



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поруа QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}, \quad ab: 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc: 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

1) пусть  $a', b', c'$  - степени входящие 2 в  $a, b, c$  соответственно ( $a', b', c' \in \mathbb{Z}, a', b', c' \geq 0$ )

Из условия следует, что:

$$\begin{cases} a' + b' \geq 15 \\ b' + c' \geq 17 \\ a' + c' \geq 23 \end{cases}, \quad \text{значит } a' + b' + c' \geq \frac{15 + 17 + 23}{2} = \frac{55}{2} = 27,5$$

Поскольку  $a', b', c'$  - целые, то  $a' + b' + c' \geq 28$ .

$$a' + b' + c' = 28, \quad \text{если } a' = 10, \quad b' = 5 \quad \text{и} \quad c' = 13$$

2) пусть  $a', b', c'$  - степени входящие 7 в  $a, b, c$  соответственно ( $a', b', c' \in \mathbb{Z}, a', b', c' \geq 0$ )

Из условия следует, что

$$\begin{cases} a' + b' \geq 11 \\ b' + c' \geq 18 \\ a' + c' \geq 39 \end{cases}, \quad \text{значит } a' + b' + c' \geq a' + c' \geq 39.$$

$$a' + b' + c' = 39, \quad \text{если } a' = 11, \quad b' = 0, \quad c' = 28.$$

Значит  $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$ . (пример, когда достигается равенство:  $a = 2^{10} \cdot 7^{11}, b = 2^5, c = 2^{13} \cdot 7^{28}$ ).

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(a, b) = \text{НОД}(a, b)$ . По условию,  $(a, b) = 1$

если дробь  $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$  можно сократить на  $m$ ,

то  $(a+b, a^2-7ab+b^2) : m$ . Значит наибольшее  
такое  $m$  — это  $(a+b, a^2-7ab+b^2)$ .

$(a+b, a^2-7ab+b^2) = (a+b, (a+b)^2 - 9ab) =$   
 $= (a+b, 9ab) = m$ . Если  $a : p$  ( $p$  — простое),

то  $b : p$  ( $(a, b) = 1$ ), значит  $a+b : p$

то есть  $(a+b, 9ab) = 1$ , значит

$m = (a+b, 9)$ . Значит  $m \leq 9$ .

Пример, когда  $m = 9$ :

$a = 1, b = 8: (a, b) = 1,$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{8+1}{1+64-7 \cdot 8} = \frac{9}{65-56} = \frac{9}{9}$$

Числитель и знаменатель можно поделить  
на 9.

Ответ: 9.







На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

ЛФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= 2 \cdot 13^2 \left( \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{x^2 + 1} \right) = \frac{2 \cdot 13^2 \cdot 2}{x^2 + 1} = \frac{26^2}{x^2 + 1}$$

$$= 2A^2 = 4^2 + 17^2 x^2$$

$$26^2 = (x^2 + 1)(49 + 17^2 x^2)$$

$$26^2 = 49x^2 + 49 + 17^2 x^4 + 17^2 x^2$$

$$17^2 x^4 + x^2(49 + 17^2) - (26^2 + 49) = 0$$

$$289A^2 D = (49 + 17^2)^2 + 4(26^2 - 49) \cdot 17^2 =$$

$$= 49^2 + 17^4 + 2 \cdot 49 \cdot 17^2 + 4 \cdot 17^2 \cdot 26^2 - 4 \cdot 49 \cdot 17^2 =$$

$$= 49^2 + 17^4 + 4 \cdot 17^2 \cdot 26^2 - 2 \cdot 49 \cdot 17^2 =$$

$$= 49^2 + 17^2(17^2 - 98) + 4 \cdot 17^2 \cdot 26^2 =$$

То есть  $\frac{26^2}{x^2 + 1} = 49 + 289x^2$

$$26^2 = 13^2 \cdot 4 = 169 \cdot 4 = 676$$

$$\frac{676}{x^2 + 1} = 49 + 289x^2$$

Заметим, что  $x = 1$  — корень.

$$\frac{676}{2} = 338 = 289 + 49$$

Других корней нет, т.к. в трехчлене (относительно  $x^2$ )

$$17^2 x^4 + x^2(49 + 17^2) - (26^2 - 49) = 0 \quad \begin{matrix} \text{с старейшей коэффициентом} \\ \text{свободной} \end{matrix}$$

чем  $< 0$ , то есть второй корень  $< 0$ . (т.е. нет)

$$g) AB = 17x + 7x = 24x = 24!$$

Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

Пусть  $3x^2 - 6x + 2 = a$  ( $a \geq 0$ ),  $3x^2 + 3x + 1 = b$  ( $b \geq 0$ )

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b.$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \sqrt{a} = \sqrt{b} \quad (1) \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{array} \right.$$

$$(1) \quad 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \quad (4 \geq 0)$$

$$9x = 1 \quad \text{При } x = \frac{1}{9}: \quad 3x^2 + 3x + 1 = 3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 > 0$$

$$x = \frac{1}{9}.$$

$$\underline{x = \frac{1}{9}} \quad - \text{ корень}$$

$$(2) \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (3) \\ 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(3) \quad -9x = -2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1) \quad \text{и, } \underline{x \geq 0} \quad *$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$69x^2 - 2(6x) - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 4 \cdot 69 = 312 = 4 \cdot 78 = 4 \cdot 2 \cdot 39$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > 0$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0 \quad \text{не подходит} \quad *$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \\ 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \quad (4) \end{array} \right.$$

$$(4) \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 - 24 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \\ -x \geq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \frac{6+2\sqrt{48}}{3 \cdot 23} \stackrel{?}{\leq} \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$6+2\sqrt{48} \stackrel{?}{\leq} 3 \cdot 23 = 23\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \underbrace{2\sqrt{48}}_{18} + \underbrace{23\sqrt{3}}_{45} \stackrel{?}{\leq} 63$$

-> МО верно.

$$x = \frac{6+2\sqrt{48}}{69} \text{ - корень.}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{9}, \frac{6+2\sqrt{48}}{69}$$

$$2) \frac{6+2\sqrt{48}}{3 \cdot 23} \stackrel{?}{\geq} \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$$6+2\sqrt{48} \stackrel{?}{\geq} 23 \cdot 3 + 23\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{48}}{63} \stackrel{?}{\geq} 63 + 23\sqrt{3} \text{ -> МО не верно.}$$

