МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Обозначим через X_p степень вхождения простого числа p в число $X \in \mathbb{N}$. Числа 2 и 7 – простые $\Rightarrow$ если кто-то из них входит в число y в степени n ($y_2 = n$ напр.), в число z в степени m ($z_2 = m$), то в число xy в степени $m+n$. Если число $X \vdots p^k$, то $X_p \geq k$. Тогда условие:

$$+\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \end{cases} \qquad 2(a_2+b_2+c_2) \geq 51$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 26$$

Т.о. в abc 2 входит в хотя бы 26 степени

$a_7 + c_7 \geq 37 \Rightarrow$ т.к. $b_7 \geq 0$, то $a_7 + c_7 + b_7 \geq 37$, т.о. в abc 7 входит в хотя бы 37 степени

$\Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример на $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$:

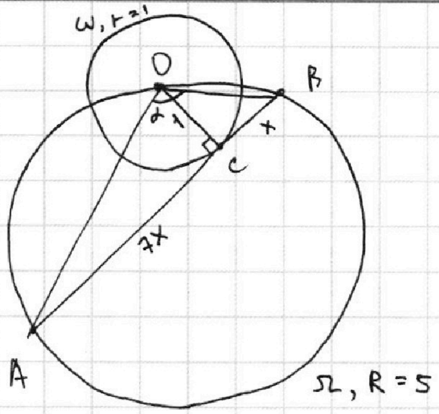
$$a = 2^9 \cdot 7^{10}$$
$$b = 2^6$$
$$c = 2^{11} \cdot 7^{27}$$

Нетрудно убедиться, что усл. на кратность выполн.

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$.

Заметим, что $a^2-6ab+b^2=(a+b)(b-7a)+8a^2$.
По усл. $\frac{a}{b}$ несокр., т.е. a и b взаимно просты:
$(a;b)=1 \Rightarrow (a+b;b)=1$ и $(a+b;a)=1$.
Надо найти наибольшее m такое, что $(a+b)\vdots m$
и $((a+b)(b-7a)+8a^2)\vdots m$.
$(a+b)(b-7a)\vdots(a+b)\vdots m \Rightarrow ((a+b)(b-7a)+8a^2)\vdots m$, только если $8a^2\vdots m$. Т.к. $(a+b;a)=1$, то и $(a+b;a^2)=1$
$\Rightarrow (a^2;m)=1 \Rightarrow 8\vdots m \Rightarrow m\le 8$.
Пример на 8: $a=1$, $b=7$
Тогда $\frac{1}{7}$ - несокр., $a+b=8$, $a^2-6ab+b^2=8 \Rightarrow$ можем сокр. на 8, ч.т.д.

Ответ: 8.



Пусть O – центр $\omega \Rightarrow OC \perp AB$ (рад. в т. кас.); $BC = x \Rightarrow AC = 7x$.

По т. Пиф. $\triangle OCB$ и $\triangle OCA$:

$OB = \sqrt{x^2+1}$, $OA = \sqrt{49x^2+1}$

Пусть $\angle AOB = \alpha$. Площадь $\triangle AOB$:

$S = \frac{1}{2} OC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x = 4x$

$S = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{2} \cdot \sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}$

По т. sin: $\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R$: $\frac{8x}{\sin\alpha} = 10 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4x}{5}$

$4x = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{5} \cdot \sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}$; $x \neq 0$ (x - длина)

$\Rightarrow \sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)} = 10$

$49x^4 + x^2 + 49x^2 + 1 = 100$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

$x^2 = t \Rightarrow t > 0$

$49t^2 + 50t - 99 = 0$

$\cancel{\frac{D}{4} = 625 + 4947 = 1066}$

$\frac{D}{4} = 25^2 + 49 \cdot 99 = 625 + 4851 = 5476 = 74^2$

$\Rightarrow t = \frac{-25 \pm 74}{49}$; $t > 0 \Rightarrow t = \frac{74-25}{49} = 1$

Т.о. $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$; т.к. $x > 0$, то $x = 1$

$\Rightarrow AB = 8x = 8$.

Ответ: 8.

