



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поруа QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}, \quad ab: 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc: 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

1) пусть a', b', c' - степени входящие 2 в a, b, c соответственно ($a', b', c' \in \mathbb{Z}, a', b', c' \geq 0$)

Из условия следует, что:

$$\begin{cases} a' + b' \geq 15 \\ b' + c' \geq 17 \\ a' + c' \geq 23 \end{cases}, \text{ значит } a' + b' + c' \geq \frac{15 + 17 + 23}{2} = \frac{55}{2} = 27,5$$

Поскольку a', b', c' - целые, то $a' + b' + c' \geq 28$.

$$a' + b' + c' = 28, \text{ если } a' = 10, b' = 5 \text{ и } c' = 13$$

2) пусть a', b', c' - степени входящие 7 в a, b, c соответственно ($a', b', c' \in \mathbb{Z}, a', b', c' \geq 0$)

Из условия следует, что

$$\begin{cases} a' + b' \geq 11 \\ b' + c' \geq 18 \\ a' + c' \geq 39 \end{cases}, \text{ значит } a' + b' + c' \geq a' + c' \geq 39.$$

$$a' + b' + c' = 39, \text{ если } a' = 11, b' = 0, c' = 28.$$

Значит $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$. (пример, когда достигается равенство: $a = 2^{10} \cdot 7^{11}, b = 2^5, c = 2^{13} \cdot 7^{28}$).

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(a, b) = \text{НОД}(a, b)$. По условию, $(a, b) = 1$

если дробь $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ можно сократить на m ,

то $(a+b, a^2-7ab+b^2) : m$. Значит наибольшее
такое m — это $(a+b, a^2-7ab+b^2)$.

$(a+b, a^2-7ab+b^2) = (a+b, (a+b)^2 - 9ab) =$
 $= (a+b, 9ab) = m$. Если $a : p$ (p — простое),

то $b : p$ ($(a, b) = 1$), значит $a+b : p$

то есть $(a+b, 9ab) = 1$, значит

$m = (a+b, 9)$. Значит $m \leq 9$.

Пример, когда $m = 9$:

$a = 1, b = 8: (a, b) = 1,$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{8+1}{1+64-7 \cdot 8} = \frac{9}{65-56} = \frac{9}{9}$$

Числитель и знаменатель можно поделить
на 9.

Ответ: 9.

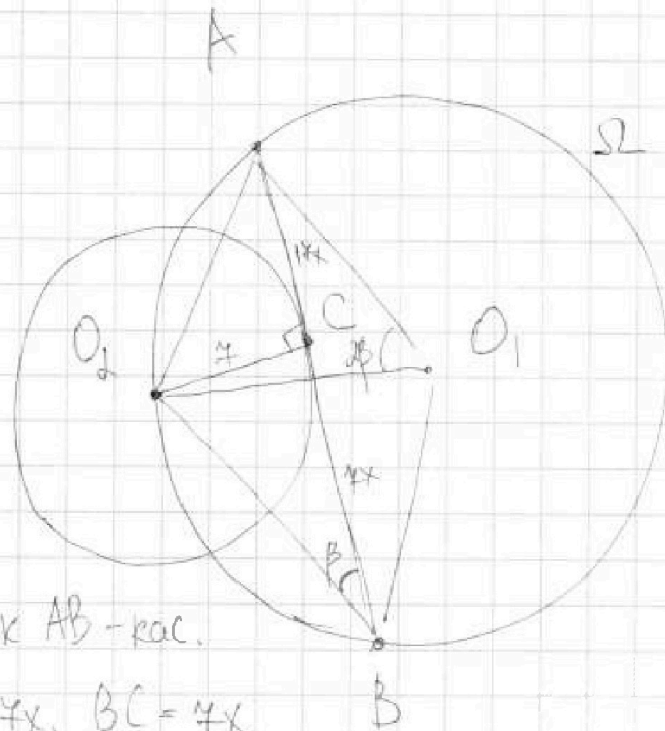
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $O_2C \perp AB$, м.к AB - кас.

2) Пусть $AC = 4x$, $BC = x$.

3) По м. Пифагора: $O_2B = \sqrt{4^2 + x^2} = 4\sqrt{x^2 + 1}$

4) $\sin \beta = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{4\sqrt{x^2 + 1}}$

5) $\cos \beta = \frac{4x}{4\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

6) $\cos \angle O_1O_2A = \cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta =$
 $= \frac{x^2}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

7) $O_1A^2 = 4^2 + 4x^2$
 по м. Пифагора ($\Delta A O_2 C$)

8) $O_1A^2 = O_1O_2^2 + AO_2^2 - 2O_1O_2 \cdot AO_2 \cdot \cos 2\beta =$
 по м. косинусов
 ΔO_1AO_2 $= 2 \cdot 16^2 - 2 \cdot 16^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 2 \cdot 16^2 \left(1 - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) =$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

ЛФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= 2 \cdot 13^2 \left(\frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{x^2 + 1} \right) = \frac{2 \cdot 13^2 \cdot 2}{x^2 + 1} = \frac{26^2}{x^2 + 1}$$

$$= 2A^2 = 4^2 + 17^2 x^2$$

$$26^2 = (x^2 + 1)(49 + 17^2 x^2)$$

$$26^2 = 49x^2 + 49 + 17^2 x^4 + 17^2 x^2$$

$$17^2 x^4 + x^2(49 + 17^2) - (26^2 + 49) = 0$$

$$D = (49 + 17^2)^2 + 4(26^2 - 49) \cdot 17^2 =$$

$$= 49^2 + 17^4 + 2 \cdot 49 \cdot 17^2 + 4 \cdot 17^2 \cdot 26^2 - 4 \cdot 49 \cdot 17^2 =$$

$$= 49^2 + 17^4 + 4 \cdot 17^2 \cdot 26^2 - 2 \cdot 49 \cdot 17^2 =$$

$$= 49^2 + 17^2(17^2 - 98) + 4 \cdot 17^2 \cdot 26^2 =$$

То есть $\frac{26^2}{x^2 + 1} = 49 + 289x^2$

$$26^2 = 13^2 \cdot 4 = 169 \cdot 4 = 676$$

$$\frac{676}{x^2 + 1} = 49 + 289x^2$$

Заметим, что $x = 1$ — корень.

