



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

①  $a, b, c \in \mathbb{N}$ :

$$ab = 2^{14} \cdot 4^{10} \cdot k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 7^{14} \cdot m, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{34} \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\times \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{7^{14}}{64}$$

мин-abc - ?

$$(abc)^2 = 2^{28} \cdot 4^{20} \cdot 2^{14+14+20} \cdot 7^{10+14+34} \cdot kmn$$

$$(abc)^2 = 2^{51} \cdot 4^{64} \cdot kmn$$

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 4^{64} \cdot kmn} = 2^{25} \cdot 2^2 \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{k} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$$

$$abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{kmn} \in \mathbb{N}$$

$$\text{Если } k, m, n \in \mathbb{Z}, \text{ то } \sqrt{kmn} = \sqrt{k} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow k \text{ или } m \text{ или } n = 1$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } k=2, \quad m=n=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{kmn} = 2$$

$$\Rightarrow abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

Пусть  $2^p \mid abc$ ,  $p \in \mathbb{N}$ -max

$$2^p \mid abc, \quad p \in \mathbb{N} \text{-max} \Rightarrow p \geq 34, \quad q \geq 20$$

$$abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{kmn}$$

$$\Rightarrow \sqrt{kmn} \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{kmn} \in \mathbb{N} \\ 4^5 \mid \sqrt{kmn} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{kmn} \cdot 4^{10} \mid kmn$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } k=2, \quad m=4^{10}, \quad n=1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① - Продолжение:

$$k=2$$

$$n=y^{10}$$

$$k=1$$

$$\Rightarrow abc = 2^{15} \cdot y^{22} \cdot 2 \cdot y^5 = 2^{16} \cdot y^{27}$$

- это минимально, так как  $2^{15} \cdot y^{10}$  и  $2^{16} \cdot y^{10}$   
 $\Rightarrow$  среднее  $k, n, a$  равно

тогда  $ka$   
 $\Rightarrow kna = 2^{16-1} \cdot y^{10} \cdot y^2$   
при  $t, d \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$  минимально среднее  
при  $t=1, d=1$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot y^{27}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ - Продолжение

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \in \left[ \frac{23 - \sqrt{341}}{34}, \frac{2}{3} \right]$$

$$x = \frac{11 - 11\sqrt{2}}{41} < 0 < \frac{23 - \sqrt{341}}{34} \Rightarrow \text{не подходит}$$

Ответ:  $\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) Найти все  $a$ :  $\exists B$ .

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (1-2) \text{ рин.} \end{cases}$$

(1)  $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

1)  $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$

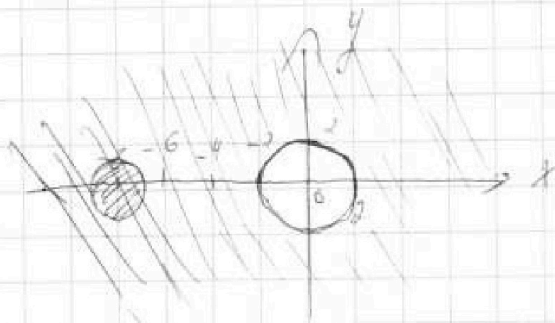
$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (x+8)^2 + y^2 = 1$

- 0

- окружность с центром в  $(-8; 0)$   
и  $r=1$

$x^2 + y^2 = 4$

- окружность с центром в  $(0, 0)$   
и  $r=2$



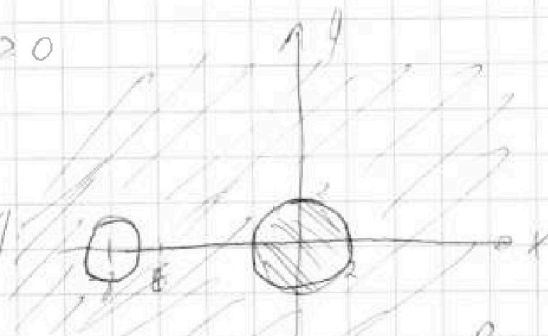
$\Rightarrow$  Решения

- внешняя

$r=1$  с центром в  $(-8, 0)$

2)  $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 14 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$

Аналогично (1).



$\Rightarrow$  Решения

- внешняя

с центром в  $(0, 0)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



④ - Преобразование

$$\sqrt{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$52x^2 - 5x + 3 \geq 2 - 9x$$

$$2 - 9x \geq 0$$

$$\frac{2}{9} \geq x \Rightarrow x \leq \frac{2}{9}$$

Если  $2 - 9x \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{2}{9} \leq x \rightarrow$$

также  $9 \cdot 19$   
и  $x$  с  $4x$   
0,231

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 49x^2 - 28x + 4$$

$$0 \geq 47x^2 - 23x + 1$$

$$47x^2 - 23x + 1 \leq 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 47 = 341$$