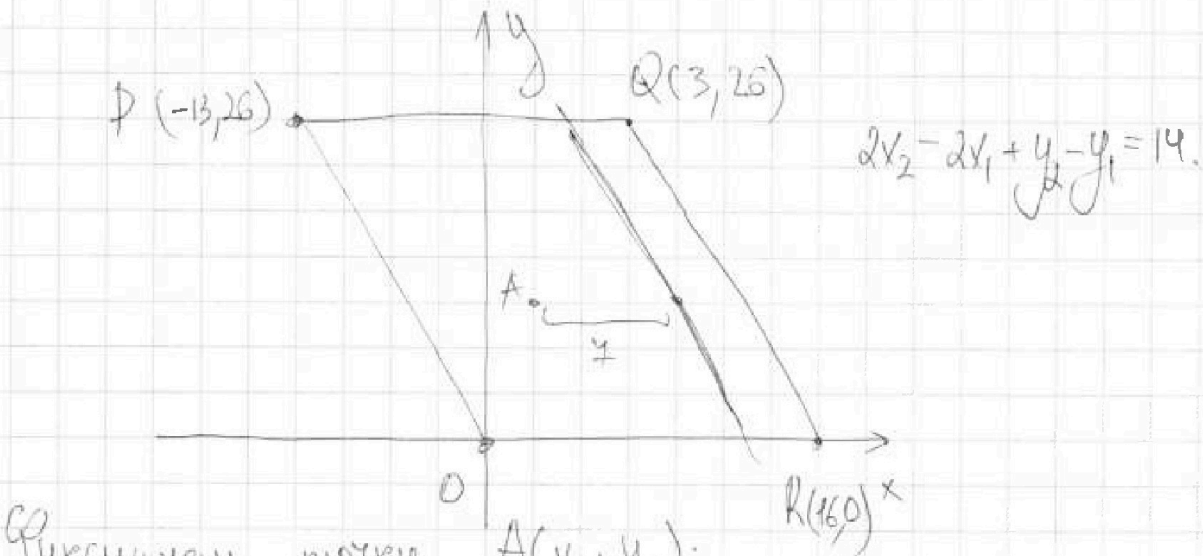
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Фиксируем точку  $A(x_1, y_1)$ :

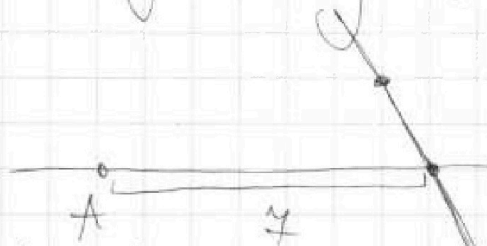
$$2x_2 + y_2 = \frac{14 + 2x_1 + y_1}{\text{const.}} \quad - \text{т.е. это уравнение прямой}$$

Значит все точки  $B$ , проходящие где  $A$   
лежат на одной прямой, с условием коэффициента  
еента  $-2$ .

Пусть  $y_1 = y_2$  (возьмем точку  $B$ ):

$$2x_2 - 2x_1 = 14$$

$$x_2 - x_1 = 7$$



Т.е. ГМТ  $B$  где  $A(x_1, y_1)$  - прямая, проходящая  
через  $(x_1 + 7, y_1)$  с условием коэффициентом  $-2$ .

Такая прямая параллельна  $PO$  и  $QR$

Для любой точки  $A$ , лежащей на  $PQ$  параллелограмм

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

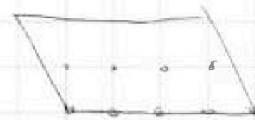
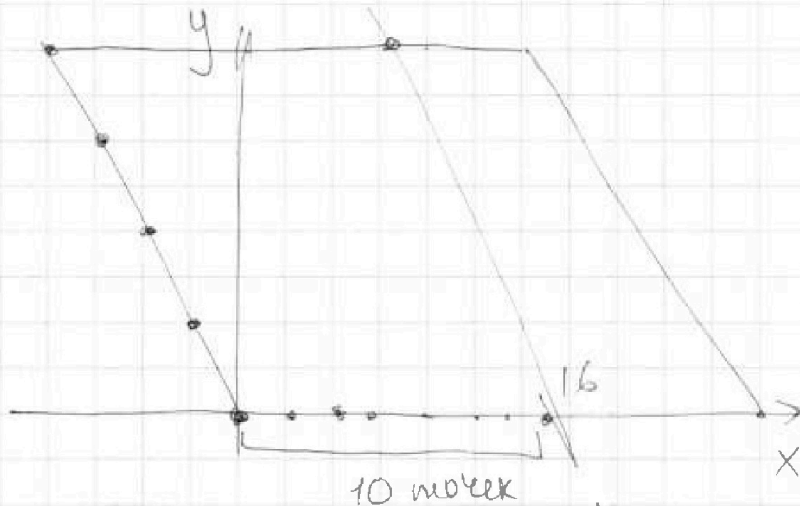
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

найдемся либо 14 точек  $B$ , либо 12, если  
 $y_1$  - четно и  $x_1 + 7$  четно в параллелограмме,  
13 точек  $B$ , если  $y_1$  - нечетно и  $x_1 + 7$  четно в  
параллелограмме, и 0 точек  $B$ , если  $x_1 + 7$  не  
четно в параллелограмме.



проведем прямую через  $(3,0)$  параллельно стороне  
параллелограмма. Если точка  $A$  находится правее  
этой прямой, то подходит 0 точек  $B$ .

Т.е. точки, которые нас интересуют лежат  
на этой прямой или левее.

При четной  $y$ -координате таких точек 10,  
при нечетной - 8.

То есть всего пар точек  $A, B$  :





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\underbrace{10 \cdot 14}_{\text{четыре } y_1} \cdot 14 + \underbrace{98 \cdot B_1}_{\text{четыре } y_1} \cdot B_1 = 1960 + 1352 + 169 = 3481$$

(покажем, что если  $(A, B)$  - подходит, то

$(B, A)$  - не подходит), к. выражение  $2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1$   
меняет знак).