$$\frac{676}{2} = 338 = 289 + 49$$

Других корней нет, т.к. в трехчлене (относительно x^2)

$$17^2 x^4 + x^2(49 + 17^2) - (26^2 - 49) = 0 \quad \begin{matrix} \text{с старейшей коэффициентом} \\ \text{свободной} \end{matrix}$$

чем < 0 , то есть второй корень < 0 . (т.е. нет)

$$g) AB = 17x + 7x = 24x = 24!$$

Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

Пусть $3x^2 - 6x + 2 = a$ ($a \geq 0$), $3x^2 + 3x + 1 = b$ ($b \geq 0$)

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b.$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{a} = \sqrt{b} \quad (1) \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{array} \right.$$

$$(1) \quad 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \quad (4 \geq 0)$$

$$9x = 1 \quad \text{Пусть } x = \frac{1}{9} : \quad 3x^2 + 3x + 1 = 3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 > 0$$

$$x = \frac{1}{9}.$$

$x = \frac{1}{9}$ - корень

$$(2) \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (3) \\ 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(3) \quad -9x = -2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1) \quad \text{и, } \underline{x \geq 0} \quad *$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$69x^2 - 2(6x) - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 4 \cdot 69 = 312 = 4 \cdot 78 = 4 \cdot 2 \cdot 39$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > 0$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0 \quad \text{не подходит} \quad *$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \\ 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \quad (4) \end{cases}$$

$$(4) \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 - 24 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \\ -x \geq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \frac{6+2\sqrt{48}}{3 \cdot 23} \stackrel{?}{\leq} \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$6+2\sqrt{48} \stackrel{?}{\leq} 3 \cdot 23 - 23\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \underbrace{2\sqrt{48}}_{18} + \underbrace{23\sqrt{3}}_{45} \stackrel{?}{\leq} 63$$

\rightarrow не верно.

$$x = \frac{6+2\sqrt{48}}{69} \text{ — корень.}$$

Ответ: $\frac{1}{9}, \frac{6+2\sqrt{48}}{69}$.

$$2) \frac{6+2\sqrt{48}}{3 \cdot 23} \stackrel{?}{\geq} \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$$6+2\sqrt{48} \stackrel{?}{\geq} 23 \cdot 3 + 23\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{48}}{63} \stackrel{?}{\geq} 63 + 23\sqrt{3} \text{ — не верно}$$

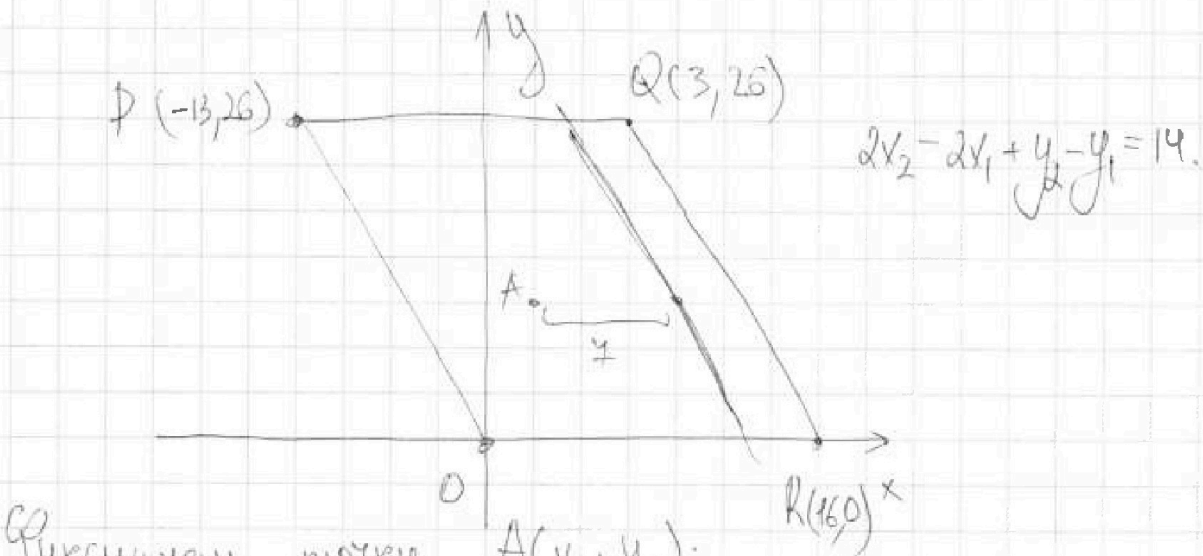
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Фиксируем точку $A(x_1, y_1)$:

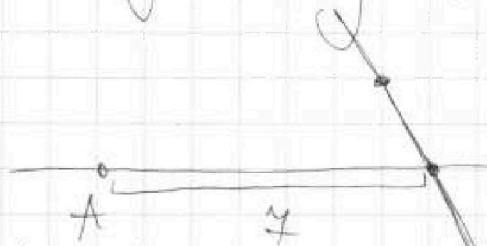
$$2x_2 + y_2 = \frac{14 + 2x_1 + y_1}{\text{const.}} \quad - \text{т.е. это уравнение прямой}$$

Значит все точки B , проходящие где A
лежат на одной прямой, с условием коэффициен-
ента -2 .

Пусть $y_1 = y_2$ (возьмем точку B):

$$2x_2 - 2x_1 = 14$$

$$x_2 - x_1 = 7$$



Т.е. ГМТ B где $A(x_1, y_1)$ - прямая, проходящая
через $(x_1 + 7, y_1)$ с условием коэффициентом -2 .

Такая прямая параллельна PO и QR

Для любой точки A , лежащей на PQ параллелограмм

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

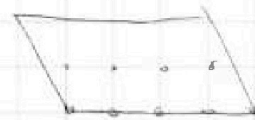
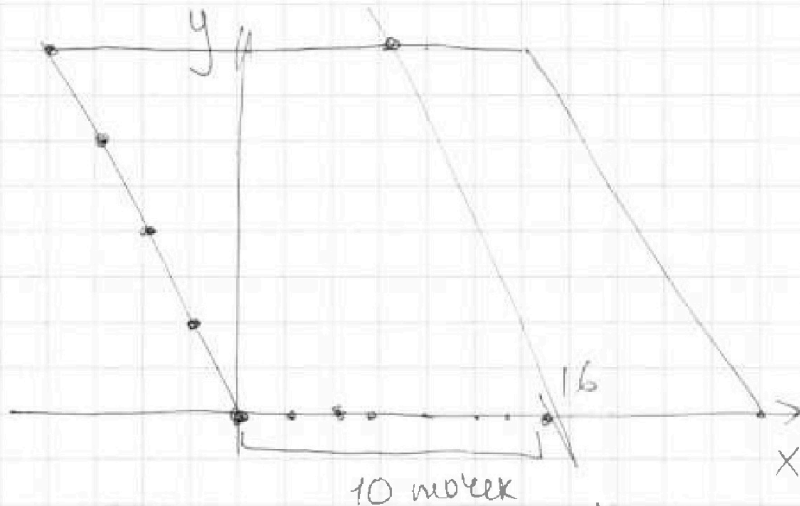
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

найдемся либо 14 точек B , либо 12, если
 y_1 - четно и $x_1 + 7$ четно в параллелограмме,
13 точек B , если y_1 - нечетно и $x_1 + 7$ четно в
параллелограмме, и 0 точек B , если $x_1 + 7$ не
четно в параллелограмме.



