



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a \cdot b \cdot c$ делится ^{хотя бы} на 7^{37} , потому что $ac : 7^{37}$
Пусть $abc \neq 2^{26}$, тогда: степень вхождения "2" в "abc" < 26
 $ab \cdot bc \cdot ac : 2^{14} \cdot 2^{17} \cdot 2^{20} = 2^{51}$

Тогда $a^2 b^2 c^2 : 2^{51}$, так как $a^2 b^2 c^2$ — точный
квадрат натурального числа, то $a^2 b^2 c^2 : 2^{52}$.

$$\text{Значит } \sqrt{a^2 b^2 c^2} = abc : \sqrt{2^{52}} = 2^{26}$$

Значит $abc : 2^{26}$, а мы предположили что
 $abc \neq 2^{26}$ — противоречие

$$\text{Тогда } abc : 7^{37} \cdot 2^{26} \Rightarrow abc \geq 7^{37} \cdot 2^{26}$$

Пример, когда $abc = 7^{37} \cdot 2^{26}$:

$$a = 2^8 \cdot 7^{10}; \quad b = 2^6 \cdot \text{---}; \quad c = 2^{12} \cdot 7^{27}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$ - несократима, значит $\text{НОД}(a; b) = 1$

Пусть $a+b : p$, где p - натуральное число ($p > 1$)

Тогда $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ и $b \not\equiv 0 \pmod{p}$, т.к. $\text{НОД}(a; b) = 1$

Значит $a \equiv -b \pmod{p}$, тогда $a^2 \equiv b^2 \pmod{p} \Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 2b^2 \pmod{p}$

$a \cdot b \equiv b \cdot (-b) \equiv -b^2 \pmod{p}$, тогда $-6ab \equiv 6b^2 \pmod{p}$

Значит $a^2 + b^2 - 6ab \equiv 2b^2 + 6b^2 \equiv 8b^2 \pmod{p}$

Тогда $(a+b) : m$ и $(a^2 + b^2 - 6ab) : m$

Тогда $a^2 + b^2 - 6ab$ при $p = m$: $a^2 + b^2 - 6ab \equiv 8b^2 \equiv 0 \pmod{m}$

$\text{НОД}(a; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; b^2) = 1$

Тогда $b^2 : m$, значит $m \leq 8$

Пример $m = 8$:

$$a = 1 \quad b = 7$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cancel{2x^2 + 2x + 1 = a}$$

$$\text{Пусть } 2x^2 + 2x + 1 = a ; 2 - 4x = b$$

$$\text{Тогда } 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 - 7x + 2 = a - b$$

$$\sqrt{a-b} - \sqrt{a} = b \quad \backslash \text{ возведем в квадрат}$$

$$a - b + a - 2\sqrt{(a-b)a} = b^2$$

$$b^2 - 2a + b = -2\sqrt{a(a-b)} \quad \backslash \text{ возведем в квадрат}$$

$$b^4 + 4a^2 + b^2 + 2b^3 - 4ab - 4ab^2 = 4a(a-b)$$

$$b^4 + 2b^3 + b^2 - 4ab^2 = 0$$

$$b^2(b^2 + 2b + 1 - 4a) = 0$$

Тогда:

$$1) b^2 = 0$$

$$2 - 4x = 0$$

$$x = \frac{2}{4}$$

$$2) b^2 + 2b + 1 = 4a$$

$$(b+1)^2 = 4a$$

$$\cancel{4x^2 + 9 - 4x} = 4(2x^2 + 2x + 1)$$

$$4x^2 - 36x = 0$$

$$a = \frac{(b+1)^2}{4}$$

$$\text{Тогда } \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4} - b} - \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}} = b$$

$$\sqrt{\frac{(b-1)^2}{4}} - \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}} = b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Если } b \geq 1, \text{ то } \frac{b-1}{2} - \frac{b+1}{2} = b$$
$$b = -1 - \cancel{\emptyset}$$

$$\text{Если } -1 \leq b \leq 1, \text{ то } \frac{1-b}{2} - \frac{b+1}{2} = b$$
$$-b = b \Rightarrow b = 0 - \text{случай рассмотрим}$$

$$\text{Если } b < -1, \text{ то } \frac{1-b}{2} + \frac{1+b}{2} = b$$
$$1 = b - \cancel{\emptyset}$$

Тогда корень $x = \frac{2}{7}$.

Подставим

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1 - \frac{7 \cdot 2}{7} + 2} - \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1} = 2 \cdot \frac{7 \cdot 2}{7}$$

$0 = 0$ — подходит

Ответ: $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

для $n = 2p$ ~~тогда~~ точек внутри параллелограмма
или $\frac{y_p - y_0}{2} + 1 = 13$ (на одной прямой)
для $n = 2p + 1$ $\frac{y_p - y_0}{2} = 12$

Тогда всего пар:

$$4 \cdot 13^2 + 3 \cdot 12^2 = 676 + 432 = 1108 \text{ штук}$$

Ответ: 1108.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим прямые вида $y = -2x + k$, где $k = \frac{n}{2}$, при $n \in \mathbb{N}$

Тогда эти прямые параллельны сторонам PO и QR нашего параллелограмма.

