МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^{14}7^{10}$, $bc$ делится на $2^{17}7^{17}$, $ac$ делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на $m$?

3. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину $AB$, если известно, что радиусы $\omega$ и $\Omega$ равны 1 и 5 соответственно.

$\sqrt{a+(2-7x)} - \sqrt{a} =$
$= 2-7x$

4. [5 баллов] Решите уравнение

$2x^2+2x+1=a$
$2x^2-5x+3=a+(2-7x)$

$a+b=b^2+a+2b\sqrt{a}$

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

$b=2-7x$

$\sqrt{2(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2})} - \sqrt{2(x^2}$

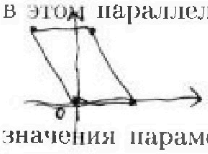
$b^2+2b\sqrt{a}-b=$
$=0$

$\sqrt{a+b}-\sqrt{a}=b$

$b=0$ или

$b-1=-2\sqrt{a}$
$(b-1)^2=4a$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.



$2x_2$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник $ABC$ вписан в окружность. Пусть $M$ – середина той дуги $AB$ описанной окружности, которая не содержит точку $C$; $N$ – середина той дуги $AC$ описанной окружности, которая не содержит точку $B$. Найдите расстояние от вершины $A$ до центра окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если расстояния от точек $M$ и $N$ до сторон $AB$ и $AC$ соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

# Задача 1

В условии представлены делимости только на степени чисел 2 и 7, которые являются простыми, поэтому, чтобы произв. $abc$ было наименьшим, оно должно принимать вид $2^x\cdot 7^y$, где $x, y$ – ~~натуральные~~ произвольные, а значит и $a$, и $b$, и $c$ по отдельности тоже должны принимать такой вид.

Пусть $a = 2^{n_1}\cdot 7^{m_1}$, $b = 2^{n_2}\cdot 7^{m_2}$, $c = 2^{n_3}\cdot 7^{m_3}$, где $n_1, m_1, n_2, m_2, n_3, m_3$ – какие-то натуральные числа. Тогда:

$$ab \vdots 2^{14}7^{10} \Rightarrow n_1+n_2 \geqslant 14,\ m_1+m_2 \geqslant 10$$

$$bc \vdots 2^{17}7^{17} \Rightarrow n_2+n_3 \geqslant 17,\ m_2+m_3 \geqslant 17$$

$$ac \vdots 2^{20}7^{37} \Rightarrow n_1+n_3 \geqslant 20,\ m_1+m_3 \geqslant 37$$

$$abc = \sqrt{ab\cdot bc\cdot ac} = 2^{\frac{n_1+n_2+n_2+n_3+n_1+n_3}{2}}\cdot 7^{\frac{m_1+m_2+m_2+m_3+m_1+m_3}{2}} \geqslant 2^{\frac{14+17+20}{2}}\cdot 7^{\frac{10+17+37}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{51}{2}}\cdot 7^{\frac{64}{2}} = 2^{25,5}\cdot 7^{32},$$ т.е. $abc \geqslant 2^{25,5}\cdot 7^{32}$,

но $abc \in N \Rightarrow$ степени чисел 2 и 7 должны быть натуральными $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ наим. зн. $abc$: $2^{26}\cdot 7^{32}$.

Ответ: $2^{26}\cdot 7^{32}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

# Задача 2

Нужно найти НОД $(a+b,\ a^2-6ab+b^2)$, который записывается также как $(a+b,\ a^2-6ab+b^2)$ и равен $m$, причём $(a,b)=1$.

При помощи алгоритма Евклида получаем:

$$(a+b,\ a^2-6ab+b^2) = (a+b,\ a^2-6ab+b^2-(a+b)^2) = (a+b,\ -8ab)$$

~~8ab~~ Запишем равенства с $m$:

$a+b = k_1 m$, $-8ab = k_2 m$, где $k_1$, $k_2$ – какие-то целые числа.

$$m = \frac{a+b}{k_1} = \frac{-8ab}{k_2} \Rightarrow ak_2 + bk_2 = -8abk_1$$

$ak_2 \vdots a$, $-8abk_1 \vdots a \Rightarrow bk_2 \vdots a$, но $(b,a)=1 \Rightarrow k_2 \vdots a$

$bk_2 \vdots b$, $-8abk_1 \vdots b \Rightarrow ak_2 \vdots b$, но $(a,b)=1 \Rightarrow k_2 \vdots b$

$(a,b)=1 \Rightarrow k_2 \vdots ab$ или $k_2 = ab \cdot d$, где $d$ – какое-то целое число.