проведем прямую через $(3,0)$ параллельно стороне
параллелограмма. Если точка A находится правее
этой прямой, то подходит 0 точек B .

Т.е. точки, которые нас интересуют лежат
на этой прямой или левее.

При четной y -координате таких точек 10,
при нечетной - 8.

То есть всего пар точек A, B :



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\underbrace{10 \cdot 14}_{\text{четыре } y_1} \cdot 14 + \underbrace{98 \cdot B_1}_{\text{четыре } y_1} \cdot B_1 = 1960 + 1352 + 169 = 3481$$

(покажем, что если (A, B) - подходит, то

(B, A) - не подходит), к. выражение $2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1$
меняет знак).

Ответ: 3481.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

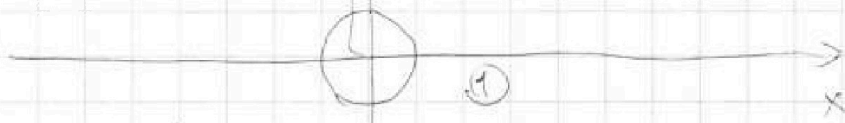
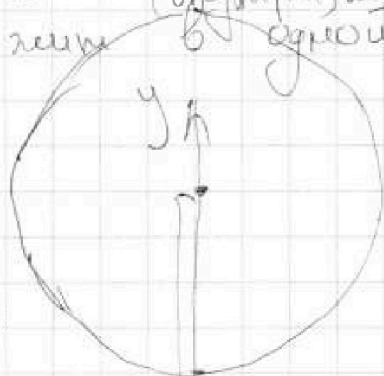
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0. \end{cases}$$

① - окружность с центром $(0,0)$ и радиусом 1

② - окружность с центром $(0,12)$ и радиусом 4.

(x,y) - удовлетворяет второму уравнению, если лежит (внутри) либо на границе. Уравнению, если лежит в одной из окружностей ①, ② не пересекаются



$ax+y-8b=0$ - прямая, с условием коэффициентом $-a$.

$$y = -ax + 8b.$$

Система имеет 2 решения, если прямая имеет 2 точки пересечения с кругами, но если касается обеих окружностей.

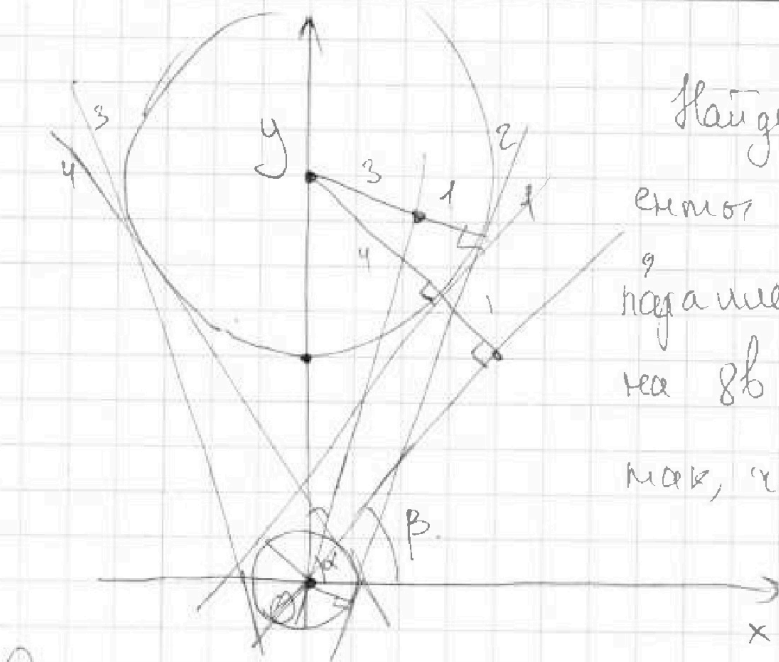
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найдем угловые коэффициенты a касательных, параллельных перпендикуляру к l . Это можно сделать так, что такая прямая совпадет с касательной.

Очевидно, что $a_4 = -a_1$, $a_3 = -a_2$ (в силу симметрии относительно Oy).

1) Через точку O проведем прямую, параллельную 2 .

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{4}\right), \quad a_2 = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{4}\right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15}$$

2) Через точку O проведем прямую, параллельную 1 .

$$\cos \beta = \sin(90^\circ - \beta) = \frac{5}{12}$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{144 - 25}}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{\sqrt{144 - 25}}{5}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{119}}{5}; -\frac{\sqrt{119}}{5}; \sqrt{15}; -\sqrt{15}$.