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{341}}{94}$$

$$\Rightarrow x \in \left[ \frac{23 - \sqrt{341}}{94}, \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right]$$

$$x = \frac{23 + \sqrt{341}}{94} = \frac{23 + 19}{94} = \frac{42}{94} = \frac{21}{47}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 22 \\ \hline 169 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

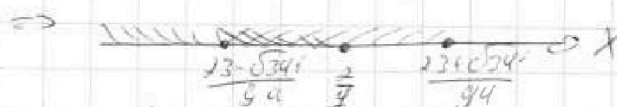
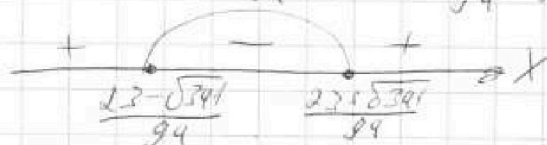
$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 46 \\ \hline 188 \\ + 181 \\ \hline 369 \\ + 33 \\ \hline 402 \end{array}$$

$$\frac{21}{47} < \frac{21}{47}$$

$$\frac{21}{47}$$

$$\Rightarrow x = \frac{23 + \sqrt{341}}{94}$$

$$\left( x - \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right) \left( x - \frac{23 - \sqrt{341}}{94} \right) \leq 0$$



$$x \in \left[ \frac{23 - \sqrt{341}}{94}, \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right]$$

$$\frac{23 - \sqrt{341}}{94} <$$

$$< \frac{23 - 19}{94} = \frac{4}{94}$$

$$\frac{23 + \sqrt{341}}{94} >$$

$$\frac{23 + 19}{94} = \frac{42}{94} > \frac{2}{9}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ ④ - Продолжение

$$(4x-2.5)^2 - 0.25 = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x)$$

$$(4x+3)(4x-2) = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x)$$

$$(3-4x)(2-4x) = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x)$$

$$x = \frac{2}{4} \in ODZ \Rightarrow \text{корень}$$

$$x \neq \frac{2}{4} \Rightarrow (3-4x)(2-4x) = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x) \quad | : (2-4x)$$

$$\frac{3-4x}{2} = \sqrt{2x^2-5x+3}$$

$$\geq 0$$

$$3 \geq 4x$$

$$\frac{3}{4} \geq x$$

$$x \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 49x^2 - 92x + 9 = 4(2x^2 - 5x + 3)$$

$$49x^2 - 92x + 9 = 8x^2 - 20x + 12$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 11^2 + 3 \cdot 41 = 121 + 3 \cdot 41 = 242 = 2 \cdot 121$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 \cdot 2}}{41}$$

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{121 \cdot 2}}{41} < 0$$

$$x_2 = \frac{11 + \sqrt{121 \cdot 2}}{41} > \frac{22}{41} > \frac{1}{2} > \frac{3}{4} \Rightarrow \text{не корень}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{4} \text{ или } x = \frac{11 - \sqrt{121 \cdot 2}}{41}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)(x-\frac{3}{2}) = (x-1)(2x-3)$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 9$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = \frac{4x^2 + 4x + 2}{2} = \frac{4x^2 + 4x + 1 + 1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \quad (1) \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(1) \quad 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$(x-1)(2x-3) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad \frac{3}{2} \end{array} \Rightarrow x$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$(2) \quad 2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$D = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{OДЗ: } (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - (2 - 4x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x) + (2 - 4x)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x) + 49x^2 - 28x + 4 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$49x^2 - 33x + 8 - 2x - 1 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

$$49x^2 - 35x + 6 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

$$49x^2 - 35x + 6, 25 - 0, 25 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

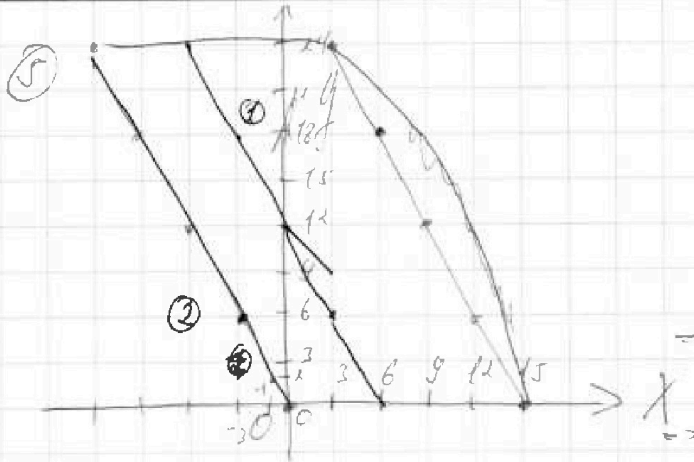
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_1 - y_2 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12$$

$$2x_2 + y_2 = 0 \rightarrow$$

$$2x_1 + y_1 + 12 = 0$$

$\in \mathbb{R}^2(x_1, y_1, 0)$   
 $\rightarrow$  для  $\forall (x_1, y_1)$  ~~содержит~~

$\rightarrow$  для  $\forall x_1 \in$  границе  $2x_1 + y_1 = 0$  ~~не пересекается~~