Тогда $-8ab = abdm \Rightarrow -8 = dm$. Отсюда наибольшее $m$ равно 8 при $d=-1$

Если $a=3$, $b=5$, то $a+b=8$, $a^2-6ab+b^2 = 9-6\cdot3\cdot5+25 =$
$= 34-90 = -56$ : оба числа делятся на 8 $\Rightarrow$ $m$ может быть равно 8.

Ответ: 8

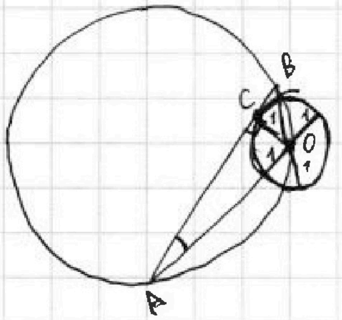
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача 3.




Обозначим центр окружности $\omega$, как $O$.

1) Степень точки:

$$AC^2 = (AO-1)(AO+1)$$

$$BC^2 = (BO-1)(BO+1)$$

($+1$, $-1$ – это прибавление или вычитание длины радиуса $\omega$)

2) По теореме синусов:

$$\frac{OB}{\sin\angle OAB} = 2\cdot 5$$ (5 – длина радиуса $\Omega$), где

$\sin\angle OAB = \frac{1}{AO}$ (прямоуг. тр.) $\Rightarrow$

$$AO\cdot BO = 10.$$

3) $\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AO^2-1}{BO^2-1} = 7^2 = 49$; $AO = \frac{10}{BO}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\frac{10^2}{BO^2}-1}{BO^2-1} = 49 \Rightarrow \frac{100-BO^2}{BO^2} = 49BO^2-49 \Rightarrow 49BO^4-49BO^2 = 100-BO^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49BO^4 - 48BO^2 - 100 = 0. \quad D = 48^2 + 4\cdot 49\cdot 100 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BO^2 = \frac{48\pm\sqrt{48^2+4\cdot 49\cdot 100}}{98}, \text{ но } BO^2 > 0 \Rightarrow BO^2 = \frac{48+\sqrt{48^2+4\cdot 49\cdot 100}}{98} =$$

$$= \frac{48+148}{98} = \frac{196}{98} = 2 \Rightarrow BO = \sqrt{2} \quad (BO>0)$$

4) $BC^2 = BO^2 - 1 = 1 \Rightarrow BC = 1$

5) $AB = BC\cdot 8 = 8$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2x^2+2x+1 = x^2+2x+1+x^2 = (x+1)^2+x^2 \geqslant 0$ при любом $x$, значит проверять на неотриц. нужно только $2x^2-5x+3$.

~~Проверка: $2x^2-5x+3=$ Если $x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$, то~~

~~$2x^2-5x+3 = 2\cdot\left(\frac{11+2\sqrt{61}}{41}\right)^2 - 5\cdot\frac{11+2\sqrt{61}}{41}+3 =$~~

~~$= 2\cdot\frac{121+4\cdot61+44\sqrt{61}}{41^2} - \frac{55+10\sqrt{61}}{41}+3 =$ $\sqrt{61}(44-410)+$~~

~~$= \frac{242+488+44\sqrt{61}-55\cdot41-410\sqrt{61}+3\cdot41^2}{41^2} = 730+ \ldots 41(3\cdot41-55)$~~

$2x^2-5x+3 = 2\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\right) = 2\left(x^2-2x\cdot\frac{5}{4}+\frac{25}{16}+\frac{3}{2}-\frac{25}{16}\right) =$

$= 2\left(\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right) \geqslant 0 \Rightarrow \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 \geqslant \frac{1}{16}$, т.е. $\left|x-\frac{5}{4}\right| \geqslant \frac{1}{4}$;

если $x \geqslant \frac{5}{4}$, то $x \geqslant \frac{3}{2} \geqslant \frac{5}{4}$; если $x<\frac{5}{4}$, то $x \leqslant 1 < \frac{5}{4}$,

т.е. $x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Если $x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$, то $x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} < \frac{11+2\cdot8}{41} = \frac{27}{41} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ является решением.

Если $x = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$, то $x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} - \frac{4\sqrt{61}}{41} < \frac{11+2\sqrt{61}}{41} < 1$ (как было доказано ранее) $\Rightarrow x = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$ является решением.

Ответ: $\frac{2}{7}$; $\frac{11-2\sqrt{61}}{41}$; $\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

# Задача 4

Пусть $a = 2x^2+2x+1$ и $b = 2-7x$, тогда

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = \sqrt{a+b} - \sqrt{a}$, т.е.

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$, причём $2x^2+2x+1 \geq 0$ и

~~$\sqrt{a+b}$~~ $2x^2-5x+3 \geq 0$, т.е. $a \geq 0$ и $a+b \geq 0$

$\sqrt{a+b} = b + \sqrt{a}$. ~~or~~ Возведём обе части в квадрат:

$a+b = b^2 + a + 2b\sqrt{a} \Rightarrow b^2 + 2b\sqrt{a} - b = b(b+2\sqrt{a}-1) = 0$

Значит либо $b=0$, либо $b+2\sqrt{a}-1=0$, т.е.