Ответ: 3481.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

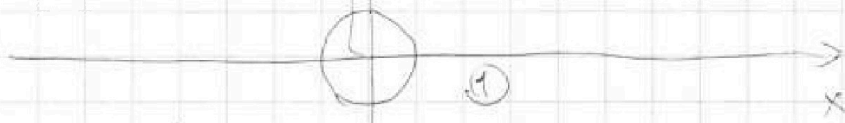
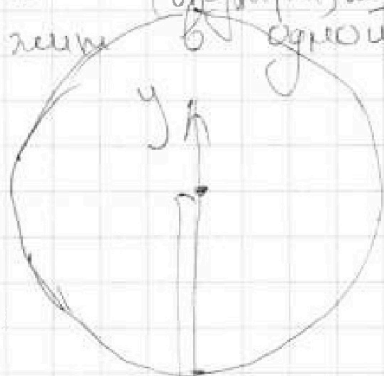
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0. \end{cases}$$

① - окружность с центром  $(0,0)$  и радиусом 1

② - окружность с центром  $(0,12)$  и радиусом 4.

$(x,y)$  - удовлетворяет второму уравнению, если лежит (внутри) либо на границе. Уравнению, если лежат в одной из окружностей ①, ② не пересекаются



$ax+y-8b=0$  - прямая, с условием коэффициентом  $-a$ .

$$y = -ax + 8b.$$

Система имеет 2 решения, если прямая имеет 2 точки пересечения с кругами, но если касается обеих окружностей.

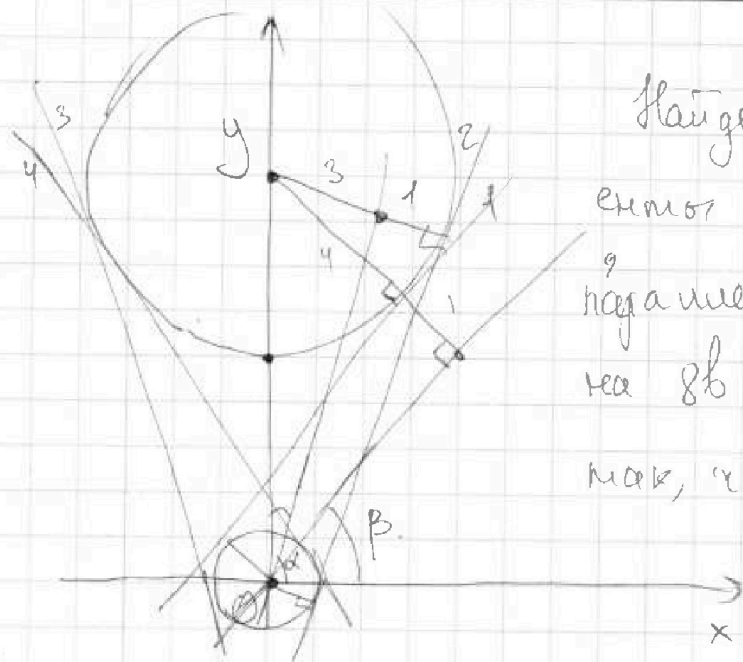
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найдем угловые коэффициенты  $a$  касательных, параллельных перпендикуляру  $OB$  (это можно сделать так, что такая прямая совпадет с касательной).

Очевидно, что  $a_4 = -a_1$ ,  $a_3 = -a_2$  (в силу симметрии относительно  $Oy$ ).

1) Через точку  $O$  проведем прямую, параллельную 2.

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{4}\right), \quad a_2 = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{4}\right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15}$$

2) Через точку  $O$  проведем прямую, параллельную 1.

$$\cos \beta = \sin(90^\circ - \beta) = \frac{5}{12}$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{144 - 25}}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{\sqrt{144 - 25}}{5}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{119}}{5}; -\frac{\sqrt{119}}{5}; \sqrt{15}; -\sqrt{15}$ .



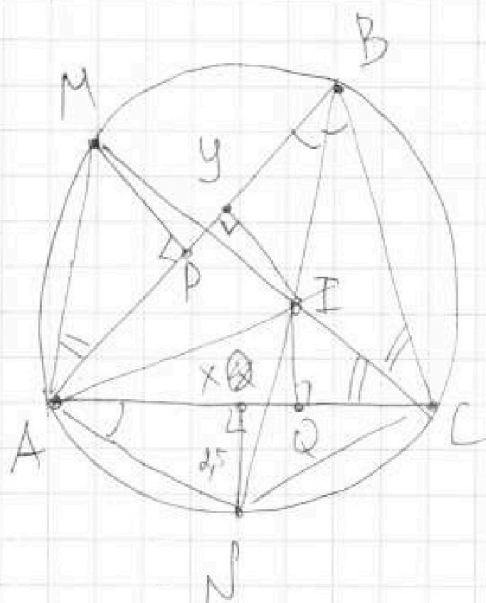
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- 1)  $M, I, C$  - лежат на биссектрисе  $\angle C$ .
- 2)  $B, I, N$  - лежат на биссектрисе  $\angle B$ .
- 3)  $\angle MAB = \angle MCB$
- 4)  $\angle NAC = \angle NBC$
- 5)  $\triangle AMP \sim \triangle CIQ$ , значит  $\frac{MP}{R} = \frac{AM}{CI}$   
( $R$  - радиус вписанной окружности)
- 6) Аналогично  $\triangle ANX \sim \triangle BUI$ :  $\frac{XN}{R} = \frac{AN}{BI}$
- 7) По теореме о трезубце:  $AN = NI = CN$
- 8) По теореме о трезубце:  $AM = MI = BN$
- Значит
- 9)  $\text{deg}(I, \text{относ. окр.}) = BI \cdot IN = MI \cdot CI$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

10) Знаем  $\frac{AM}{AN} = \frac{BI}{CI}$

11)  $\frac{MP}{AN} = \frac{AM \cdot BI}{AN \cdot CI} = \frac{5}{2,5} = 2 = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$

$$\frac{AM}{AN} = \sqrt{2}$$

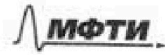
12)  $\frac{AM}{AN} = \frac{\sin \angle ABN}{\sin \angle ACM} = \sqrt{2}$  по м. синусов ( $\triangle ABC$ )

13)