всех  $x_1$  границе

$$2x_1 + y_1 + 12 = 0$$

~~(если  $\forall (x_1, y_1)$  ~~содержит~~)~~

$$2x_1 + y_1 \text{ (если } x_1 \in \mathbb{R}^2 \text{ )}$$

$$2x_1 + y_1 + 12 = 0, 0 \rightarrow$$

$$12 \in \mathbb{R}^2 \text{ (} 2x_1 + y_1 = 0 \text{)}$$

$\Rightarrow$  На каждой прямой  $2x_1 + y_1 + c = 0, c \in \mathbb{Z}$

- по  $\mathbb{Z}$  в границе

границы  $x_1$  в границе  $2x_1 + y_1 = 0$

(для  $2x_1 + y_1 = 0$ )

$$\rightarrow (-1; 2), (0; 0)$$

$$(0; 0), (-1; 2), (-2; 4)$$

$$\dots (-12; 24) \neq$$

для  $2x_1 + y_1 + c = 0$  - очевидно,  
 $x_1, x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$  На каждой прямой  $2x_2 + y_2 + c = 0, c \in \mathbb{Z}$

- по  $\mathbb{Z}$  в границе  $2x_2 + y_2 = 0$

$\Rightarrow$  для каждой прямой  $2x_2 + y_2 + c = 0$

$$- \text{сведем } 2x_2 + y_2 + 12 = 0$$

$$12^2 = 169$$

то всего  $2x_2 + y_2 = 0$  и  $2x_2 + y_2 + 12 = 0$

$$2x_2 + y_2 + 1 = 0 \text{ и } 2x_2 + y_2 + 13 = 0$$

$$\vdots$$

$$2x_2 + y_2 + 18 = 0 \text{ и } 2x_2 + y_2 + 30 = 0$$

Далее  $2x_2 + y_2 = 0$ ,  
 $x_2, y_2$  и  $2x_2 + y_2 + 12 = 0$

границы  $2x_2 + y_2 = 0$

$$\Rightarrow 12 \cdot 169 + 19 = 3211$$

$$\Rightarrow 25 \cdot 19 = 475$$

$$\text{Ответ: } 475 \cdot 3211$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 169 \\ \hline 644 \\ + 1156 \\ + 1521 \\ \hline 11492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 25 \\ \hline 95 \\ + 475 \\ \hline 475 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

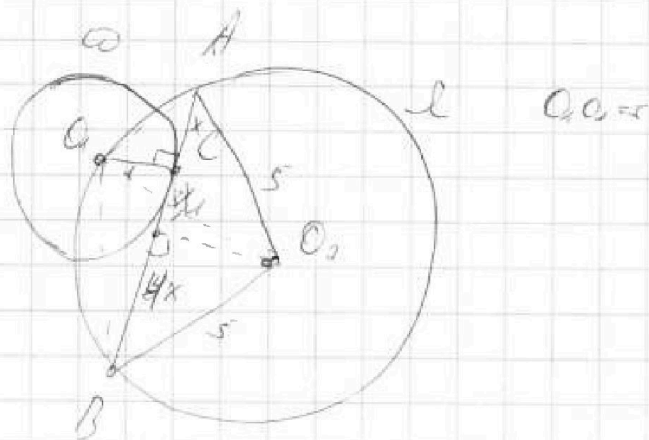
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

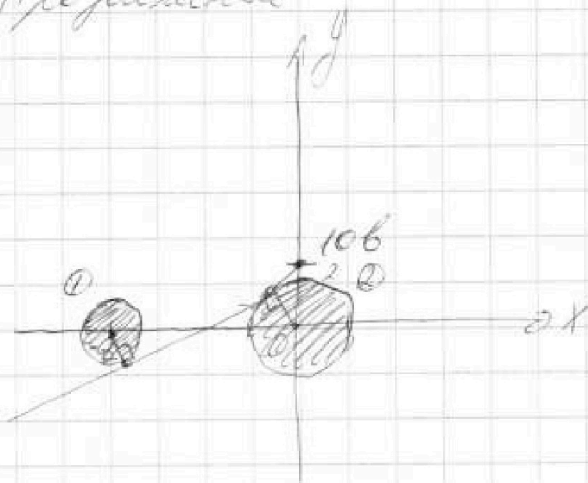
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) - Продолжение

(2)



1) <sup>касая</sup> окружность с центром в  $(-2, 0)$

2) <sup>касая</sup> окружность с центром в  $(0, 2)$

сист. им. 2 рав.  $\Rightarrow ax - y + 10b = 0$

д. л. пересечем окружн. в 1-й

$\Rightarrow$  кас.