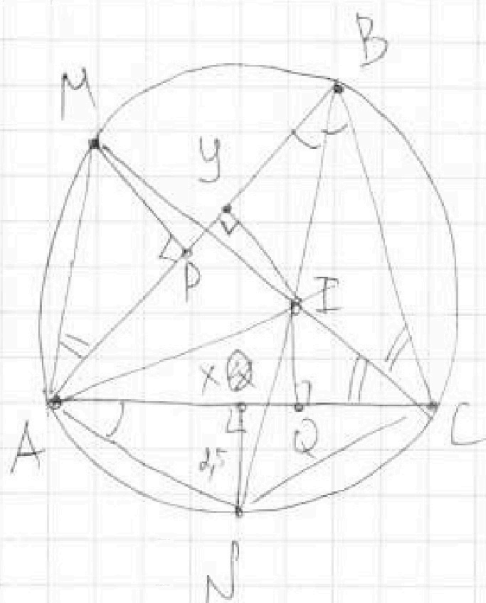
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- 1) M, I, C - лежат на биссектрисе $\angle C$.
- 2) B, I, N - лежат на биссектрисе $\angle B$.
- 3) $\angle MAB = \angle MCB$
- 4) $\angle NAC = \angle NBC$
- 5) $\triangle AMP \sim \triangle CIQ$, значит $\frac{MP}{R} = \frac{AM}{CI}$
(R - радиус вписанной окружности)
- 6) Аналогично $\triangle ANX \sim \triangle BUI$: $\frac{XN}{R} = \frac{AN}{BI}$
- 7) По теореме о трезубце: $AN = NI = CN$
- 8) По теореме о трезубце: $AM = MI = BN$
- Значит
- 9) $\text{deg}(I, \text{относ. окр.}) = BI \cdot IN = MI \cdot CI$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

10) Знаем $\frac{AM}{AN} = \frac{BI}{CI}$

11) $\frac{MP}{AN} = \frac{AM \cdot BI}{AN \cdot CI} = \frac{5}{2,5} = 2 = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$

$$\frac{AM}{AN} = \sqrt{2}$$

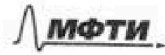
12) $\frac{AM}{AN} = \frac{\sin \angle ABN}{\sin \angle ACM} = \sqrt{2}$ по м. синусов ($\triangle ABC$)

13)

