) \cdot (Y_A - Y_n + 1) = 10 \cdot 13$

$$\Rightarrow \text{Параллельное: } 10 \cdot 13 \cdot 13 = 1690$$

Количество точек В, для которых 12 пар: $10 \cdot 12 \Rightarrow$
пар всего: $10 \cdot 12 \cdot 12 + 10 \cdot 13 \cdot 13 = 10 \cdot (144 + 169) = 3130$

Ответ: 3130 пар



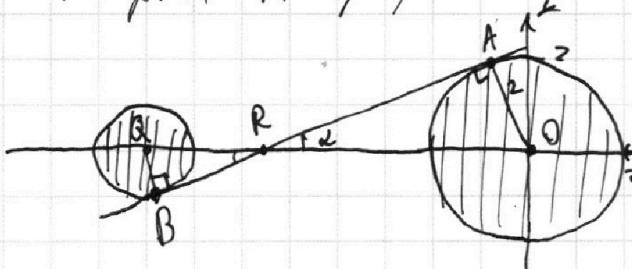
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

окружн.
 $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

Начертим на графике



$y = 10b + ax - \text{прямая}$

\Rightarrow Зрешома только когда прямая касається 2х окружностей

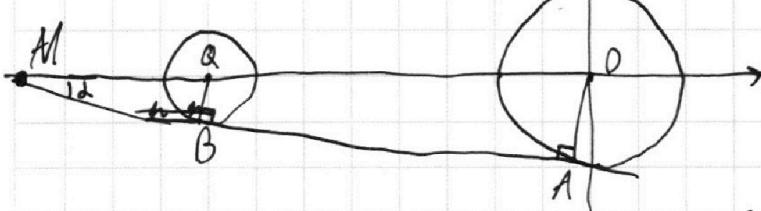
$\triangle QRB \sim \triangle ARA$

$\Delta QRB \sim \Delta ORA \text{ по 2м угла}$
 $\Rightarrow \frac{QR}{RO} = \frac{QB}{AO} = \frac{1}{2} \Rightarrow QR = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow \sin \angle = \frac{3}{8} \Rightarrow \cos \angle = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle = a = \frac{3}{\sqrt{55}}$

аналогично подойдет $a = -\frac{3}{\sqrt{55}}$



$\triangle MQB \sim \triangle MOA \text{ по 2м угла}$

$\Rightarrow \frac{MQ}{MO} = \frac{QB}{OA} \Rightarrow MQ = QO = 8$

$\Rightarrow \sin \angle = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos \angle = \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle = a = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

аналогично $a = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$

$\Rightarrow a = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}, -\frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$

$\text{Ответ: } a = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}, -\frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Geometriya 2:

$$a_1 + b_2 = 14$$

$$b_2 + c_2 = 17$$

$$a_2 + c_2 = 20$$

$$2(a+b+c) = 51$$

$$\Rightarrow \min(a+b+c) = 26$$

$(x \notin (1; 1,5))$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 2}}{4}$$

$$(x-1)(2x-3) + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)} = 4 + 4x^2 - 28x$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 = 4x^2 - 3x + 4$$

$$\Rightarrow -45x^2 + 25x = 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)} \quad | \cdot 0,25$$

$$5x(5-9x) = 2\sqrt{(x-1)(2x-3)\dots} \quad | \cdot 0,5$$

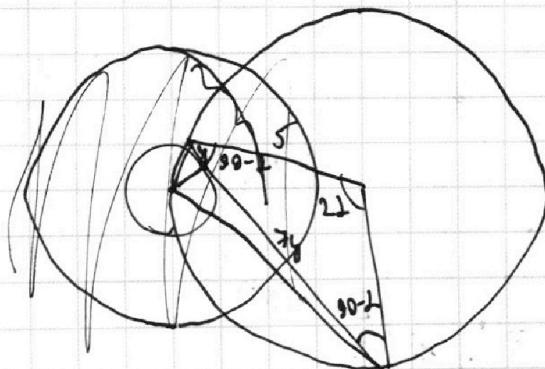
$$25x^2(25+81x^2-90x) = 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)} \quad | -\sqrt{25} = -1,5$$

$$625x^2 + 2025x^4 - 2250x^3 = (96x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12) = 0$$

$$2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0 \quad | \cdot (-52) - 1$$