$\Rightarrow ax - y + 10b = 0$  - касания 1) и 2)

$\Rightarrow ax - y + 10b = 0$

$\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$\begin{cases} ax_1 - y_1 + 10b = 0 \\ ax_2 - y_2 + 10b = 0 \\ (x_1 + 2)^2 + y_1^2 = 1 \\ x_2^2 + y_2^2 = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$$\uparrow \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x + 2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  кас.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} = 1 \text{ реш. } \uparrow$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x + 2)^2 + y^2 = 1 \end{cases} = 1 \text{ реш. } \Delta$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8) Продолжение

$$\begin{cases} 25b^2 - a^2 = 1 \\ 160ab - 64a^2 - 75b^2 = 0 \end{cases}$$

$$64a^2 - 160ab + 75b^2 = 0$$

$$(8a - 10b)^2 = 25b^2$$

$$8a - 10b = 5b$$

$$8a - 10b = -5b$$

$$8a = 15b$$

$$\frac{8a}{15} = b$$

$$8a = 5b$$

$$\frac{8a}{5} = b$$

$$1) \left(\frac{8}{15}\right)^2 a^2 \cdot 25 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left( \frac{25 \cdot 64}{25 \cdot 9} - 1 \right) = 1$$

$$a^2 \left( \frac{64}{9} - 1 \right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{55}{9} = 1$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\sqrt{63}}{63}, \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$2) \left(\frac{8a}{5}\right)^2 \cdot 25 - a^2 = 1$$

$$\frac{64a^2}{25} \cdot 25 - a^2 = 1$$

$$63a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{63}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{63}}{63}$$



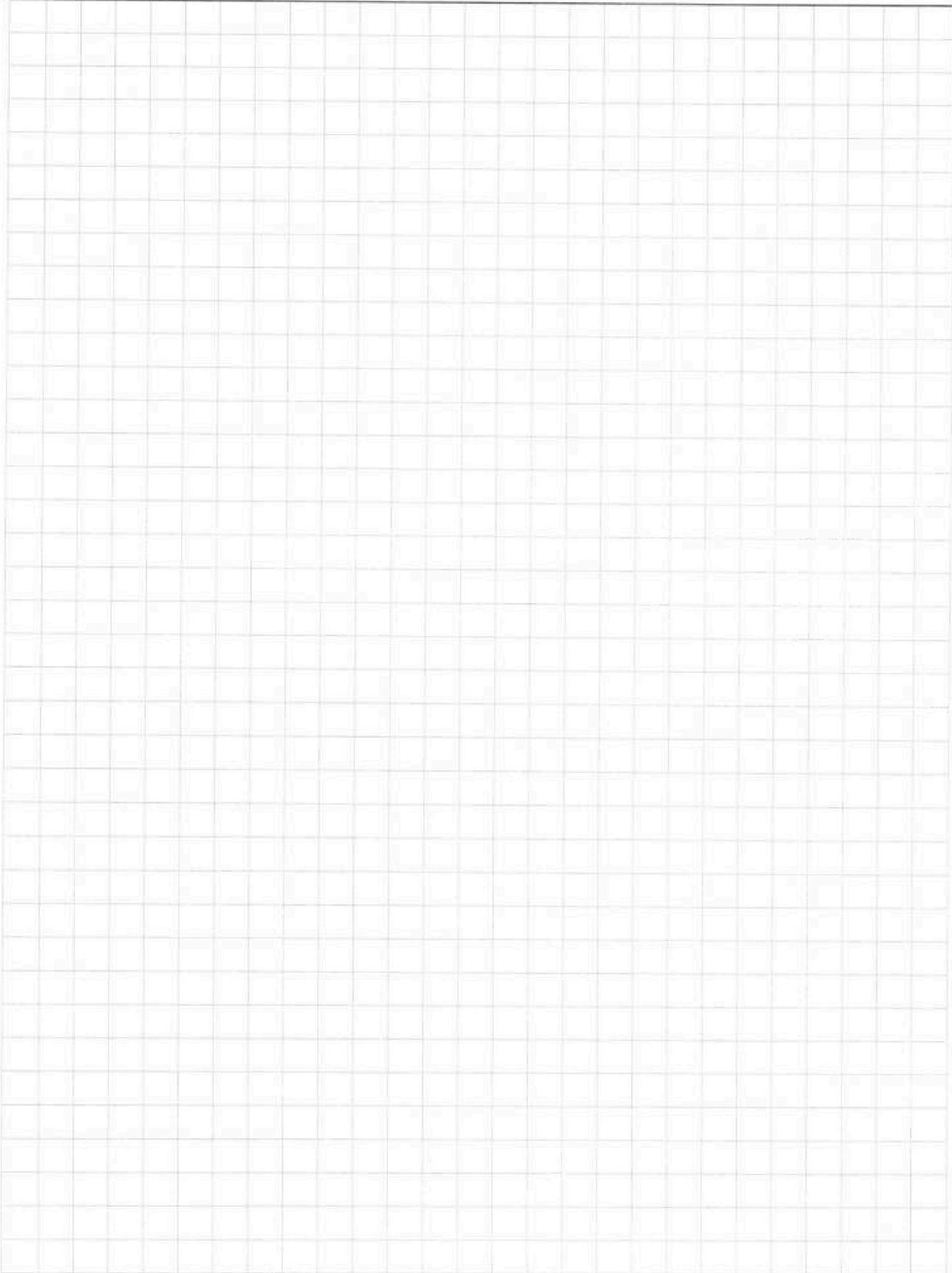
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 25b^2 - a^2 = 1 \\ 1600b - 64a^2 - 45b^2 = 0 \end{cases}$$