Заметим, что $(2x^2-5x+3)-(2x^2+2x+1) = 2-7x$. Сделаем замену $\sqrt{2x^2-5x+3} = a$ и $\sqrt{2x^2+2x+1} = b$. Тогда:

$a-b = a^2-b^2$

$(a-b)(a+b)-(a-b)=0$

$(a-b)(a+b-1)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=1 \end{array}\right.$

Вернём замену. Сначала найдём x, а потом проверим ограничения.

1) $\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}$

$2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1$

$7x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{7}$

Заметим, что для $2x^2+2x+1$ $\frac{D}{4} = 1-2=-1<0 \Rightarrow$ $2x^2+2x+1>0$ при любых x.

$2x^2-5x+3 = 2(x-1)(x-\frac{3}{2})$

при $x=\frac{2}{7}$: $= 2\cdot(\underbrace{\frac{2}{7}-1}_{<0})\cdot(\underbrace{\frac{2}{7}-\frac{3}{2}}_{<0}) \Rightarrow >0 \Rightarrow x=\frac{2}{7}$ подходит.

2) $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1} = 1$

$2x^2-5x+3+2x^2+2x+1+2\cdot\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 1$

$4x^2-3x+3+2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 0$

Заметим, что для $4x^2-3x+3$ $D=9-4\cdot12=-39<0 \Rightarrow$ $4x^2-3x+3>0$ при любых x. Т.к. $\sqrt{\ldots}\geq 0$, то лев. часть $>0 \Rightarrow$ равенство 0 не м.б.

Ответ: $\frac{2}{7}$.

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12 \Rightarrow$ y_2 и y_1 одной чётности

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \le 0$

$$\left[\begin{array}{l}(x+8)^2+y^2-1=0\\ x^2+y^2-4=0\\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)<0\end{array}\right.$$

$\Downarrow$ скобки разного знака.

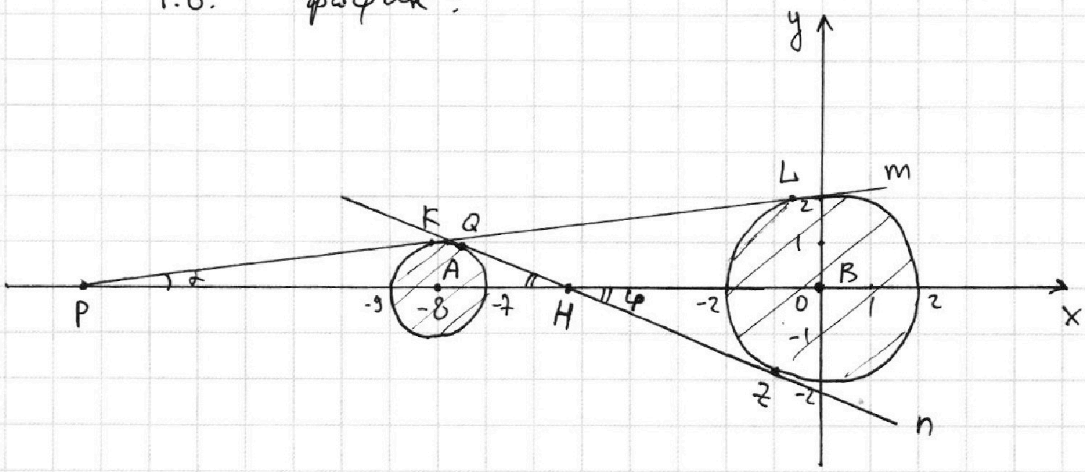
Рассмотрим график это нер-ва.

$(x+8)^2+y^2=1$ – окр. с центром $(-8;0)$, $R=1$

$x^2+y^2=4$ – окр. с центром $(0;0)$, $R=2$.

Тогда очев., что эти окр. не имеют общих точек $\Rightarrow$ если в третьем в совокупности выражении скобки должны быть разного знака, то это область внутри одной и вне другой окружностей $\Rightarrow$ просто области внутри окр.

Т.о. график:



2) $y = ax+10b$

график – прямая, tg угла наклона $= a$, пересек. ось Oy в т. $(0;10b)$.