На каждой такой прямой, ~~получается~~

~~для~~ выражение $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = \text{const}$, где (x_2, y_2) и (x_1, y_1) — координаты двух точек с этой

прямой; $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 2x_2 - 2x_1 + (-2x_2 + k) - (-2x_1 + k)$
 $= 0$

Все значения на такой прямой одинаковы.

Значит если нам нужна разность „12“, то соответственно нам подойдут все пары точек с 2 разных прямых для которых:

$$2x_2 - 2x_1 + (-2x_2 + l) - (-2x_1 + m) = l - m = 12$$

То есть сдвиг одной прямой относительно другой по оси x — равен 12.

Таких ^{пар} прямых внутри параллелограмма:

при $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$: $x_R - x_0 - 12 + 1 = 4$

при $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$: $x_R - x_0 - 12 = 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O(0;0)$

$P(-12;24)$

$R(3;24)$

$R(15;0)$

2?

$P'(-4;8)$

$Q'(1;8)$

$R'(5;0)$

$(-4;8)$

$(1;8)$

$(-12;12)$

$(3;12)$

$(5;0)$

$(0;0)$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12$$

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$S_{KB} - S_{KA} = 12$$

$$y = 2x + k$$

$$-2x_2 + k + 2x_1 - k + 2x_2 - 2x_1$$

~~const~~

$$-2x_2 + k + 12$$

48 3м

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ \times 13 \\ \times 169 \\ \hline 686 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ \times 4 \\ \hline 36 \\ 24 \\ \hline 4 \quad 76 \end{array}$$

$$a+b = p$$

$$a^2 + b^2 = 26^2$$

$$p(a+b) = a^2 - 6ab + b^2$$

$$\frac{1+7}{1+49-6 \cdot 4} = \frac{8}{50-42} = 1$$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ \times 3 \\ \hline 432 \end{array}$$

$$a^2 = b^2$$

$$a = -b$$

~~1+8~~

$$\frac{1+8}{1-6 \cdot 8+64}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = b - a$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$\begin{array}{r} \times 4 \\ \times 167 \\ \hline 36 \\ 24 \\ \hline 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

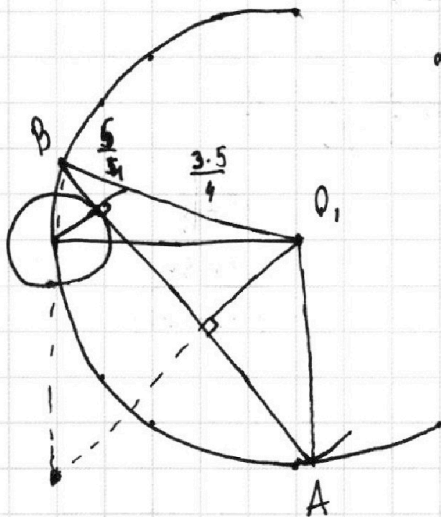
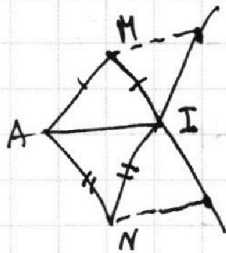
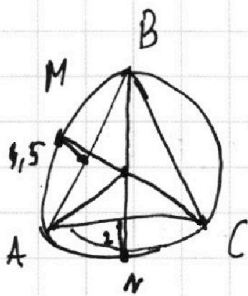
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} y = ax + 19b \\ ((x+b)^2 + (ax+10b)^2 - 1)(x^2 + (ax+10b)^2 - 4) \leq 0 \\ (x^2 + 16x^2 + 64 + (ax)^2 + 20axb + 100b^2 - 1)(x^2 + (ax)^2 + 20axb + 100b^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{O_2 Y}{1} = \frac{\sin \beta}{\sin \beta} \quad O_2 Y = \frac{1}{\sin \beta}$$

$$a^{da} \quad b^{db} \quad c^{dc} \quad + \frac{49}{51}$$

$$d_a + d_b \geq 14$$

$$d_b + d_c \geq 17$$

$$d_a + d_c \geq 20$$

$$d_a + d_b + d_c \geq 26$$

$$3a + 3b + 3c \geq 32$$

$$ab : 2^{14}$$

$$bc : 2^{17}$$

$$ac : 2^{20}$$

$$a : 7 \quad b : 7 \quad c : 13 \quad l = 6$$

$$a \neq b$$

$$d_a = 14 - d_b$$

$$14 + d_c - d_b \geq 20$$

$$d_c - d_b \geq 6$$

$$a = 8$$

$$c = 12$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$a : 7^{10} \cdot 2^{14}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$c : 7^{17} \cdot 2^{17}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$b : 1$$