400:  $8 \cdot 551 \cdot 2 = 8002$

$$64a^2 - 1600b + 45b^2 = 0$$

$$(8a)^2 - 1600b + (55b)^2 = 0$$

$$45b^2 - 1600b + 64a^2 - 1600b + 100b^2 + 15b^2 = 0$$

$$100b^2 - 1600b + 64a^2 = 25b^2$$

$$(8a - 10b)^2 = 25b^2$$

$$(10b + 8a)^2 = 25b^2$$

$$8a - 10b = 25b$$

$$8a - 10b = -25b$$

$$10b + 8a = 5b$$

$$10b + 8a = -5b$$

$$8a = 25b$$

$$8a = -15b$$

$$8a = -5b$$

$$4a = -b$$

$$8a = b$$

$$a = \frac{25b}{8}$$

$$a = -\frac{15b}{8}$$

$$\frac{8a}{35} = b$$

$$-\frac{8a}{15} = b$$

$$\Rightarrow 125 \cdot \left(\frac{8}{35}\right)^2 a^2 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(25 \cdot \frac{64}{49} - 1\right) = 1$$

$$\frac{-64}{49} - 1 = -\frac{113}{49}$$

$$a^2 \left(\frac{64}{49} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{15}{49} = 1$$

$$a^2 = \frac{49}{15}$$

$$a = \pm \frac{7}{\sqrt{15}} = \pm \frac{7\sqrt{15}}{15}$$

$$2) 25 \cdot \left(-\frac{8}{15}\right)^2 a^2 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(25 \cdot \frac{64}{225} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \left(\frac{64}{9} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{55}{9} = 1$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

Ответ:  $\pm \frac{7\sqrt{15}}{15}$   
 $\pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6 - Продолжение.

$$\square \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$ax + 10b = y^2 \quad y^2 = (ax)^2 + 20abx + 100b^2$$

$$x^2 + (ax)^2 + 20abx + 100b^2 = 4$$

$$x^2(1+a^2) + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow D = 400a^2b^2$$

$$\Rightarrow D = 400b^2$$

$$D = 100a^2b^2 - (100b^2 - 4)(1+a^2) = 0$$

$$100a^2b^2 - 100b^2 - 100b^2a^2 + 4 + 4a^2 = 0$$

$$200a^2b^2 - 100b^2 + 4a^2 - 4 = 0 \quad | :4$$

$$50a^2b^2 - 25b^2 + a^2 - 1 = 0$$

$$25b^2(2a^2 - 1) + a^2 - 1 = 0$$

$$-100b^2 + 4 + 4a^2 = 0$$

$$25b^2 + 1 + a^2 = 0$$

$$25b^2 - a^2 = 1$$

$$\square \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+b)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 16bx + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1$$

$$x^2(a^2+1) + x(16+20ab) + 63 + 100b^2 = 0$$

$$D = (16+20ab)^2 - (a^2+1)(63+100b^2)$$

$$= 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 63a^2 - 100a^2b^2 - 63 - 100b^2 = 0$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 64 = 0$$

$$\Rightarrow 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 25b^2 - a^2 = 0$$

$$160ab - 64a^2 - 75b^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

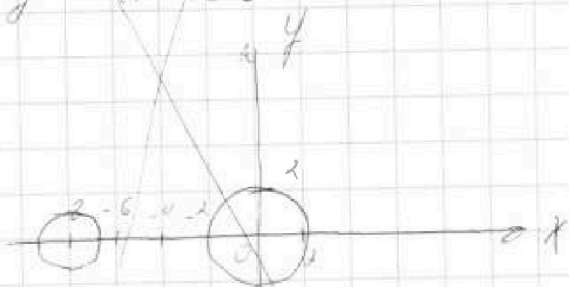
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



① ~~Решение.~~  
~~Согласно формуле~~  
~~для касания кривых.~~

$$\Rightarrow \parallel ax - y + kb = 0$$

$$y = -ax - kb$$



②  $\frac{a}{b}$  - касаясь,  $a, b \in \mathbb{N}$

возм.:

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

кажд.  $n$ ;  $n|a+b$ ,  $n|a^2-6ab+b^2$

гсд

$$\text{gcd}$$

$$(a, b) = 1$$

$$\text{гсд}$$

$$(a+b, a^2-6ab+b^2) = n$$

$$a^2-6ab+b^2 = t$$

$$a+b = p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = \frac{t}{b^2}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{p}{b}$$

$$\text{пусть } n = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)/b}{(n^2-6n+1)/b}$$

$$n^2-6n+1 = 0$$

$$n^2-6n+1 = n^2-6n+9-8 = (n-3)^2-8$$

$$D = 36-4$$

$$n_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6

Найти все  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (2) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (1) \end{cases}$$