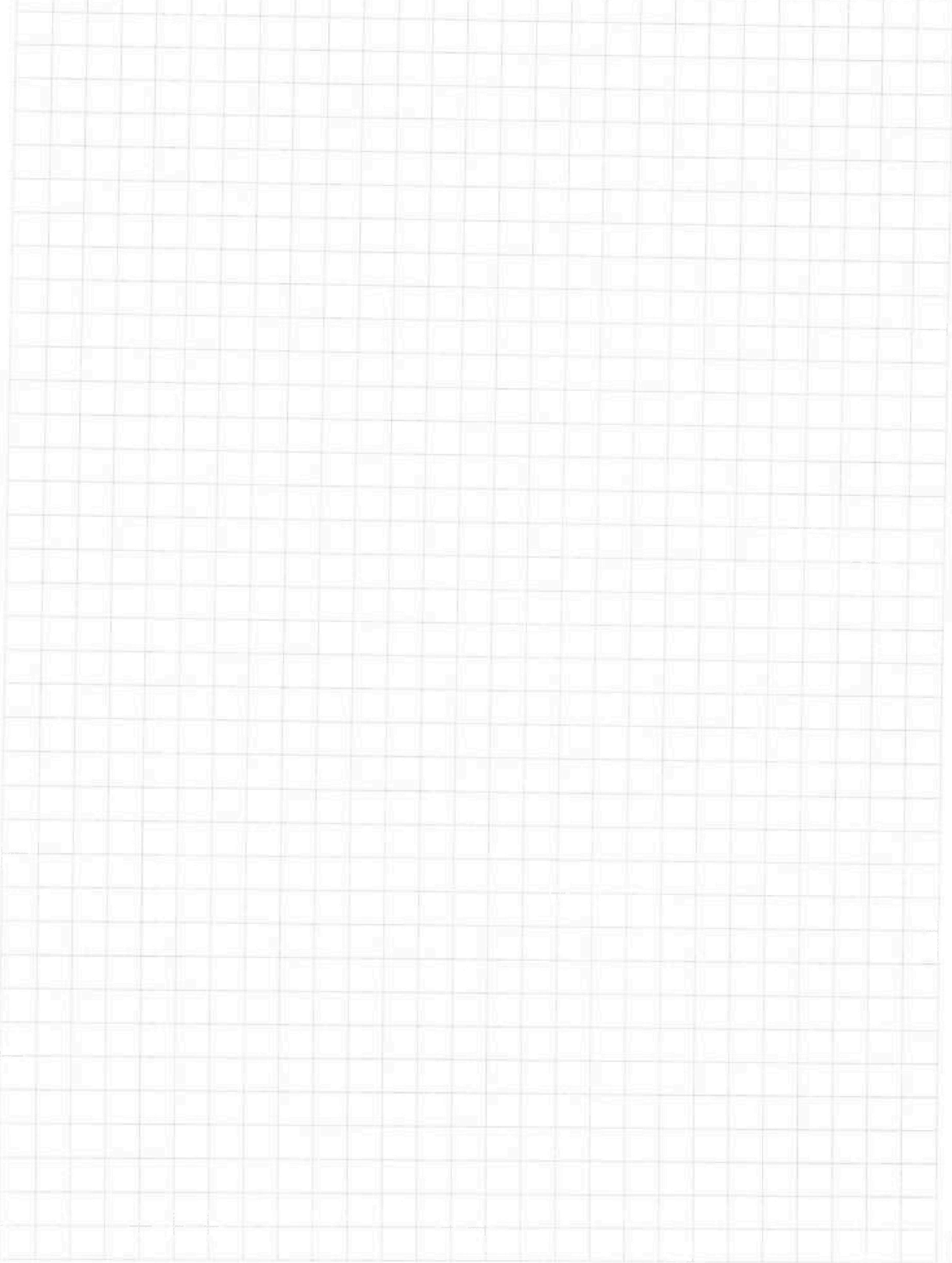


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







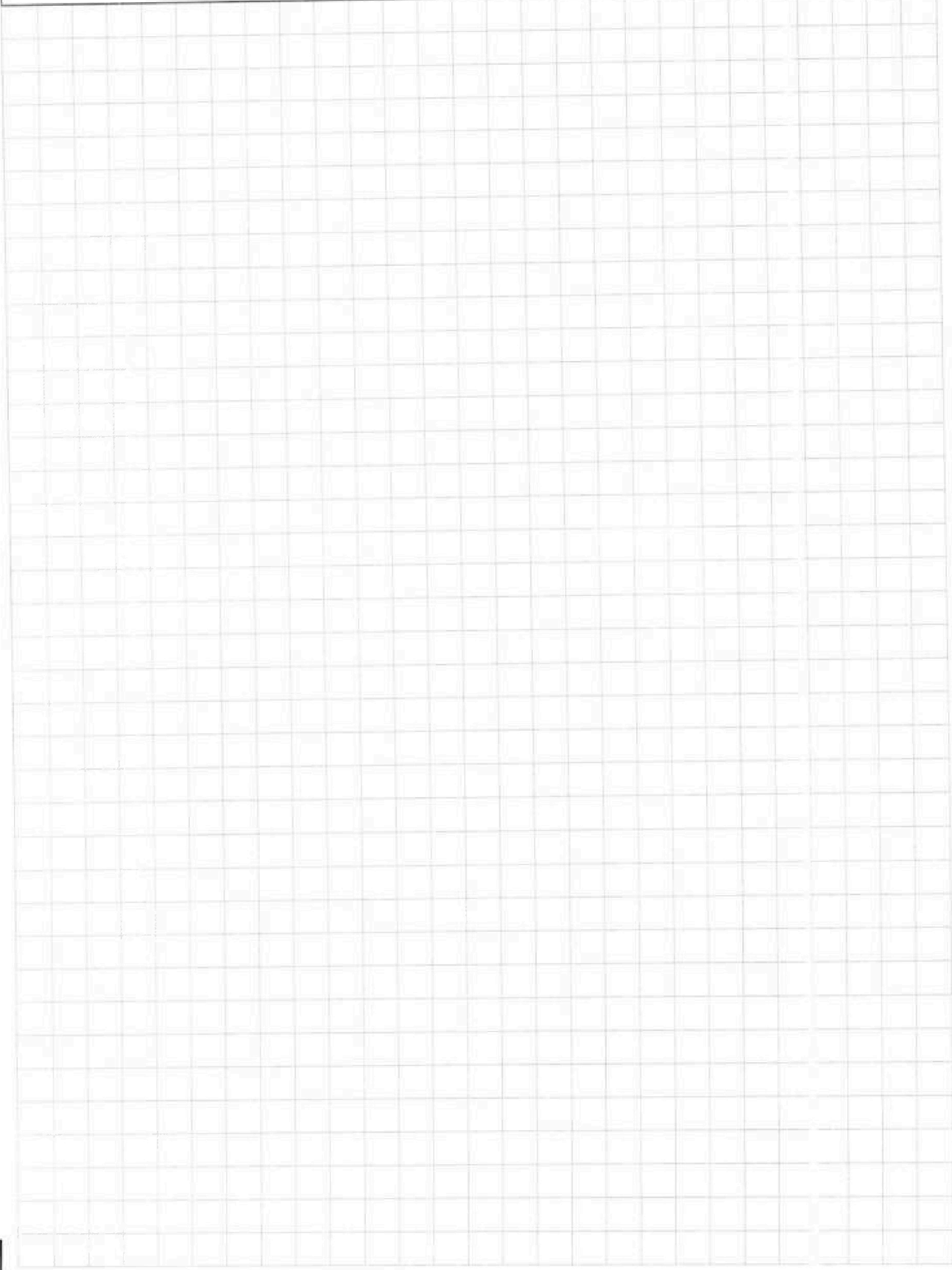
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



