



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



4. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

5. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

6. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

7. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

8. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

9. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

10. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим через  $X_p$  степень вхождения простого числа  $p$  в число  $x \in \mathbb{N}$ . Числа 2 и 7 - простые  $\Rightarrow$  если кто-то из них входит в число  $y$  в степени  $n$  ( $y_2 = n$  напр.), в число  $z$  в степени  $m$  ( $z_2 = m$ ), то в число  $xy$  в степени  $m+n$ . Если число  $X : p^k$ , то  $X_p \geq k$ . Тогда у нас есть:

$$+ \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 51 \\ a_2 + b_2 + c_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 26 \end{cases}$$

Т.о. в  $abc$  2 входит в хотя бы 26 степени

$a_2 + c_2 \geq 37 \Rightarrow$  т.к.  $b_2 \geq 0$ , то  $a_2 + c_2 + b_2 \geq 37$ , т.о. в  $abc$  7 входит в хотя бы 37 степени

$\Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример на  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$  :  
 $a = 2^9 \cdot 7^{10}$   
 $b = 2^6$   
 $c = 2^{11} \cdot 7^{27}$

Контролю убедитесь, что усл. на кратности выполн.

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{37}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что  $a^2 - 8ab + b^2 = (a+b)(b-7a) + 8a^2$ .

По условию  $\frac{a}{b}$  несократимо, т.е.  $a$  и  $b$  взаимно просты:  
 $(a; b) = 1 \Rightarrow (a+b; b) = 1$  и  $(a+b; a) = 1$ .

Надо найти наибольшее  $m$  такое, что  $(a+b) : m$   
и  $((a+b)(b-7a) + 8a^2) : m$ .

$(a+b)(b-7a) : (a+b) : m \Rightarrow ((a+b)(b-7a) + 8a^2) : m$ , только  
если  $8a^2 : m$ . Т.к.  $(a+b; a) = 1$ , то и  $(a+b; a^2) = 1$   
 $\Rightarrow (a^2; m) = 1 \Rightarrow 8 : m \Rightarrow m \leq 8$ .

Пример на 8:  $a=1, b=7$

Тогда  $\frac{1}{7}$  - несократимо,  $a+b=8, a^2 - 8ab + b^2 = 8 \Rightarrow$  ищем  
сократим на 8, ч.т.д.

Ответ: 8.

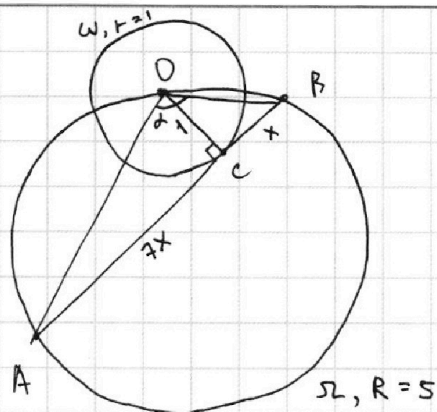
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $O$  - центр  $\omega \Rightarrow OC \perp AB$   
(рад.  $\delta$   $\pi$  кас.);  $BC = x \Rightarrow AC = 7x$ .

то т. Пиф.  $\triangle OCB$  и  $\triangle OCA$ :

$$OB = \sqrt{x^2 + 1}, \quad OA = \sqrt{49x^2 + 1}$$

Пусть  $\angle AOB = \alpha$ . Тогда для  $\triangle AOB$ :

$$S = \frac{1}{2} OC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x = 4x$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{2} \cdot \sqrt{(x^2 + 1)(49x^2 + 1)}$$

то т. син:  $\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow \frac{8x}{\sin \alpha} = 10 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4x}{5}$

$$4x = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{5} \cdot \sqrt{(x^2 + 1)(49x^2 + 1)}; \quad x \neq 0 \quad (x - \text{длина})$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x^2 + 1)(49x^2 + 1)} = 10$$

$$49x^4 + x^2 + 49x^2 + 1 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$x^2 = t \Rightarrow t > 0$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

~~$$625 + 49 \cdot 99 = 625 + 4851 = 5476 = 74^2$$~~

$$\frac{D}{4} = 25^2 + 49 \cdot 99 = 625 + 4851 = 5476 = 74^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{-25 \pm 74}{49}; \quad t > 0 \Rightarrow t = \frac{74 - 25}{49} = 1$$

т.о.  $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ ; т.к.  $x > 0$ , то  $x = 1$

$$\Rightarrow AB = 8x = 8.$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что  $(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = 2 - 7x$ . Сделаем  
замену  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a$  и  $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b$ . Тогда:

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$(a - b)(a + b) - (a - b) = 0$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Вернём замену. Сначала найдём  $x$ , а потом проверим  
ограничения.

$$\begin{aligned} 1) \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} &= \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ 2x^2 - 5x + 3 &= 2x^2 + 2x + 1 \\ 7x - 2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Заметим, что для  $2x^2 + 2x + 1$   $\Delta = 1 - 2 = -1 < 0 \Rightarrow$   
 $2x^2 + 2x + 1 > 0$  при любых  $x$ .