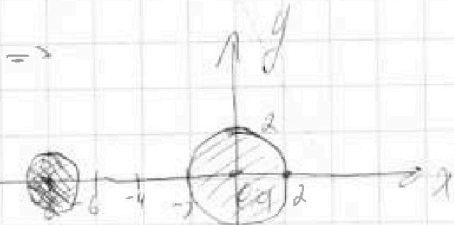
- система  
2 уравн

$$(1): ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$\Rightarrow 1) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

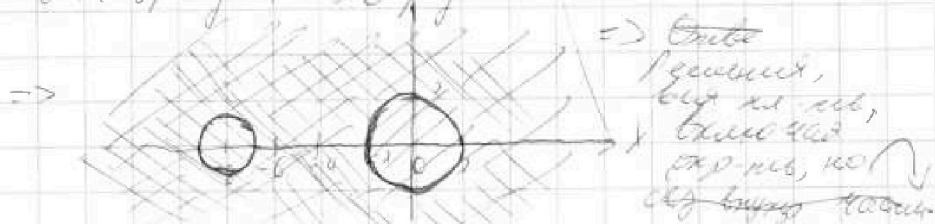
$x^2 + y^2 = 4$  - окруж в  $\pi$   
с центром в  $(0, 0)$   
и  $r = 2$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$  - окруж  
с центром в  $(-8, 0)$   
и  $r = 1$



$\Rightarrow$  и.т. не имеют общих точек  
реш.

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$\Rightarrow$  Outside  
regions,  
both  $x^2 + y^2$ ,  
and  $(x+8)^2 + y^2$   
circles, not  
the region between  
the circles

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



②  $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$   $\frac{a}{b}$ -несократим

$m$ -макс  $\left\{ \begin{array}{l} a+b = m \cdot k \\ a^2-6ab+b^2 = m \cdot n, \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{k}{n} \text{ - несократим} \end{array} \right.$

$a^2 + 2ab + b^2 = m^2 k^2$

$a^2 - 6ab + b^2 = mn = m^2 k^2 - 6ab$

$\frac{m^2 k^2}{m} : m$   
 $\Rightarrow 3ab : m$   
 $\gcd(a, b) = 1$

~~$\gcd(a+b, a^2-6ab+b^2) = m$ ,  $\gcd(a, b) = 1$~~

~~$\gcd(m, m^2 k^2 - 6ab) = m$~~

~~$\Rightarrow \gcd(mk, 3ab) = m$   
 $\gcd(a, b) = 1$~~

~~$\gcd(a+b, a^2-6ab+b^2) = m$~~

~~$(a+b, -3ab) = m$~~

~~$(a+b, 3ab) = m$ ,  $(a, b) = 1$~~

~~$\text{Если } m|3ab \Rightarrow m|3ab$~~

~~$m|3ab$  и  $m|(a+b)$~~

~~$m|ab \Rightarrow$~~

~~$\begin{cases} a+b = mk & a = mk - b \\ 3ab = m \end{cases}$~~

~~$\text{или } 3b(mk - b) = m$~~

~~$3bmk - 3b^2 = m$~~

~~$3bmk - mk = 3b^2$~~

~~$\Rightarrow m|3b^2 \Rightarrow m|3a^2$~~

~~$\text{или } m|3a^2$~~

~~$\Rightarrow 3a^2 = m^2 k^2$~~

$\frac{3(b^2+a^2)}{b(a+b)^2+3ab} = m$   
 $\frac{3(b^2+a^2)}{3a^2+6ab+3b^2} = m$   
 $\frac{b^2+a^2}{a^2+2ab+b^2} = m$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



②

$$\begin{cases} a+b=mn \\ 2ab=mn \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &: mn \\ b^2 + 2ab & \end{aligned}$$