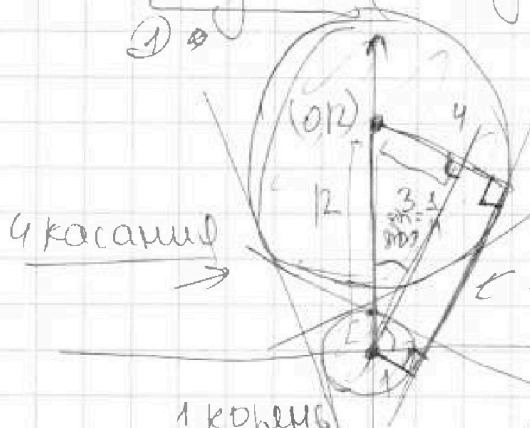
$$ax + y - 8b = 0$$

~~$$ax + y - 8b = 0$$~~

$$ax + y - 8b = 6$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

①    ②



$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{x_1 y_1 - \text{точка}}{b \text{ (ортогональности)}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} > 0$$

$$c = 12^2 - 3^2 = 144 - 9 = 135$$

$$y = -ax + 8b$$

ровно 2 решения

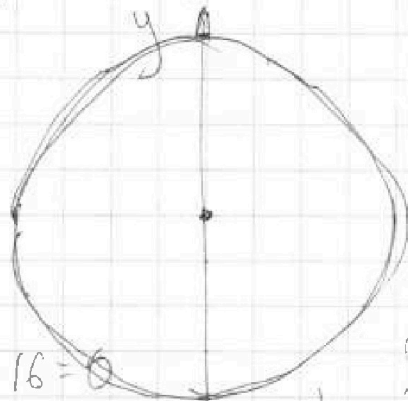
1 корень

$$x^2 + (y-12)^2 = 16$$

$$x^2 + (ax + b - 12)^2 =$$

$$= x^2 + a^2 x^2 + b^2 + 144 +$$

$$+ 2abx - 24b - 24ax - 16 = 0$$



1 корень

$$y = ax + b$$

$$ax + 2abx + b^2 + x = 1$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 2abx + b^2 - 1 = 0$$

$$D = 4a^2 b^2 - 4(b^2 - 1)(a^2 + 1) =$$

$$= 4a^2 b^2 - 4(a^2 b^2 - a^2 + b^2 - 1) =$$

$$= 4a^2 b^2 - 4a^2 b^2 + 4a^2 - 4b^2 + 4 = 4a^2 - 4b^2 + 4 = 0$$

$$a^2 - b^2 + 1 = 0$$

1 корень

$$\frac{D}{4} = (ab - 12a)^2 - (b^2 - 24b + 128)$$



$$6.8 = 16.3 = 4.8$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ 8 \\ \hline 143 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ 14 \\ \hline 149 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1352 \\ 1960 \\ \hline 3312 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ  $\frac{48}{2}$   $\frac{35+8}{8}$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow 4(9+63) =$$

$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$= 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{3}$$

умножим на  $\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}$

$$(1 - 9x) = (1 - 9x)$$

$$x = \frac{1}{9} = 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0 \quad D = 9 - 4 \cdot 3 < 0$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 0$$

$$a + 1 \geq 2\sqrt{a}$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{2} + \frac{3x^2 + 3x + 2}{2} \geq 1$$

$$\sqrt{a} \leq \frac{a+1}{2}$$

$$\frac{3(x-1)^2}{2}$$

$$\text{при } x = \frac{1}{9}$$

$$3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} - \frac{6}{9} + 1 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 1$$

а) 1



$$\sqrt{(3(x^2 - 1) - 1)} +$$

$$+ \sqrt{3(x-1)^2 + (9x-2)}$$

$$\sqrt{9x-2}$$

$$x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2 \cdot 6}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a+b} = 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (9 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 -$$

$$6x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$- 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$6x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 6 = 24 + 9 = 33$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = \\
 & = (1 - 9x) (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})
 \end{aligned}$$

$$\text{не } 0: \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases} \quad 1 - 9x = 0, \text{ не } 0, \quad x = \frac{1}{9}$$

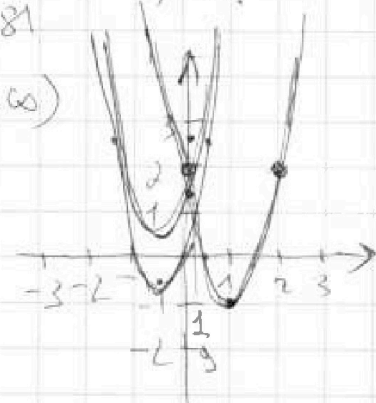
при  $x = \frac{1}{9}$ :  $3 \cdot \frac{1}{9} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2$

$$\frac{3}{81} - \frac{6 \cdot 9}{81} + 2 = \frac{3 - 54 + 2 \cdot 81}{81} \neq 0$$