$$x^2 = a^2 + a^2 - 2 \cos 60^\circ \cdot a^2$$



$$\text{НОД}(a; b) = 1$$

$$\frac{a+b \mid p}{(a-b)^2 - 4ab}$$

$$a \equiv -b \pmod{p}$$

$$a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$$

$$6ab \equiv 6 \cdot (-b) \pmod{p}$$

$$6a^2 + b^2 + 6ab \equiv 2b^2 + 6b^2 \equiv 8b^2 \pmod{p}$$

$$8b^2 \equiv 0 \pmod{p} \quad 8a^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$OC^2 = 25 + 49x^2 - 14 \cdot \frac{5}{5} x^2 = 25 + 49x^2 - 56x^2$$

$$OC^2 = OB^2 + x^2 - 2 \cos d \cdot OB \cdot x$$

$$OC^2 = OA^2 + 7x^2 - 2 \cos d \cdot OA \cdot x$$

$$x^2 - 2 \cos d \cdot OB \cdot x = 49x^2 - 14 \cos d \cdot OA \cdot x$$

$$48x^2 - 12x \cdot \cos d \cdot 5 = 0$$

$$48x = 60 \cos d$$

$$4x = 5 \cos d$$

$$\cos d = \frac{4x}{5}$$

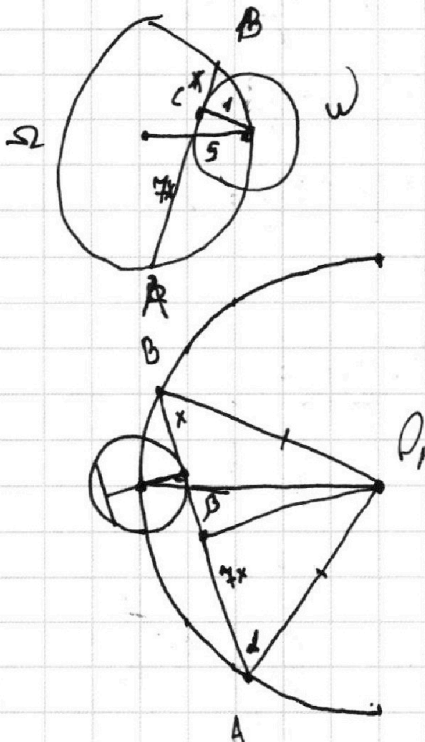
$$OC^2 = 5^2 + x^2 - 2 \cdot \frac{4}{5} x \cdot 5 \cdot x$$

$$OC^2 = 25 - 8x^2 + x^2 = 25 - 7x^2$$

$\frac{1}{4} l$

$$\deg_{\Omega} C = -7x \cdot x = OC^2 - OB^2 =$$

$$\Rightarrow -7x^2 = 25 - 7x^2 - 25$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$2x^2-5x+3 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 4-28x+49x^2$$

$$49x^2 - 4x^2 + 3x - 28x = -2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$45x^2 - 25x = -2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$5x(9x-5)$$

$$25x^2(9x-5)^2 = 4(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)$$

$$\sqrt{2x^2+2x+1-7x+2} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\sqrt{a-b} - \sqrt{a} = b \quad \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}-b} - \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}} = b$$

$$a-b+a-2\sqrt{a(a-b)} = b^2 \quad \sqrt{\frac{(b-1)^2}{4}} - \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}} = b$$

$$b^2+b-2a = -2\sqrt{a(a-b)} \quad \frac{b-1}{2} - \frac{b+1}{2} = b$$

$$b^4+b^2+4a^2+2b^3-4ab^2-4ab = 4a(a-b)$$

$$b^4+b^2+2b^3-4ab^2-4ab+4a^2-4a^2+4ab = 0$$

$$b^4+b^2+2b^3-4ab^2 = 0$$

$$b^2(b^2+2b+1-4a) = 0$$

$$(3-7x)^2$$

9 -

$$a = \frac{(b+1)^2}{4}$$

$$(b^2+1)^2 = 4a \quad (3-7x)^2 = 4(2x^2+2x+1) \quad \frac{(b+1)^2}{4} = a$$

$$(2-7x)^2 = 4(2x^2+2x+1)$$

$$9+49x^2-42x = 8x^2+8x+4$$

$$\sqrt{\frac{(b-1)^2}{4}}$$

$$41x^2 - 50x + 5 = 0$$

$$D_1 = 25^2 - 5 \cdot 41 = 5(125 - 41) = 5 \cdot 84$$