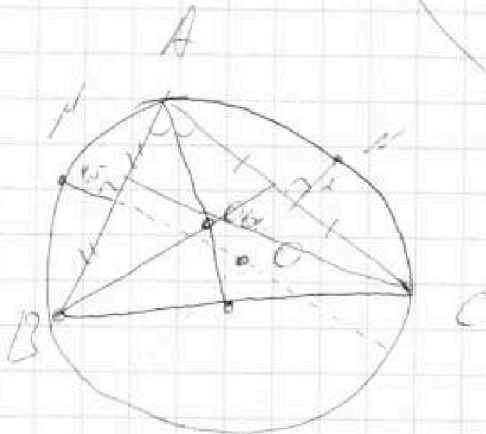
$$2(2ab) : n$$

$$4a^2 + 3ab + 4b^2 : n$$

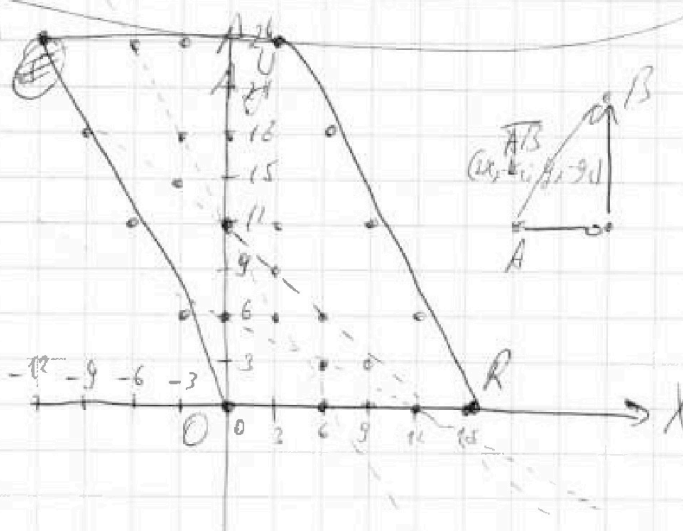
$$4a^2 - 8ab + 4b^2 : n$$

$$2(a-b)^2 : n$$

③



④



$$\begin{aligned} \Delta x & \\ 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 &= 12 \\ 2\Delta x + \Delta y &= 12 \\ \Delta x \geq 0, \Delta y \geq 0 & \\ \Delta y &= 12 - 2\Delta x \\ 0 &\leq \Delta x \leq 6 \\ y - x &= 0 \text{ or } 1/4 \\ \text{или } 0 \text{ и } 4 & \\ \Delta x &= 6 - \frac{\Delta y}{2} \end{aligned}$$



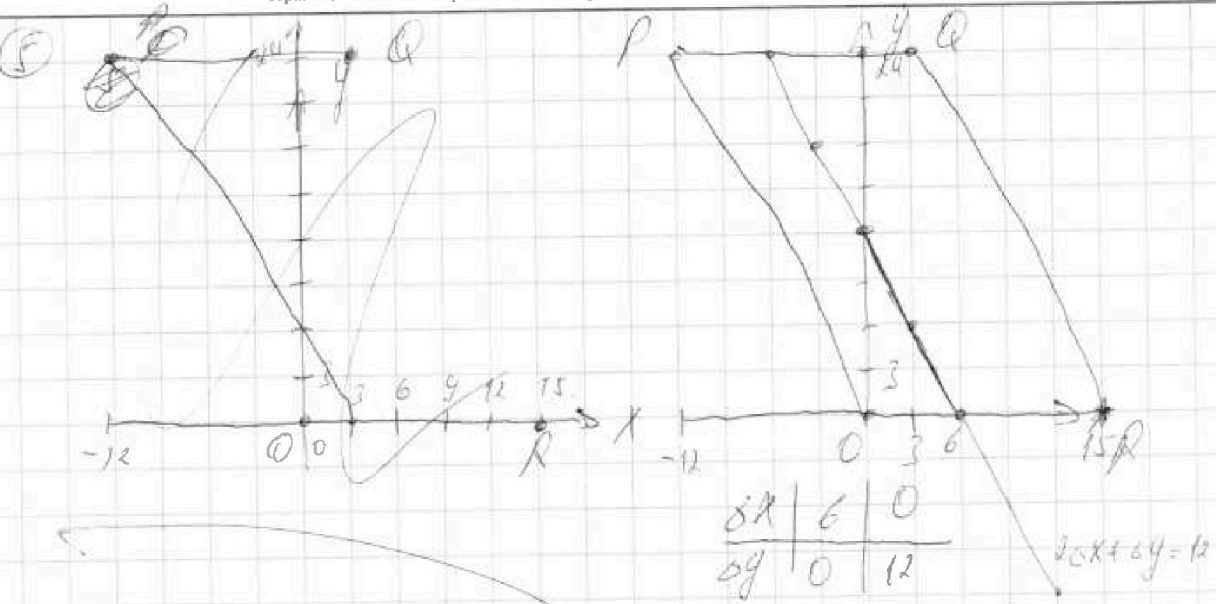
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

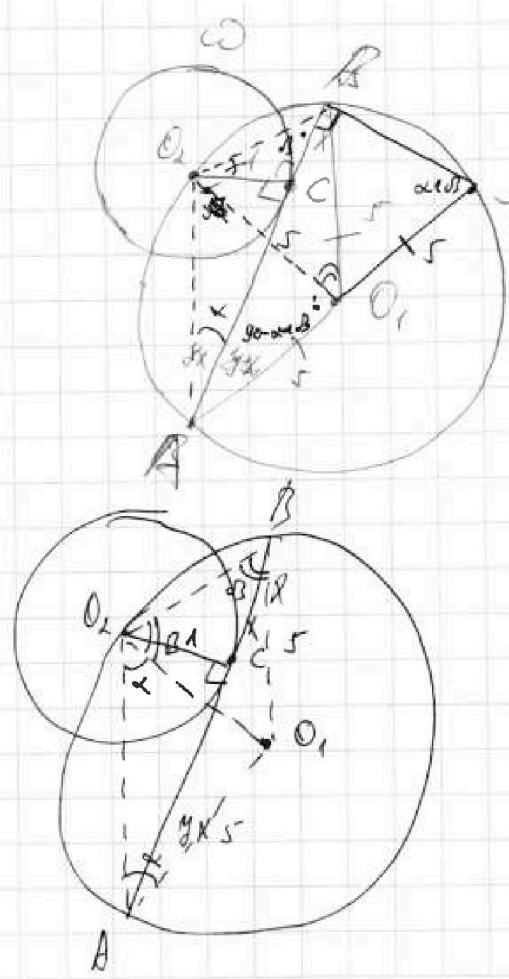
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