$(1 - 9x) \quad x \neq \frac{1}{9}$ :

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$3x^2 + 3x + 1$       вершина:  $\frac{6}{2 \cdot 3} = 1$



верш.:  $\frac{-3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$     1:  $3 - 6 + 2 = -1$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right): \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = -\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$3x^2 - 6x + 3 = a \quad 3(x^2 - 1)^2 = a$$

$$\sqrt{a+1} = \sqrt{3(x-1)^2 + 1} + \sqrt{3(x-1)^2 - 2} = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

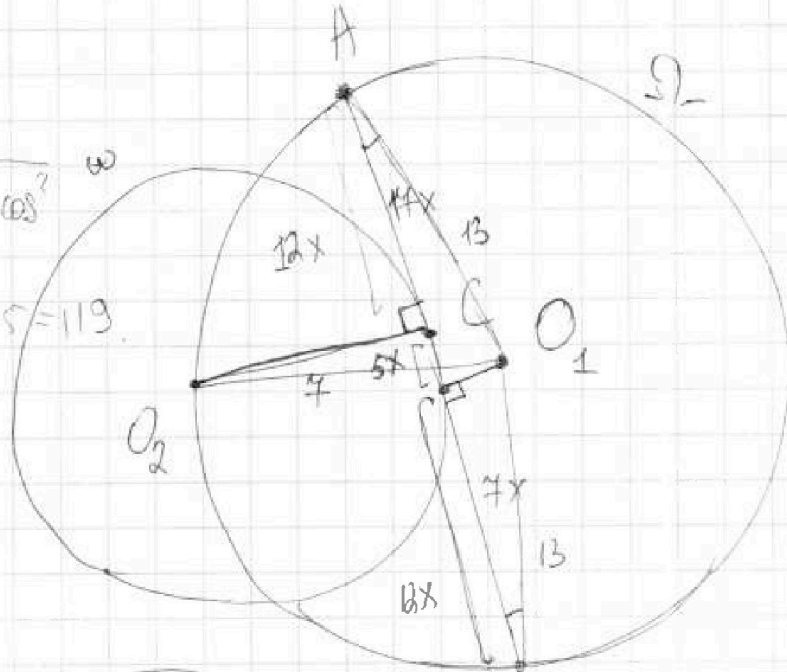
3)  $AC : CB = 17 : 7$

$AB = 17x + 7x = 24x$

$\sin \arccos \frac{1}{4}$

$\cos \alpha = \frac{1}{4} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

$144 - 25 = 124 - 5 = 119$



$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = 1 - 9x$

To solve.

$\frac{1 - 9x}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} = 1 - 9x$

$(r - x\delta + \nu)(1 + \nu) \Big|_{r \pm} = r - x\delta + \nu r$

$r = (r - x\delta + \nu)(1 + \nu) \Big|_{r \pm} + r - x\delta + \nu + x\delta + \nu$

$r = 1 + \sqrt{a + 9x^2} + \sqrt{a + 1}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{\triangle O_2AB} = \frac{7 \cdot 24x}{2} = 7 \cdot 12x$$

$$AB^2 = 2 \cdot B^2 - 2 \cdot B^2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$O_2B^2 = 49 + 49x^2$$

$$O_2A^2 = 49 + 17x^2$$

$\alpha =$

$$\cos \angle A O_2 B = \cos \left( \frac{360^\circ - \alpha}{2} \right) =$$

$$= \cos \left( \frac{180^\circ}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = -\cos \left( \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{12x}{13}$$

$$AB^2 = 49 + 17x^2 + 49 + 49x^2 + 2 \sqrt{49 + 17x^2} \cdot \sqrt{49 + 49x^2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

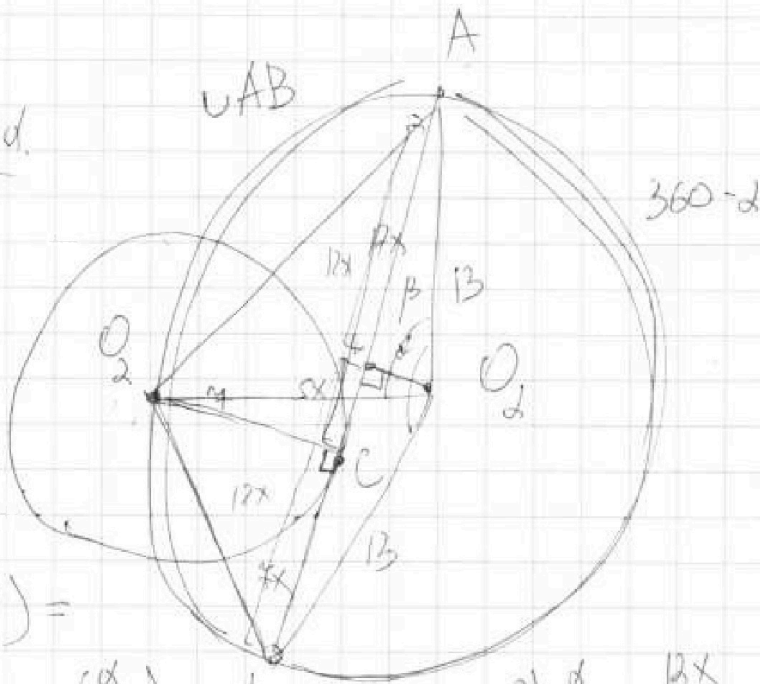
$$= \sqrt{\frac{163 - 144x^2}{13}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{144x^2}{13^2}}$$

$$7^2 + 13^2 - 2 \cdot 7 \cdot 13 \cos \beta = 49 + 17x^2$$

$$49 + 169 - 14 \cdot 13 \cdot \cos \beta = 49 + 17x^2$$

$$169 - 14 \cdot 13 \cos \beta = 17x^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