По усл. должно быть ровно 2 реш. $\Rightarrow$ ровно 2 общие точки этой пр. и построенных окр. и их внутр. обл. Если пр. пересечёт какую-то окр., то общих точек сразу станет бесконечное мн-во. Значит, она может их только касаться. Но тогда всего с каждой окр. по ≤ 1 общ. т. $\Rightarrow$ всего ≤ 2 $\Rightarrow$ т.к. нужно 2, то пр. кас. обеих окр. $\Rightarrow$ мн-во подходящих пр. – общие касат. окр.

см. продолжение на другом листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Всего 2 внешние и 2 внутр. кас. Линия центров окр леж. на оси Ox $\Rightarrow$ внеш. кас. симм. относит. Ox и внутр. тоже симм. отн. Ox $\Rightarrow$ найдем углы наклона 1 внутр. и 1 внеш. кас, а через них из симметрии найдём для другой кас. Проведём эти кас. на графике, пусть m и n. A и B - центры окр., т. кас. и пересеч. обознач. на рис.

• m: $BL = 2$, $BL \perp m$; $AK = 1$, $AK \perp m$ (рад. в т. кас.), $\angle LPB = \alpha$ – общ. $\Rightarrow$ $\triangle PKA \sim \triangle PLB$ по 2 углам. $AB = 8$

$$\Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{BL}{AK}$$

$$\frac{PA+8}{PA} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{8}{PA} = 1 \Rightarrow PA = 8$$

$$\Rightarrow \text{по т. Пиф. } PK = \sqrt{PA^2 - AK^2} = 3\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{AK}{PK} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

• n: аналог. $AQ = 1$, $AQ \perp n$; $BZ = 2$, $BZ \perp n$, $\angle QHA = \angle ZHB = \varphi$ (вертик) $\Rightarrow$ $\triangle QHA \sim \triangle ZHB$ $\Rightarrow$ $\frac{BZ}{AQ} = \frac{BH}{AH}$

$$\frac{2}{1} = \frac{8-AH}{AH} \Rightarrow \frac{8}{AH} = 3 \Rightarrow AH = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \text{по т. Пиф. } QH = \sqrt{AH^2 - AQ^2} = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$\Rightarrow tg\varphi = \frac{AQ}{QH} = \frac{3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}.$$

Т.о. $a = tg\alpha = \frac{\sqrt{7}}{21}$, $a = tg(180^\circ - \alpha) = -\frac{\sqrt{7}}{21}$, $a = tg\varphi = \frac{3\sqrt{55}}{55}$, $a = tg(180^\circ - \varphi) = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$. Пр только с таким углом наклона м.б. касат., а коэф. b очев. подбирается, чтобы подвигать пр вверх/вниз и попасть в касание.

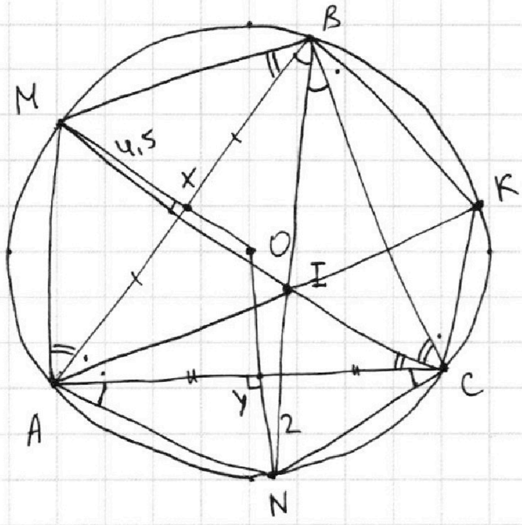
Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{21}$, $-\frac{\sqrt{7}}{21}$, $\frac{3\sqrt{55}}{55}$, $-\frac{3\sqrt{55}}{55}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Т.к. M и N - середины $\cup AB$ и $\cup AC$, то перп. из M и N на AB и AC соотв. явл. сер. пер-ами и пересек. в центре опис окр. т. O. $OA = R_{опис}$. Пусть I - инцентр $\triangle ABC \Rightarrow BI$ попадает в т. N, CI в т. M. По лемме о трезубце $IN = AN = NC$, $IM = MA = MB$, $IK = BK = CK$.