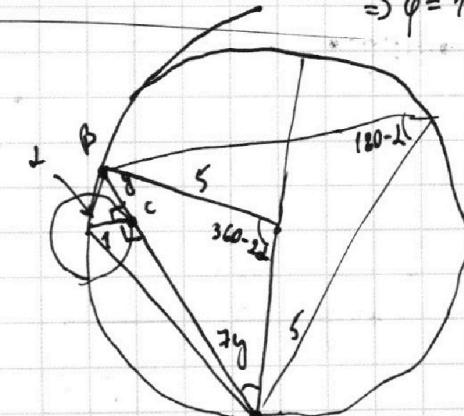
$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-2ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-2ab} \quad | \cdot 8y$$

$$180 - (360 - 2L) = \\ = 2L - 180 \\ \Rightarrow \psi = 180 - L$$



$$\frac{5}{\cos 2L} = \frac{8y}{\sin 2L} \Rightarrow$$

$$8y = 5 \cdot 2 \cdot \sin 2L \\ = 18 \cdot \sin L \Rightarrow y = 1,25 \cdot \sin L$$





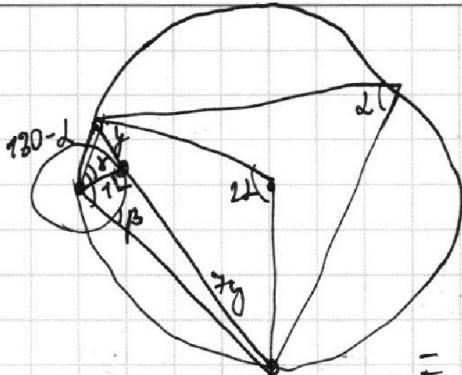
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 **v** 2 3 **v** 4 5 **V** 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{5}{4} \cdot \sin L$$

$$\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha =$$

$$= \sin(\gamma + \beta) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{\frac{x^2}{y^2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}} =$$

$$= \frac{8y}{\sqrt{1+y^2} \cdot \sqrt{1+7^2 y^2}} = y \cdot \frac{4}{5} \quad y \neq 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Q+5}{4} \right)^2 = (1+y^2) \cdot (1+49y^2)$$

$$100 = 1 + 50y^2 + 49y^4$$

$$d = -90 + 50t + 49t^2$$

$$t = -50 + \sqrt{50^2 + 4 \cdot 49 \cdot 90}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-50 + \sqrt{2500 + 4 \cdot 99 \cdot 199}}{2 \cdot 99} = 2 \cdot 49$$

$$= -180 \cancel{4} \cancel{2} \cancel{4} \cancel{9} -50 + 1 \quad \underline{\times 99}$$

$$\sqrt{\frac{-50+148}{2 \cdot 49}} = \sqrt{\frac{98}{98}} = \underline{\underline{1}}$$