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1)(x - \frac{3}{2})$$

$$\text{при } x = \frac{2}{7}: \quad = 2 \cdot \underset{0}{(\frac{2}{7} - 1)} \cdot \underset{0}{(\frac{2}{7} - \frac{3}{2})} \Rightarrow > 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \text{ подходит.}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} &= 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2 \cdot \sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} &= 1 \\ 4x^2 - 3x + 3 + 2 \sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} &= 0 \end{aligned}$$

Заметим, что для  $4x^2 - 3x + 3$   $\Delta = 9 - 4 \cdot 12 = -39 < 0 \Rightarrow$

$4x^2 - 3x + 3 > 0$  при любых  $x$ . Т.к.  $\sqrt{\dots} \geq 0$ , то  
лев. часть  $> 0 \Rightarrow$  равенство 0 не и.б.

Ответ:  $\frac{2}{7}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 &= 12 \\ 2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 &= 12 \end{aligned} \Rightarrow y_2 \text{ и } y_1 \text{ одной четности}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) (x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) < 0$$

скобки разного знака.

Рассмотрим график это кер-ва.

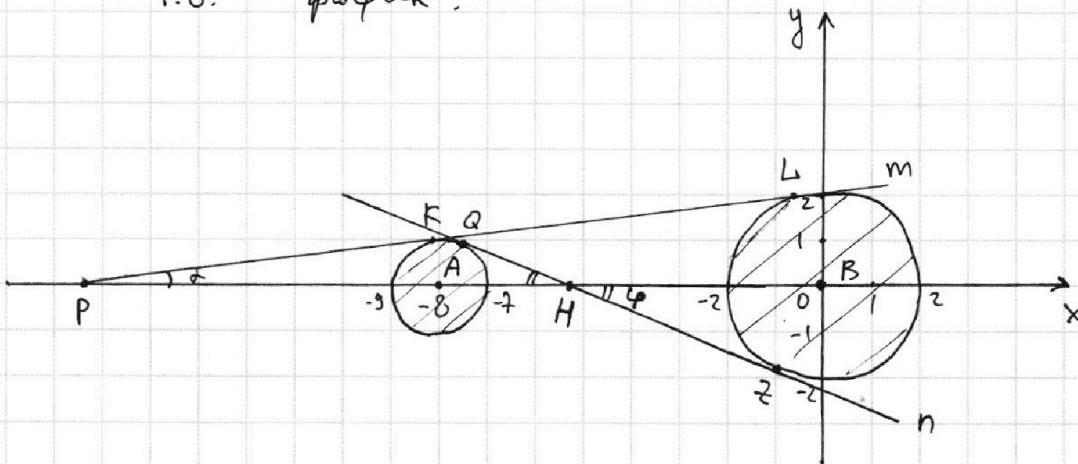
$$(x+8)^2 + y^2 = 1 \quad - \text{окр. с центром } (-8; 0), R=1$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad - \text{окр. с центром } (0; 0), R=2.$$

Тогда очев., что эти окр. не имеют общих точек  $\Rightarrow$  если в третьей в совокупности

выражении скобки должны быть разного знака, то это области внутри одной и вне другой окружностей  $\Rightarrow$  просто области внутри окр.

т.о. график:



$$2) y = ax + 10b$$

график - прямая, угл. уша наклона =  $a$ , пересек. ось  $Oy$  в т.  $(0; 10b)$ .

По усл. должно быть ровно 2 рещ.  $\Rightarrow$  ровно 2 общие точки этой пр. и построенных окр. 4 их внутр. обл. Если пр. пересекет какую-то окр., то общих точек сразу станет бесконечное мн-во.

Значит, она может их только касаться. Но тогда всего с каждой окр. по  $\leq 1$  общ. т.  $\Rightarrow$  всего  $\leq 2$

$\Rightarrow$  т.к. нужно 2, то пр. кас. обеих окр.  $\Rightarrow$  мн-во подходящих пр. - общие касат. окр. сн. продолжение на другой листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Всего 2 внешние и 2 внутр. кас. Линии центров окр. пер. на оси  $Ox \Rightarrow$  внеш. кас. симм. относит.  $Ox$  и внутр. тоже симм. отн.  $Ox \Rightarrow$  найдем углы наклона 1 внутр. и 1 внеш. кас, а через них из симметрии найдем др. фрунз кас. Проведем эти кас. на графике, пусть  $m$  и  $n$ .  $A$  и  $B$  - центры окр., т. кас. и пересел. обознач. на рис.