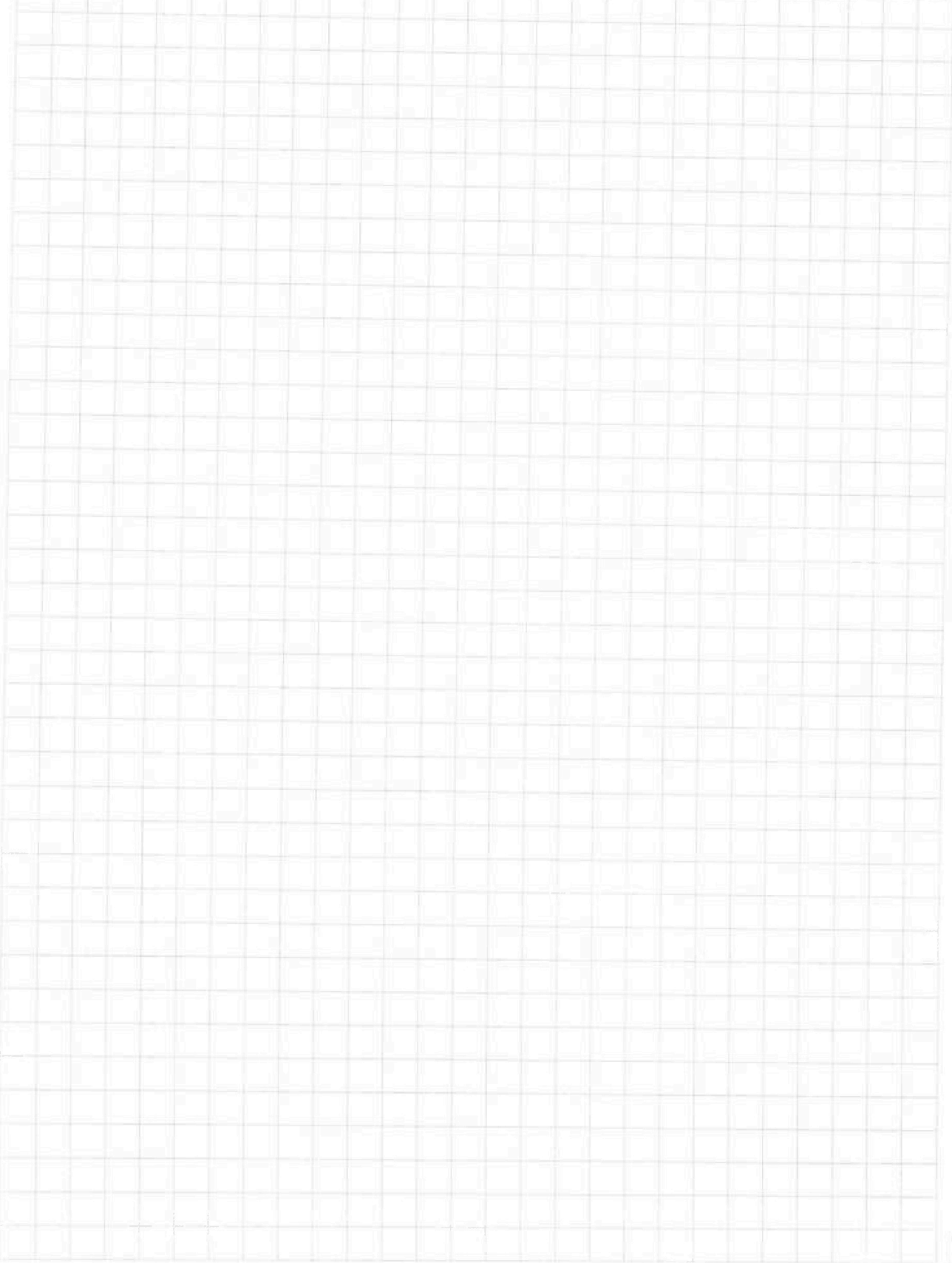


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





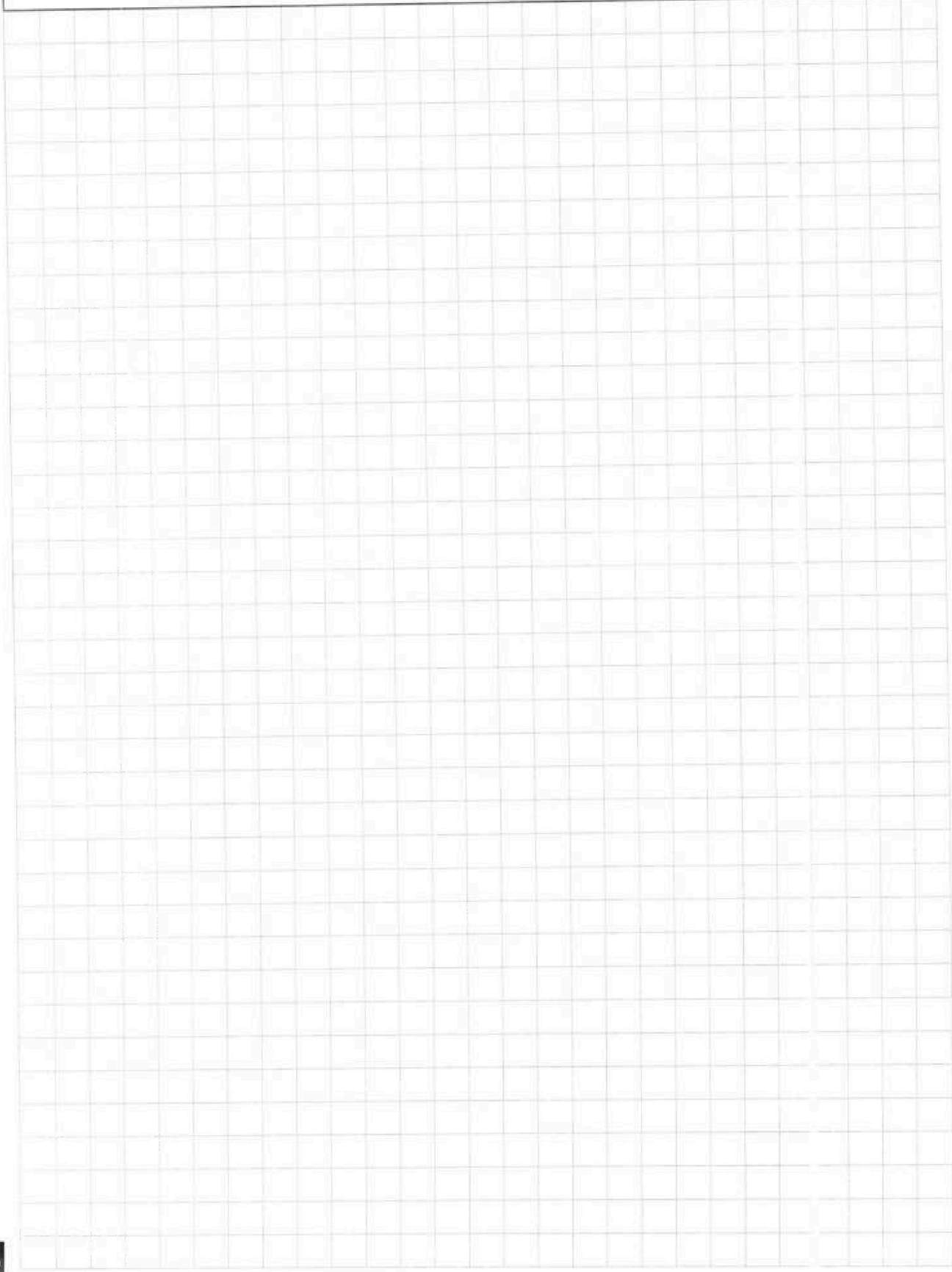
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



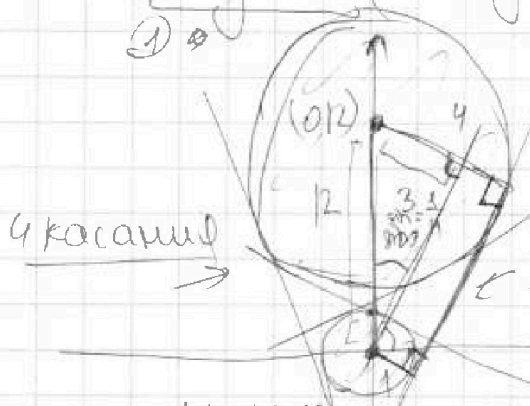
$$ax + y - 8b = 0$$

~~$$ax + y - 8b = 0$$~~

$$ax + y - 8b = 6$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

① ②



$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{x_1 y_1 - \text{точка в } \text{окружности}}{b}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} > 0$$

$$c = 12^2 - 3^2 = 144 - 9 = 135$$

$$y = -ax + 8b$$

ровно 2 решения

1 корень

$$x^2 + (y-12)^2 = 16$$

$$x^2 + (ax + b - 12)^2 = 16$$

$$= x^2 + a^2 x^2 + b^2 + 144 +$$

$$+ 2abx - 24b - 24ax - 16 = 0$$

$$a^2(x^2 + (ax + b - 12)^2) + x(2ab - 24a) + b^2 - 24b + 144 - 16 = 0$$

$$= x^2(a^2 + 1) + 2x(ab - 12a) + b^2 - 24b + 128 = a^2 b^2 + 4 = 0$$

$$a^2 - b^2 + 4 = 0$$

$$y = ax + b$$

$$ax + 2abx + b^2 + x = 1$$

$$(a^2 + 1)x + 2abx + b^2 - 1 = 0$$

$$D = 4a^2 b^2 - 4(b^2 - 1)(a^2 + 1) = 0$$

1 корень

$$\frac{D}{4} = (ab - 12a)^2 - (b^2 - 24b + 128)$$

$$\begin{array}{r} x \ 5 \ 5 \\ 9 \ 4 \ 6 \\ + 6 \ 4 \ 6 \\ \hline 1 \ 4 \ 9 \end{array}$$

$$6 \cdot 8 = 48$$

$$\begin{array}{r} x \ 5 \ 5 \\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 9 \ 6 \\ 1 \ 4 \\ + 5 \ 6 \\ \hline 1 \ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 8 \ 1 \ 8 \\ 1 \ 3 \ 5 \ 1 \\ + 1 \ 9 \ 6 \ 0 \\ \hline 1 \ 1 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

48 35+8
 МФТИ 2 8



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow 4(9+63) =$$

$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$= 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

умножим на $\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}$

$$(1 - 9x) = (1 - 9x)$$

$$x = \frac{1}{9} = 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0 \quad D = 9 - 4 \cdot 3 < 0$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 0$$

$$a + 1 \geq 2\sqrt{a}$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{2} + \frac{3x^2 + 3x + 2}{2} \geq 1$$

$$\sqrt{a} \leq \frac{a+1}{2}$$

$$\frac{3(x-1)^2}{2}$$

$$\text{при } x = \frac{1}{9}$$

$$3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} - \frac{6}{9} + 1 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 1$$

а) 1



$$\sqrt{(3(x^2 - 1) - 1)} +$$

$$+ \sqrt{3(x-1)^2 + (9x-2)}$$

$$\sqrt{9x-2}$$

$$x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2 \cdot 6}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a+b} = 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (9 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 -$$

$$6x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$6x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 6 = 24 + 9 = 33$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = \\
 & = (1 - 9x) (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})
 \end{aligned}$$