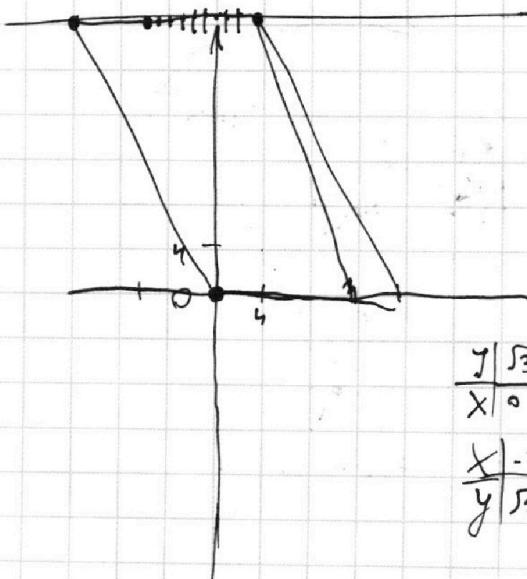
$$\begin{array}{r}
 & 142 \\
 \times & 148 \\
 \hline
 & 1136 \\
 & 560 \\
 \hline
 & 21904
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 142 \\ 142 \\ \hline 184 \\ \hline 189 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 & 49 \\
 \times & 49 \\
 \hline
 & 441 \\
 + & 196 \\
 \hline
 & 2401 \\
 \cancel{+} & 1960 \\
 \hline
 & 196 \\
 \cancel{+} & 196 \\
 \hline
 & 196 \\
 501 & \times 99 \\
 \hline
 & 45 \\
 \hline
 & 1960 \\
 7640 & - 1960 \\
 \hline
 & 5600 \\
 7640 & - 5600 \\
 \hline
 & 7264
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \cdot \text{ans} \\ + 144 \\ \hline 169 \\ - 313 \end{array}$$

12-13-10
~~7/11/10~~



$\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{6}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{10}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
2	1	3	2	7	5	6

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\sqrt{13}$	$\sqrt{5}$	1	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$		

$$y^2 - 5x^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = ax + 10b$$

$$\Rightarrow ((x+8)^2 + (ax+10b)^2 - 1)(x^2 + (ax+10b)^2 - 4) \leq 0$$

Умножая \Rightarrow получим правую и левую части равенства.

$$(x+8)^2 + a^2x^2 + 100b^2 + 20axb \geq 1$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 100b^2 + 20x \cdot ab = 1 = 0$$

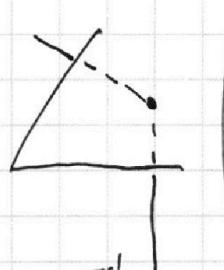
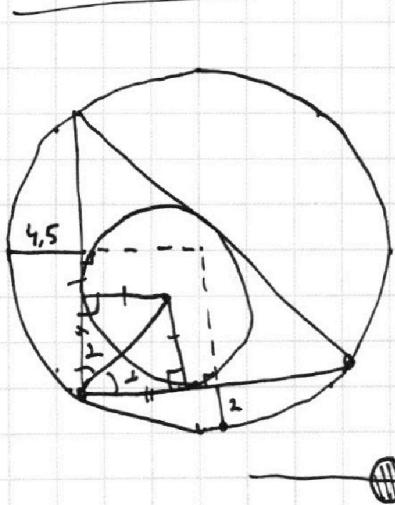
$$x^2(1+a^2) + x(16+20ab) + (100b^2+63) = 0$$

$$x = \frac{-(16+20ab) \pm \sqrt{(16+20ab)^2 - 4(1+a^2)(100b^2+63)}}{2(1+a^2)}$$

$$x^2(1+a^2) + x(20ab) + (100b^2-4) = 0$$

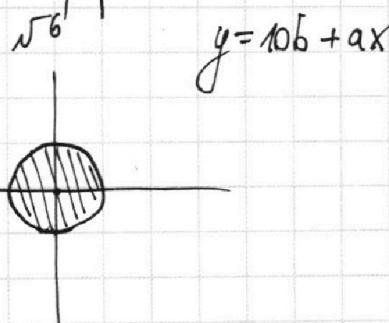
$$x = \frac{-20ab \pm \sqrt{400a^2b^2 - 4(-4)}}{2(1+a^2)}$$

$$x_+ = x_+ \Rightarrow -\frac{(16+20ab) + \sqrt{\dots}}{16 + \sqrt{(16+20ab)^2 - \dots}} = -20ab + \sqrt{\dots}$$



$$\frac{9}{b} \quad \frac{ab}{a+b}$$

$$\frac{5 \cdot 8}{5+8}$$



$$y = 10b + ax$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