$(b-1)^2 = (-2\sqrt{a})^2 \Rightarrow$ ~~$b^2-2b+1=4a$~~ $(b-1)^2 = 4a$.

Если $b=0$, то $2-7x=0 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$; проверка:

1) $2x^2+2x+1 = 2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2\cdot\frac{2}{7}+1 > 0$

2) $2x^2-5x+3 = 2\left(\frac{2}{7}\right)^2 - 5\cdot\frac{2}{7}+3 = 2\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \frac{11}{7} > 0$, т.е.

$x = \frac{2}{7}$ является решением.

Если $(b-1)^2 = 4a$, то $(2-7x-1)^2 = 4\cdot(2x^2+2x+1)$,

т.е. $49x^2 - 14x + 1 = 8x^2+8x+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 41x^2 - 22x - 3 = 0 \quad D = 22^2 + 4\cdot 41\cdot 3 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{22^2+4\cdot 41\cdot 3}}{82} = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82} = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82} =$

$= \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$

(продолжение на след. стр.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Угол наклона~~ Синус угла наклона касательной 1 (см. график): $\frac{3}{8}$. А значит для кас. ~~4~~ это $-\frac{3}{8}$.

Синус угла наклона кас. 2 : $\frac{2-1}{8} = \frac{1}{8}$. А значит для кас. ~~3~~ это $-\frac{1}{8}$.

Задача 6

$((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) < 0$,

Чтобы неравенство выполнялось, должна выполняться система:

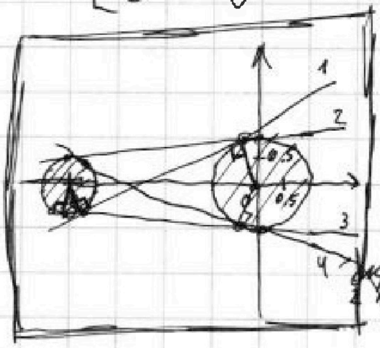
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+y^2 \geq 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

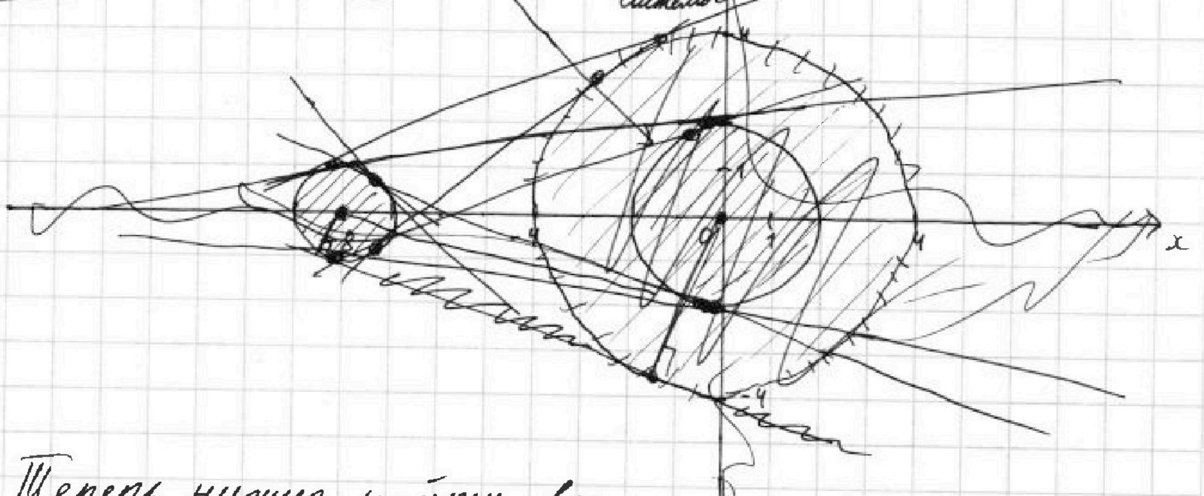
Нарисуем график:

~~Две окружн 1) если получилось если~~

1) если точка лежат ~~внутри~~ вне окр. в с центром $(0;0)$, то они должны лежать в окр. с центром $(-8;0)$

2) аналогично для другой окр.




Теперь нужно найти все прямые $y = ax+10b$, которые будут иметь 2 общие точки с ~~хотя бы одним кругом~~ полученным графиком.

$y = ax+10b$ — это прямая проходящая через $(0;10b)$.

Подходят только 4 общих касательных к окружностям.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6.

1 $x^2+y^2 \leq 4$

$x^2 \quad +64$