④ ③



$$\Rightarrow \begin{cases} x \in [0, 15] \\ y \in [-24, 24] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in [0, 15] \\ y \in [-24, 24] \end{cases}$$

$$x \in [0, 15]$$

$$y \in [-24, 24]$$

$$x \in [0, 15]$$

$$R=5 \quad r=1 \quad \frac{AC}{CB}$$

$$AB=?$$

$$O_2 O_1 = R = 5$$

$$O_2 A = \sqrt{1 + 49x^2}$$

$$O_2 B = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\text{или } \frac{AB}{\sin(\angle AOB)} = 2r = 2$$

$$\frac{2x}{\sin(x+23)} = 2 \Rightarrow 4x = \sin(x+23)$$

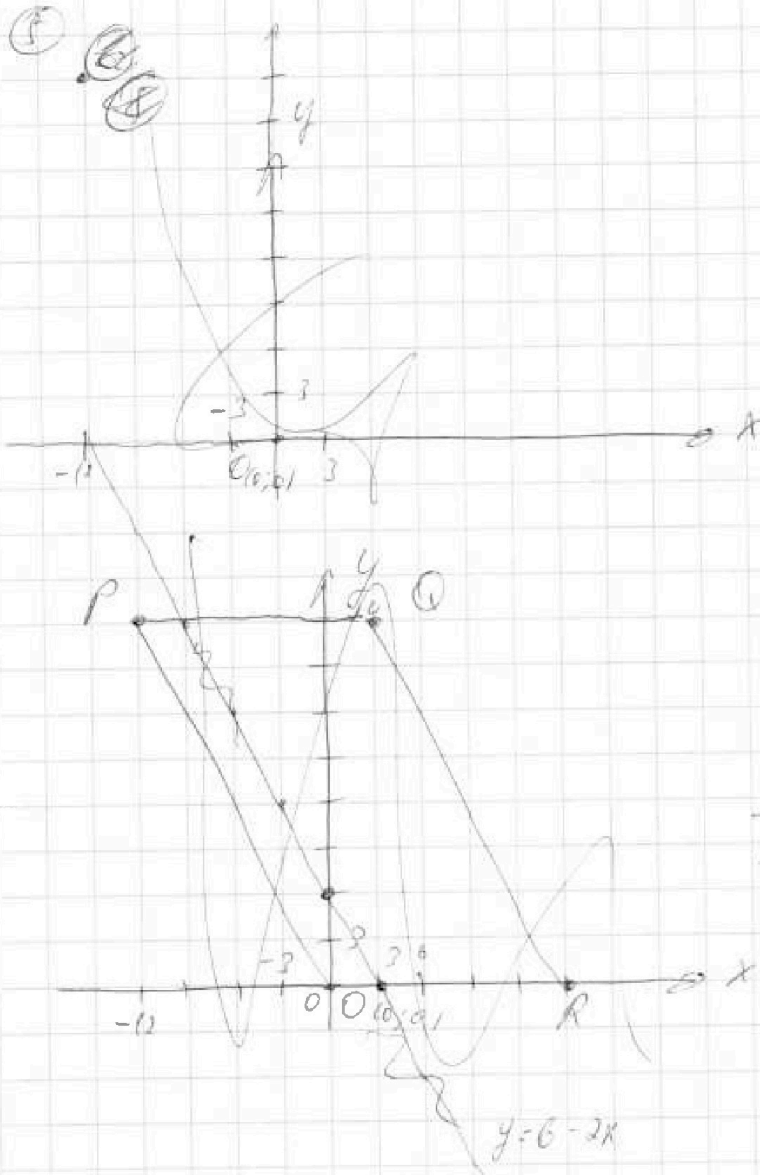
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Косинусов кол-во.  
 $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$   
 $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Решение:  $2x + y = 6$   
 $\Rightarrow y = 6 - 2x$

x	0	3
y	6	0

$\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$   
 $2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12$   
 $2x_2 + y_2 = 6 + (2x_1 + y_1 + 6) = 0$   
 $2x_2 + y_2 = 6 = 2x_1 + y_1 + 6$

Решение:

Пусть  $x_2 - x_1 = 6x, y_2 - y_1 = 6y$   
 $\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$   
 $26x + 6y = 12$   
 $6y = 12 - 26x$