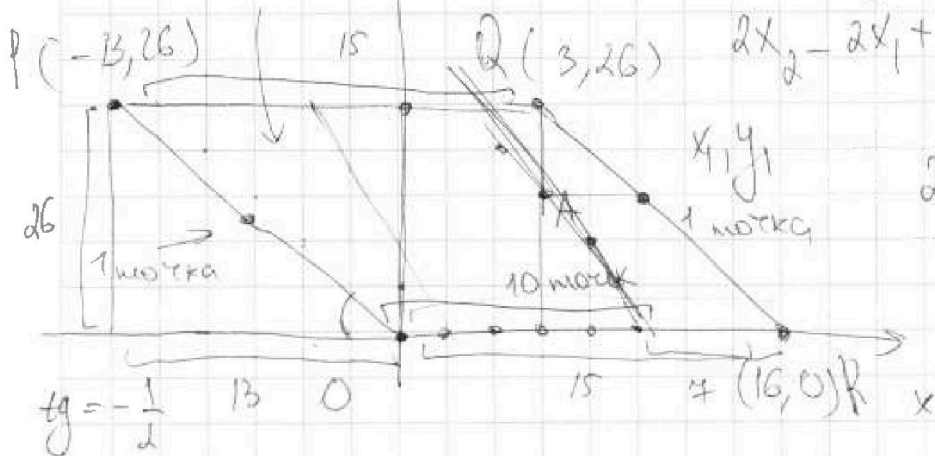
- 1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$8 \cdot 27 + 14 + 14 = y \quad (8 \cdot 27 + 28) \cdot 14$$

$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

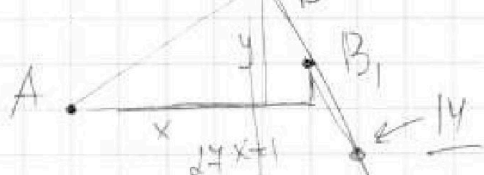
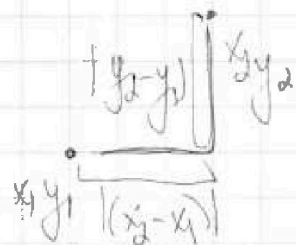
$$2(x_2 - x_1) = 14x$$

$$+ (y_2 - y_1) = 14$$

$$\text{tg} = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = y_1 = 0 \quad 2x_2 + y_2 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$



$$2x + y = 14$$

$$2(x+1) + y - 2 = 2x + y = 14$$

$$S = 3 \cdot 16 = 48$$

$$S = \frac{15 + 15 + 4 + 2}{2} + \text{количество точек} - 1$$

$$\frac{36}{2} + \text{количество точек} - 1 = 48$$

$$18 + x + 1 = 48$$

$$x = 48 - 18 + 1 = 31$$

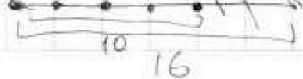
$$2 \cdot 6 + 2 = 14$$

$$y_1 = y_2$$



если  $x_1$  - целое, то 14  
имеет B.

$$\begin{array}{r} +3312 \\ -169 \\ \hline 3481 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 a, b = 1 \quad (ab; a^2 - 7ab + b^2) &= m \nearrow \max \\
 (ab; a^2 - 7ab + b^2) &= \\
 = (ab; a^2 + b^2) & \quad \text{и др.} \quad \text{и др.} \quad \text{и др.} \quad \text{и др.} \\
 \text{и др.} \quad \text{и др.} & \quad \text{и др.} \quad \text{и др.} \quad \text{и др.} \quad \text{и др.} \\
 \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} & \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\
 1 - 7 \cdot 2 + 4 & \quad = \quad 1 - 10 \quad = \quad -9 \\
 m = 1 &
 \end{aligned}$$

$$(a+b; (a+b)^2 - 9ab) = (a+b; 9ab)$$

знаем  $\text{НОД}(a+b; 9ab) \leq 9$ .

$9 \mid a+b$      $a+b \not\mid 9$     м.е.  $(ab, a+b) = 1$   
 $9 \mid 9$      $b=8, a=1$

$$\frac{8+1}{1-7 \cdot 8+8^2} = \frac{9}{1+64-56} = \frac{9}{8+1} = \frac{9}{9}$$

Ответ: 9

$$\begin{aligned}
 6 + 2\sqrt{48} &< 3 \cdot 3 - 3\sqrt{3} \\
 6 + 2\sqrt{48} &> 69 + 23 \\
 6 + 2\sqrt{48} &\geq 3 \cdot 23 + 23\sqrt{3} \\
 6 + 2\sqrt{48} &\geq 69 + 23 \\
 6 + 2\sqrt{48} &\geq 92 \\
 2\sqrt{48} &\geq 86 \\
 \sqrt{48} &\geq 43 \\
 48 &\geq 1849 \\
 48 &< 1849
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c$      $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$      $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$   
 $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$      $abc - ?$

по 2: суммарная степень входящих  $\geq 23$ .  
 значит  $abc: 2^{23}$

по 7: суммарная степень входящих  $\geq 39$ .  
 значит  $abc: 7^{39}$

$abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$

по 2:  $\begin{cases} a' + b' \geq 15 \\ b' + c' \geq 17 \\ a' + c' \geq 23 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 17 \\ \hline 23 \\ + 40 \\ \hline 15 \\ \hline 55 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ + 39 \\ \hline 11 \\ \hline 50 \end{array}$$

$a' = 7$      $b' = 8$   
 $c' = 16$

$a' + b' + c' \geq \frac{15 + 17 + 23}{2} = \frac{55}{2} \Rightarrow = 27,5$

$a' + b' + c' \geq 28$

~~$a' = 8$~~      ~~$b' = 8$~~   
 ~~$c' = 16$~~   
 ~~$a' = 8$~~ ,     ~~$b' = 5$~~      $15 + 13 = 28$   
 $c' = 13$

$a' = 10$      $b' = 5$      $c' = 13$   
 $15$      $23$

по 7:  $\begin{cases} a' + b' \geq 11 \\ b' + c' \geq 18 \\ a' + c' \geq 39 \end{cases}$      $a' + b' + c' \geq \frac{11 + 18 + 39}{2} = \frac{68}{2} = 34$