По т. Пиф $\triangle OAY$ и $\triangle OAX$: $AY^2 = R^2 - (R-2)^2$, $AX^2 = R^2 - (R-4,5)^2$

$AY = \sqrt{4R-4}$, $AX = \sqrt{9R - 4,5^2}$

$AC = 2\sqrt{4R-4}$, $AB = 2\sqrt{9R-4,5^2}$

$\triangle ANY$ и $\triangle AMX$: $AM^2 = AX^2 + 4,5^2 = 9R$, $AN^2 = 4R$

$AM = 3\sqrt{R}$ $AN = 2\sqrt{R}$

Степени т. I: $AI \cdot IK = IB \cdot IN = IC \cdot IM$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черновик

$(x+8)^2+y^2=1$ 1) граница обеих

$(-8;0)$, $R=1$ 2) разного знака

$x^2+y^2=4$ $a<b$ $a=2$

$(0;0)$, $R=2$ $a\le b-1$ $b=3$

$\underline{2+3=5}$

$2^2+3^2-6\cdot 2\cdot 3=$

$=4+9-36\ne 5$

вообще не можем сокр.

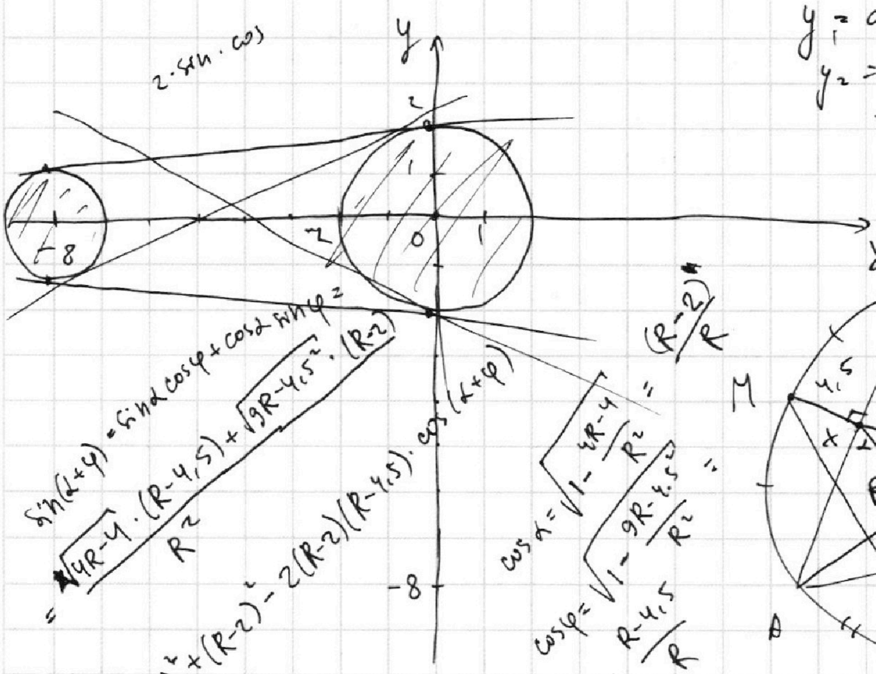
$y=ax+10b$

проход через $(0;10b)$, крутится

$y_1=ax_1+10b$

$y_2=ax_2+10b$

$tg\,\alpha=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=9$



$2\cdot\sin\cdot\cos$

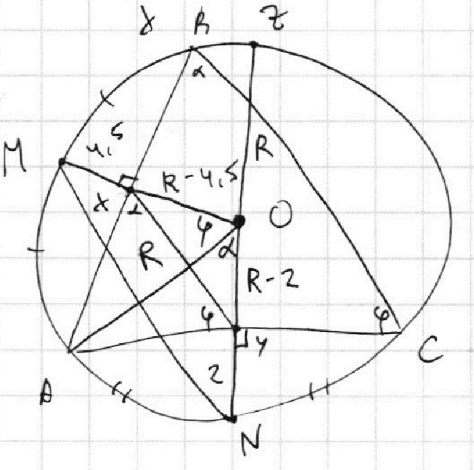
$\sin(\alpha+\varphi)=\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi=$

$=\dfrac{\sqrt{4R-4}\cdot(R-4{,}5)+\sqrt{9R-4{,}5^2}\cdot(R-2)}{R^2}$

$XY^2=(R-4{,}5)^2+(R-2)^2-2(R-2)(R-4{,}5)\cdot\cos(\alpha+\varphi)$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\dfrac{4R-4}{R^2}}=\dfrac{(R-2)}{R}$