•  $m$ :  $BL = 2$ ,  $BL \perp m$ ;  $AK = 1$ ,  $AK \perp m$  (рад. в т. кас.),  $\angle LPB = \alpha$   
- общ.  $\Rightarrow \triangle PKA \sim \triangle PLB$  по 2 углам.  $AB = 8$

$$\Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{BL}{AK}$$

$$\frac{PA+8}{PA} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{8}{PA} = 1 \Rightarrow PA = 8$$

~~$$\frac{AB}{PA} = \frac{1}{8} \Rightarrow$$~~ по т. Пиф.  $PK = \sqrt{PA^2 - AK^2} = 3\sqrt{7}$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{AK}{PK} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

•  $n$ : аналог.  $AQ = 1$ ,  $AQ \perp n$ ;  $BZ = 2$ ,  $BZ \perp n$ ,  $\angle QHA = \angle ZHB = \varphi$   
(вертик)  $\Rightarrow \triangle QHA \sim \triangle ZHB \Rightarrow \frac{BZ}{AQ} = \frac{BZ}{AH}$

$$\frac{2}{1} = \frac{8-AH}{AH} \Rightarrow \frac{8}{AH} = 3 \Rightarrow AH = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \text{по т. Пиф. } QH = \sqrt{AH^2 - AQ^2} = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{AQ}{QH} = \frac{3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$\text{т.о. } \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{21}, \quad \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{\sqrt{7}}{21}, \quad \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{3\sqrt{55}}{55},$$

$\varphi = \operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$ . Т.к. только в таких углах касания ш.б. касат., а коэф. лоб сев. подбирается, чтобы подблизить пр. вверх/вниз и попасть в касание.

Ответ:  $\frac{\sqrt{7}}{21}$ ,  $-\frac{\sqrt{7}}{21}$ ,  $\frac{3\sqrt{55}}{55}$ ,  $-\frac{3\sqrt{55}}{55}$ .



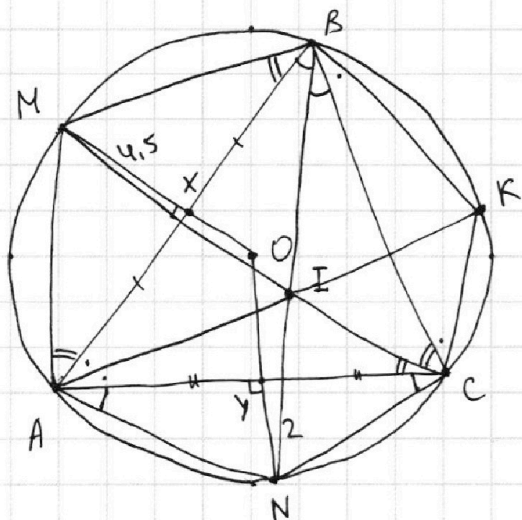
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к.  $M$  и  $N$  - середины  $\angle AB$  и  $\angle AC$ , то перп. из  $M$  и  $N$  на  $AB$  и  $AC$  совпад. авт. сер. пер-ах и пересек. в центре опис. окр.  $\tau$ - $O$ .  $OA = R$  опис.

Пусть  $I$  - центр  $\triangle ABC \Rightarrow BI$  попадает в  $\tau$ - $N$ ,  $CI$  в  $\tau$ - $M$ . По лемме о треугольнике  $IN = AN = NC$ ,  $IM = MA = MB$ ,  $IK = BK = CK$ .

По т. Пифаг  $\triangle OAY$  и  $\triangle OAX$  :  $AY^2 = R^2 - (R-2)^2$ ,  $AX^2 = R^2 - (R-4,5)^2$   
 $AY = \sqrt{4R-4}$ ,  $AX = \sqrt{9R-4,5^2}$   
 $AC = 2\sqrt{4R-4}$ ,  $AB = 2\sqrt{9R-4,5^2}$

$\triangle ANY$  и  $\triangle AMX$  :  $AM^2 = AX^2 + 4,5^2 = 9R$ ,  $AN^2 = 4R$   
 $AM = 3\sqrt{R}$ ,  $AN = 2\sqrt{R}$

Отсюда  $\tau$ - $I$  :  $AI \cdot IK = IB \cdot IN = IC \cdot IM$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$(-8; 0), R=1$