не 0: $\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$ не 0: $1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

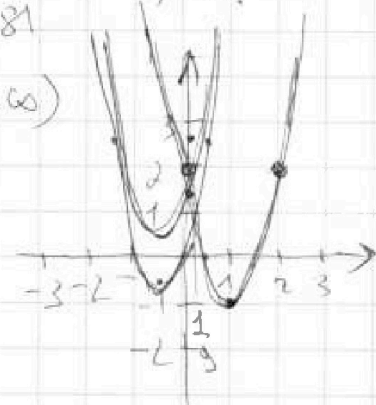
при $x = \frac{1}{9}$: $3 \cdot \frac{1}{9} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2$

$$\frac{3}{81} - \frac{6 \cdot 9}{81} + 2 = \frac{3 - 54 + 2 \cdot 81}{81} \neq 0$$

$(1 - 9x) \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{9}$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

выясним: $\frac{3}{2 \cdot 3} = 1$ выясним: $\frac{6}{2 \cdot 3} = 1$



выясним: $\frac{-3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$ 1: $3 - 6 + 2 = -1$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = -\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$3x^2 - 6x + 3 = a \qquad 3(x^2 - 1)^2 = a$$

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{3(x-1)^2 + 1} + \sqrt{3(x-1)^2 - 2} = 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

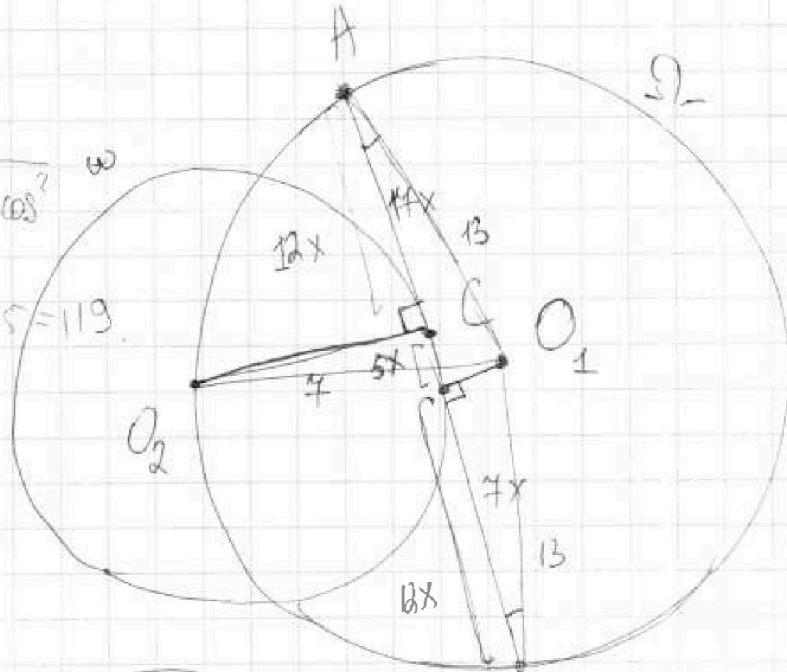
3) $AC : CB = 17 : 7$

$AB = 17x + 7x = 24x$

$\sin \arccos \frac{1}{4}$

$\cos \alpha = \frac{1}{4} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

$144 - 25 = 124 - 5 = 119$



$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = 1 - 9x$

To solve.

$\frac{1 - 9x}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} = 1 - 9x$

$(r - x\delta + \nu)(1 + \nu) \Big|_{r \pm} = r - x\delta + \nu r$

$r = \frac{(r - x\delta + \nu)(1 + \nu) \Big|_{r \pm} + r - x\delta + \nu + x + \nu}{1 + \nu}$

$r = \frac{2 + x\delta + \nu}{1 + \nu}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{\Delta O_1AB} = \frac{7 \cdot 24x}{2} = 7 \cdot 12x$$

$$AB^2 = 2 \cdot B^2 - 2 \cdot B \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

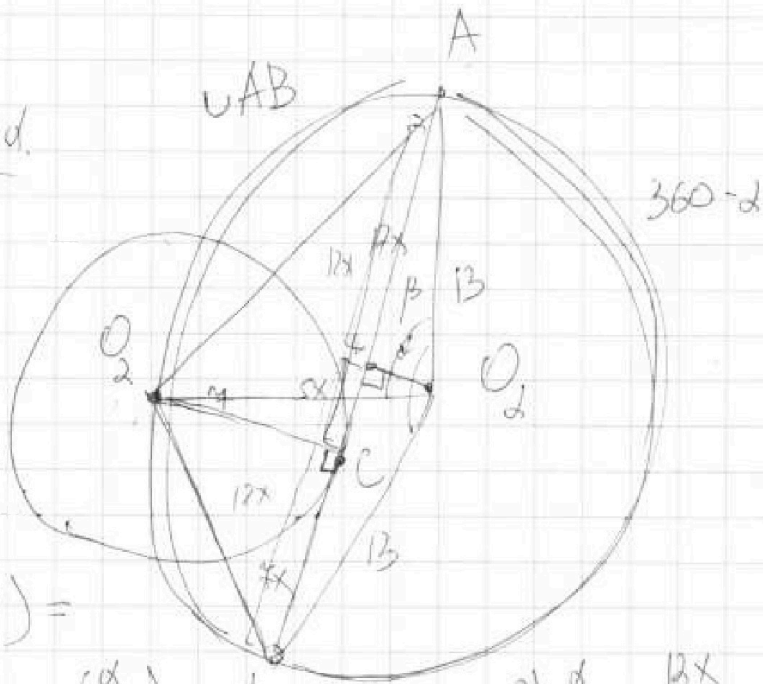
$$O_2B^2 = 49 + 49x^2$$

$$O_2A^2 = 49 + 17^2x^2$$

$$\alpha =$$

$$\cos \angle A O_2 B = \cos \left(\frac{360^\circ - \alpha}{2} \right) =$$

$$= \cos \left(\frac{180^\circ - \alpha}{2} \right) = -\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{12x}{13}$$

$$AB^2 = 49 + 17^2x^2 + 49 + 49x^2 + 2 \sqrt{49 + 17^2x^2} \cdot \sqrt{49 + 49x^2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$= \sqrt{169 - 144x^2} + 13$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{144x^2}{13^2}}$$

$$7^2 + 13^2 - 2 \cdot 7 \cdot 13 \cos \beta = 49 + 17^2x^2$$

$$49 + 169 - 14 \cdot 13 \cdot \cos \beta = 49 + 17^2x^2$$

$$169 - 14 \cdot 13 \cos \beta = 17^2x^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