$\cos\varphi=\sqrt{1-\dfrac{9R-4{,}5^2}{R^2}}=\dfrac{R-4{,}5}{R}$



$b^2-6b+1 \;\big|\; b+1$

$b^2+b \quad\quad b-7$

$-7b+1$

$-7b-7$

8

$a^2-6ab+b^2=(a+b)(b-7a)+8$

$(a+b)(b-7a)+8a^2$

$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{R-1}}{R}$

$5 7 6 + 9$

$4R-4=(2R-2)\cdot 2$

$\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{9R-4{,}5^2}}{R}$

$\times\begin{array}{r}24\\24\\\hline 96\\48\\\hline \boxed{576}\end{array}$

8 R^2-4R+4

$AY^2=R^2-(R-2)^2=$

$=4R-4$

$AY=2\sqrt{R-1}$ $R^2-9R+4{,}5^2$

$AX^2=R^2-(R-4{,}5)^2=$

$=9R-4{,}5^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$4x^2-3x+3$

черновик

$x_0 = \frac{3}{8}$ $\quad y_0 = 4\cdot\frac{9}{64} - 3\cdot\frac{3}{8} + 3 =$

$= \frac{9}{16} - \frac{18}{16} + 3 = 3 - \frac{9}{16} > 1$

$ab : 2^{14}7^{10}$

$bc : 2^{17}7^{17}$

$ac : 2^{20}7^{37}$

2: $a_2 + b_2 \geq 14$

$b_2 + c_2 \geq 17$

$a_2 + c_2 \geq 20$

$2(a_2+b_2+c_2) \geq 51$

$a_2+b_2+c_2 \geq 26$

$(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) =$

7: $a_7 + b_7 \geq 10$

$b_7 + c_7 \geq 17$

$a_7 + c_7 \geq 37$

$a - b = a^2 - b^2$

$a^2 - b^2 - (a-b) = 0$

$(a-b)(a+b) - (a-b) = 0$

$a_2 = 9$

$c_2 = 11$

$b_2 = 6$

$a_7+b_7+c_7 \geq 32$

$a_7 = 15$

b

$37 = x + x + 7$

$2x = 15$

$(a-b)(a+b-1) = 0$

74×74: 296, 518, 5476

$a_7+b_7+c_7 \geq 37$

$a_7 = 10$

$b_7 = 0$

$c_7 = 27$

$4410 + 441 =$

$= 4851$

$abc = 2^{26}\cdot 7^{37}$

$\frac{-2}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2}$

$2\cdot\frac{1}{4} - \frac{2}{2} + 1 =$

$= \frac{1}{2}$

$\frac{5}{4}$

$ac = 2^{20}\cdot 7^{37}$

$bc = 2^{17}\cdot 7^{27}$

$ab = 2^{15}\cdot 7^{10}$

25×25: 125, 50, 625

76×76: 456, 532

$a - b = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

$(a,b) = 1$

$200\cdot 200 = 40000$

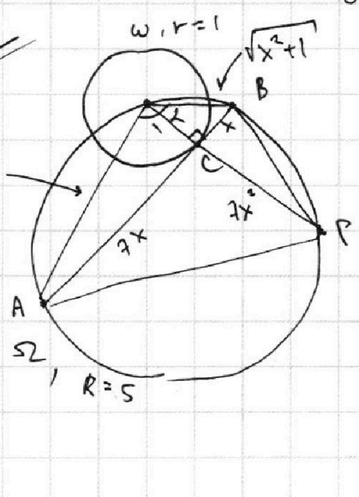
$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$50\cdot 50 = 2500$

$7x^2 = 1\cdot CP$

$CP = 7x^2$

76×76: 456, 532, 5776



49×9: 441

49×99: 441, 441, 4851

$2x^2 - 5x + 3$

$D = 25 - 24 = 1$

$2(x-1)(x-\frac{3}{2}) =$

$\frac{5\pm 1}{2\cdot 2}$

$1\cdot 8x = \sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}\cdot \sin\alpha$

$\frac{8x}{\sin\alpha} = 2\cdot 5$

$\sin\alpha = \frac{8x}{10} = \frac{4x}{5}$