$a' = 8$     11  
 $b' = 3$     0  
 $c' = 31$     28

Вито:  $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

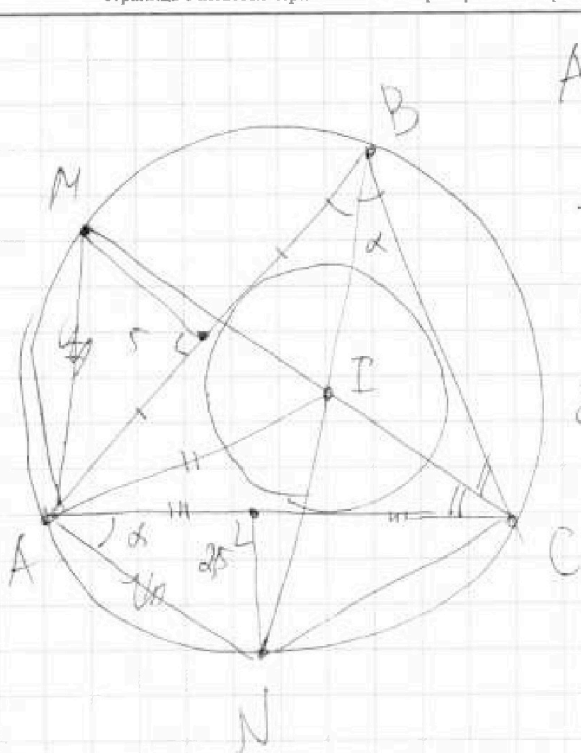
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AO_2^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$$

$$= 49 + 17x^2 - \frac{289}{x^2 + 1}$$

$$2 \cdot 169 \left( 1 - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) = 49 + 17x^2$$

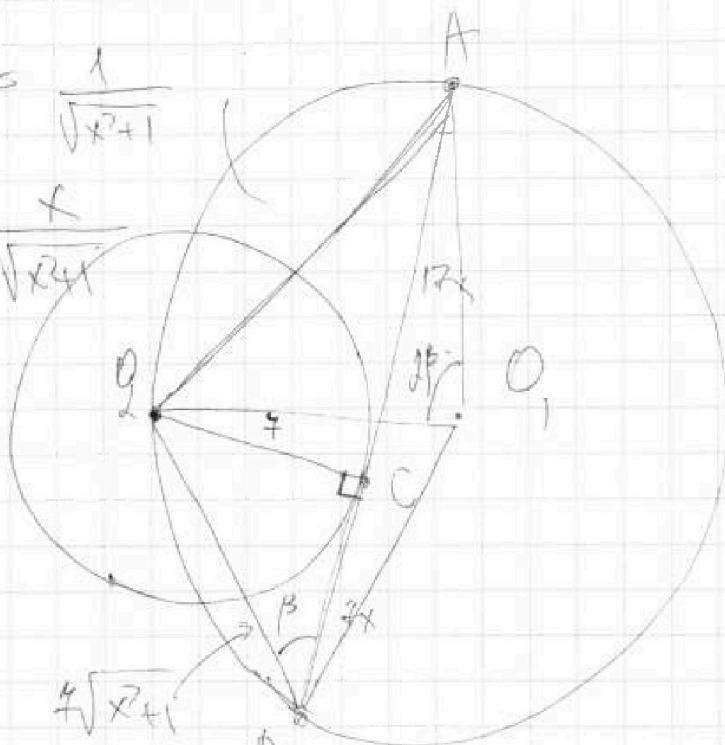
$$2 \cdot 169 \left( \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{x^2 + 1} \right) = 49 + 17x^2$$

$$S_{\triangle ABO_2} = 7 \cdot 12x$$

$$\sin \beta = \frac{7}{7\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\cos \beta = \frac{7x}{7\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$O_2B = \sqrt{49(x^2 + 1)} = 7\sqrt{x^2 + 1}$$



~~87~~ ~~4~~ ~~17~~ ~~cos~~ ~~17~~

$$\cos 2\beta = \frac{x^2}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{4 \cdot 169}{x^2 + 1} = 49 + 289x^2$$

$$4 \cdot 169 = (x^2 + 1) = (x^2 + 1)(49 + 289x^2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \times 17 \\ \hline + 119 \\ 74 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$+ \frac{289}{17}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 289 \\ 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$(26-4)(26+4) = 19 \cdot 33 = 4 \cdot 17^2$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 338 \\ \times 338 \\ \hline 2404 \\ + 1014 \\ \hline 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 19 \\ 133 \\ \hline + 57 \\ 57 \\ \hline 624 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 169 \\ 4 \\ \hline 646 \\ \hline 646 \end{array}$$

$$26 : 13 = 2$$

$$x^2 + 1 : 13$$

$$\begin{array}{r} 646 \overline{) 2} \\ \underline{6} \phantom{00} \\ 4 \\ \underline{6} \\ 16 \end{array}$$

$$\frac{646}{\times 211} = 494 \frac{289}{338}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sin \alpha}{AN} = \frac{\sin \beta}{AM}$$

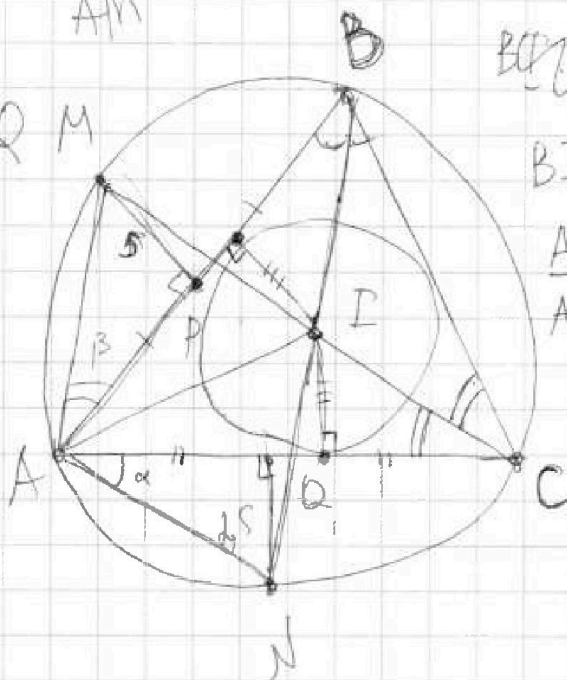
$$\triangle AMP \sim \triangle CQ$$

$$\frac{MP}{R} = \frac{AM}{CE}$$

$$\frac{QN}{R} = \frac{AN}{BI}$$

$$2 = \frac{MP}{QN} = \frac{AM \cdot BI}{CE \cdot AN}$$

$$\frac{AM}{AN} = \sqrt{2}$$



~~BC=CA~~

$$BI \cdot AN = AM \cdot CP$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{BI}{CE}$$