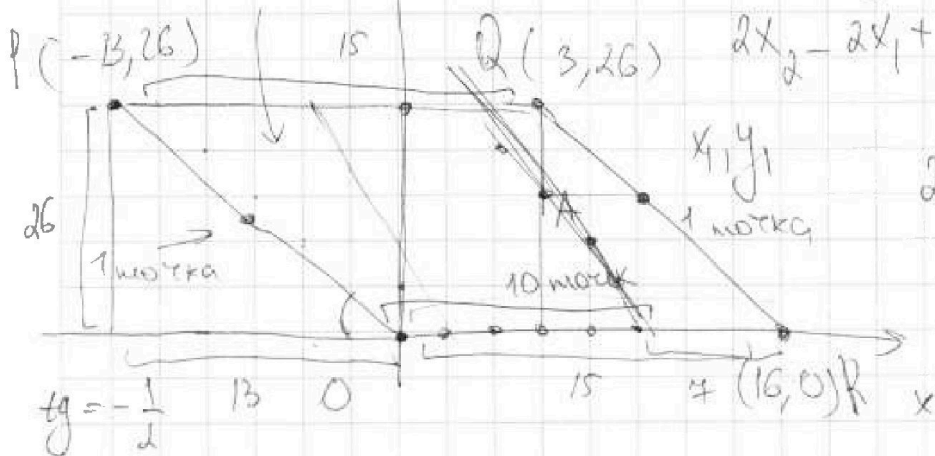
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$8 \cdot 27 + 14 + 14 = y \quad (8 \cdot 27 + 28) \cdot 14$$

$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$



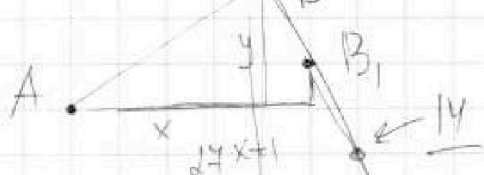
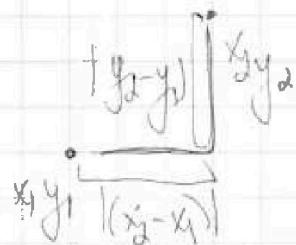
$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) = 14x$$

$$+ (y_2 - y_1) = 14$$

$$x_1 = y_1 = 0 \quad 2x_2 + y_2 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$



$$2x + y = 14$$

$$2(x+1) + y - 2 = 2x + y = 14$$

$$S = 3 \cdot 16 = 48$$

$$S = \frac{15 + 15 + 4 + 2}{2} + \text{количество точек} - 1$$

$$\frac{36}{2} + \text{количество точек} - 1 = 48$$

$$18 + x + 1 = 48$$

$$x = 48 - 18 + 1 = 31$$

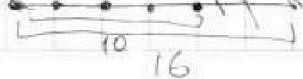
$$2 \cdot 6 + 2 = 14$$

$$y_1 = y_2$$



если x_1 - целое, то 14
имеет B.

$$\begin{array}{r} + 3312 \\ 169 \\ \hline 3481 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b = 1 \quad (ab; a^2 - 7ab + b^2) = m \nearrow \max$
 $(ab; a^2 - 7ab + b^2) =$
 $= (ab; a^2 + b^2)$

$\frac{1}{2}$

$1 - 7 \cdot 2 + 4 = -10$
 $1 - 10 = -9$

$m = 1$

$(a+b; (a+b)^2 - 9ab) = (a+b; 9ab)$

знаем $\text{НОД}(a+b, 9ab) \leq 9$.

$9: \quad b=8, a=1 \quad a+b \nmid p. \quad \text{т.е.} \quad (ab, a+b) = 1$

$\frac{8+1}{1-7 \cdot 8 + 8^2} = \frac{9}{1+64-56} = \frac{9}{8+1} = \frac{9}{9} = 1$

Ответ: 9

$6 + 2\sqrt{18} < 3 \cdot 3 - 3\sqrt{3}$
 $6 + 2\sqrt{18} < 9 - 3\sqrt{3}$
 $2\sqrt{18} < -3 + 3\sqrt{3}$
 $2 \cdot 3\sqrt{2} < 3(\sqrt{3} - 1)$
 $6\sqrt{2} < 3(\sqrt{3} - 1)$
 $2\sqrt{2} < \sqrt{3} - 1$
 $2\sqrt{2} + 1 < \sqrt{3}$
 $2\sqrt{2} + 1 < 1.732$
 $2 \cdot 1.414 + 1 < 1.732$
 $2.828 + 1 < 1.732$
 $3.828 < 1.732$ (False)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$ $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$ $abc - ?$

по 2: суммарная степень входящих ≥ 23 .

значит $abc: 2^{23}$

по 7: суммарная степень входящих ≥ 39 .

значит $abc: 7^{39}$

$abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$

по 2: $a' + b' \geq 15$

$b' + c' \geq 17$

$a' + c' \geq 23$

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 + 17 \\
 \hline
 23 \\
 + 40 \\
 \hline
 15 \\
 \hline
 55 \\
 \hline
 11 \\
 \hline
 50
 \end{array}$$

$a' = 7$ $b' = 8$

$c' = 16$

$a' + b' + c' \geq \frac{15 + 17 + 23}{2} = \frac{55}{2} = 27,5$

$a' + b' + c' \geq 28$

$a' = 10$ $b' = 5$ $c' = 13$

15 23

~~$a' = 8$~~ ~~$b' = 8$~~

~~$c' = 8$~~

~~$a' = 8$~~ , ~~$b' = 5$~~ $15 + 13 = 28$

$c' = 13$

по 7:

$a' + b' \geq 11$

$b' + c' \geq 18$

$a' + c' \geq 39$

$\geq a' + c' \geq 39$

$a' + b' + c' \geq \frac{11 + 18 + 39}{2} = \frac{68}{2} = 34$

$a' = 8$ 11

$b' = 3$ 0

$c' = 31$ 28

Вито: $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

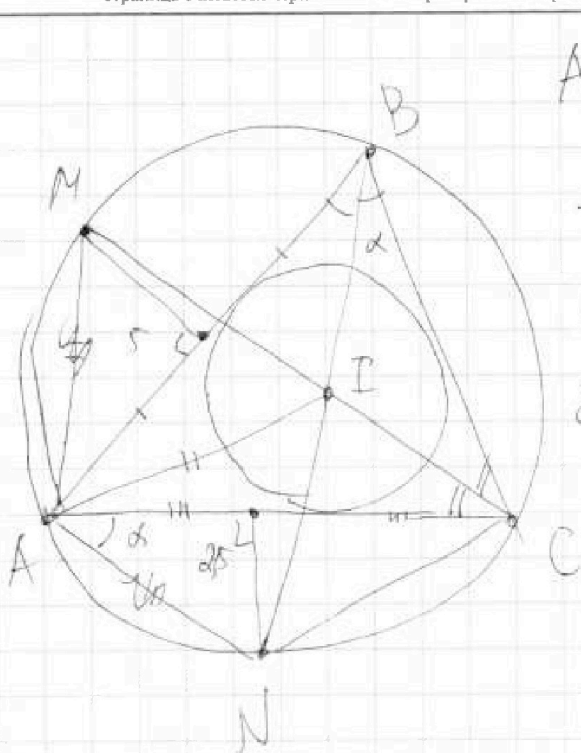
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AO_2^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$$

$$= 49 + 17x^2 - \frac{289}{x^2 + 1}$$

$$2 \cdot 169 \left(1 - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) = 49 + 17x^2$$

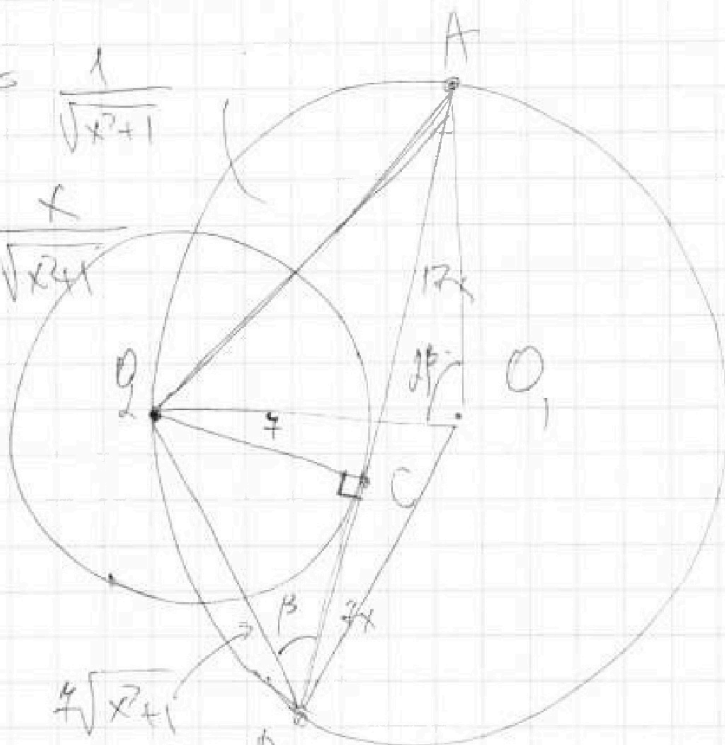
$$2 \cdot 169 \left(\frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{x^2 + 1} \right) = 49 + 17x^2$$

$$S_{\triangle ABO_2} = 7 \cdot 12x$$

$$\sin \beta = \frac{7}{7\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\cos \beta = \frac{7x}{7\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$O_2B = \sqrt{49(x^2 + 1)} = 7\sqrt{x^2 + 1}$$



$$\cos 2\beta = \frac{x^2}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{4 \cdot 169}{x^2 + 1} = 49 + 289x^2$$

$$4 \cdot 169 = (x^2 + 1)(49 + 289x^2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \times 17 \\ \hline + 119 \\ 74 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$+ \frac{289}{17}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 289 \\ 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$(26-4)(26+4) = 19 \cdot 33 = 4 \cdot 17^2$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 338 \\ \times 338 \\ \hline 2404 \\ + 1014 \\ \hline 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 19 \\ \hline 133 \\ + 57 \\ \hline 57 \\ \hline 624 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 169 \\ \hline 133 \\ \hline 646 \\ \hline 646 \end{array}$$

$$26 : 13 = 2$$

$$x^2 + 1 : 13$$

$$\begin{array}{r} 646 \overline{) 2} \\ \underline{6} \quad 338 \\ \quad 4 \\ \quad \underline{6} \\ \quad \quad 16 \end{array}$$

$$\frac{646}{\times 211} = 494 \frac{289}{338}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sin \alpha}{AN} = \frac{\sin \beta}{AM}$$

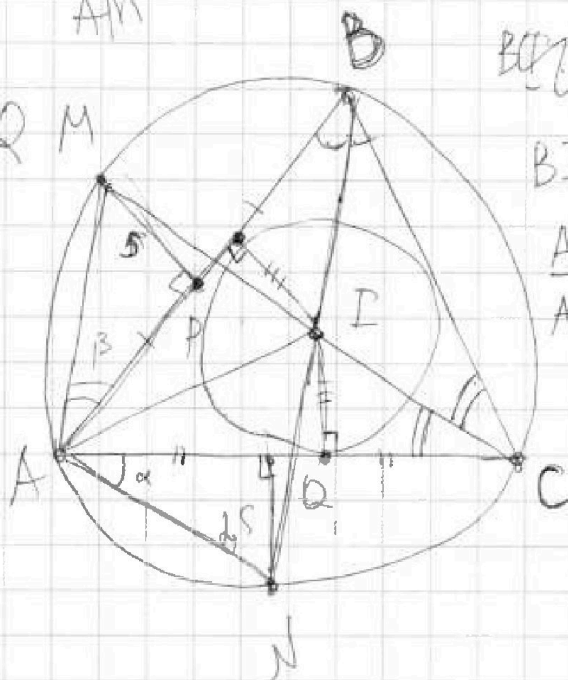
$$\triangle AMP \sim \triangle CQ$$

$$\frac{MP}{R} = \frac{AM}{CE}$$

$$\frac{QN}{R} = \frac{AN}{BI}$$

$$2 = \frac{MP}{QN} = \frac{AM \cdot BI}{CE \cdot AN}$$

$$\frac{AM}{AN} = \sqrt{2}$$



~~BC=CA~~

$$BI \cdot AN = AM \cdot CP$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{BI}{CE}$$