1) граница обеих  
2) разного знака

$$x^2 + y^2 = 4$$

$(0; 0), R=2$

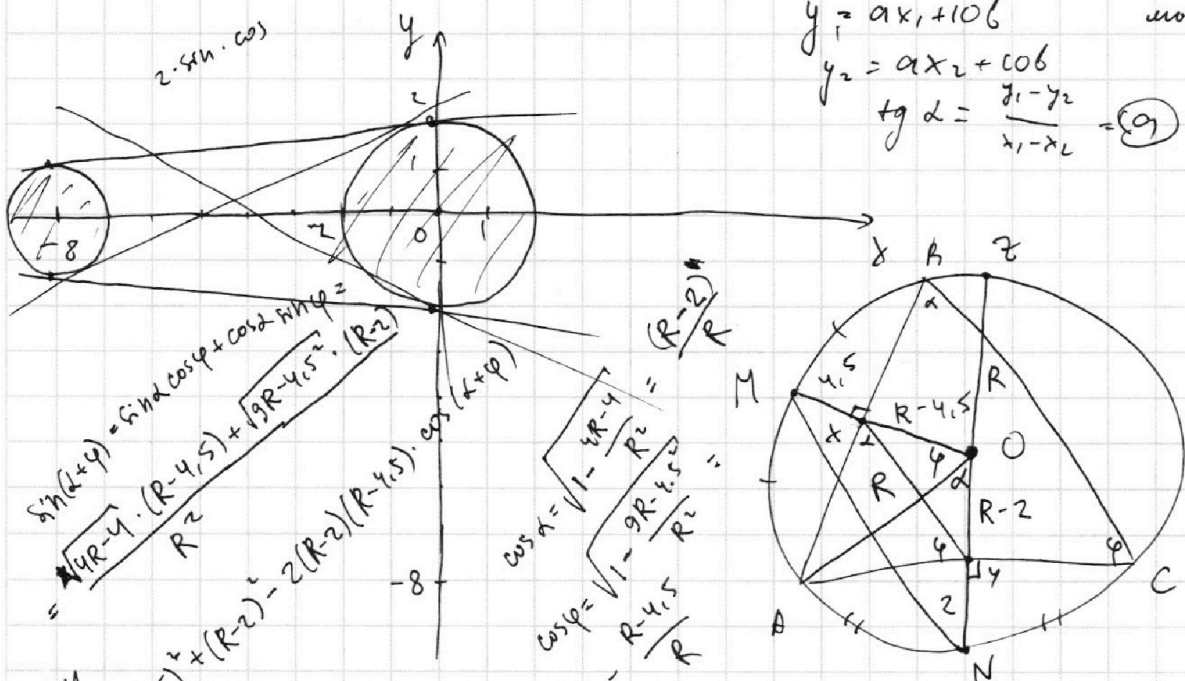
$\alpha < \beta$        $\alpha > \beta$   
 $\alpha \leq \beta - 1$        $\beta = 3$

$y = \alpha x + 10\beta$   
проход через  $(0; 10\beta)$ , крутится

$$\begin{aligned} 2+3 &= 5 \\ 2^2+3^2-6 \cdot 2 \cdot 3 &= \\ &= 4+9-36 \neq 5 \end{aligned}$$

больше не можем выпр.

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha x_1 + 10\beta \\ y_2 &= \alpha x_2 + 10\beta \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \textcircled{0.9} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \varphi) &= \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi \\ &= \frac{\sqrt{4R-4} \cdot (R-4.5) + \sqrt{9R-4.5^2} \cdot (R-2)}{R^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sqrt{1 - \frac{4R-4}{R^2}} = \frac{(R-2)}{R} \\ \cos \varphi &= \sqrt{1 - \frac{9R-4.5^2}{R^2}} = \frac{R-4.5}{R} \end{aligned}$$

$$XY = (R-4.5)^2 + (R-2)^2 - 2(R-2)(R-4.5) \cdot \cos(\alpha + \varphi)$$

$$\begin{array}{r} \frac{6^2 - 6b + 1}{6^2 + b} \quad \left| \frac{b+1}{b-7} \right. \\ \hline -7b + 1 \\ \hline -7b - 7 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a^2 - sab + b^2 &= (a+b)(b-7a) + 8 \\ &= (a+b)(b-7a) + \textcircled{8a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2\sqrt{R-1}}{R} \\ 4R-4 &= (2R-2) \cdot 2 \\ \sin \varphi &= \frac{\sqrt{9R-4.5^2}}{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XY &= R^2 - (R-2)^2 = 4R-4 \\ AY &= 2\sqrt{R-1} = \sqrt{R^2 - 9R + 9.5^2} \\ AX &= R^2 - (R-4.5)^2 = 9R - 4.5^2 \end{aligned}$$

