



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

0 0, 6, 0, 6, 0

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{10} \cdot k, \text{ кев}$$

$$bc = 2^{18} \cdot 3^{18} \cdot m, \text{ мез}$$

$$\alpha bc = 2^{20} \cdot 3^{30} \cdot n, \text{ кев}$$

$$\begin{array}{r} 2^4 \\ \times 3^8 \\ \hline 64 \\ 279 \\ \hline 64 \end{array}$$

как - abc - ?

$$(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{20} \cdot 2^{14+18+20} \cdot 3^{10+18+20} \cdot k^2 \text{ ках}$$

$$(abc)^2 = 2^{51} \cdot 3^{64} \cdot \text{ках}$$

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 3^{64} \cdot \text{ках}} = 2^{25.5} \cdot 3^{32} \cdot \sqrt{\text{ках}} \cdot \sqrt{\text{ках}}$$

~~abc ках~~ $\Rightarrow \sqrt{\text{ках}} \in \mathbb{N}$

Если $k, m, n \in \mathbb{Z}$, то $\sqrt{2kmn} = \sqrt{2} \sqrt{k} \sqrt{m} \sqrt{n}$

\Rightarrow К кахе кахе $n = 2$

\Rightarrow К кахе $k = 2, m = n = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{2kmn} = 2$$

$$\Rightarrow abc = 2^{26} \cdot 3^{31}$$

Пуск $g^p | abc$, $p \in \mathbb{P}$ - пас

$$2^p | abc, g^p - \text{пас} \Rightarrow p = 34, g = 20$$

$$abc = 2^{25} \cdot 3^{31} \cdot \sqrt{2kmn}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2kmn} \in \mathbb{N}$$

$$3^{35} | \sqrt{2kmn} \Rightarrow 243 | \sqrt{2kmn}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2kmn} = 243$$

$$\Rightarrow \text{пуск } k = 2, m = 3^{10}, n = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

① -Продолжение:

$$k=2$$

$$n=y^{10}$$

$$l=1$$

$$\Rightarrow abc = 2^{15} \cdot 3^{22} \cdot 5^5 = 2^{16} \cdot 3^{24}$$

- это минимально, т.к. ~~если~~ ⁵ ~~то~~ ¹⁰ ~~даже~~ : y^{10}
 \Rightarrow цифры 1, 3, 5 есть

~~зато нет~~

$$\Rightarrow K_{min} = 2^{16-1} \cdot 3^{10} \cdot 5^2,$$

но 0, дел

\Rightarrow минимальное значение

$$abc = 2^{26} \cdot 3^{24}$$

при $t=1$, $d=1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ.

(1) - Продолжение

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \in \left[\frac{23 - \sqrt{341}}{99}, \frac{2}{3} \right]$$

$$x = \frac{11 - \sqrt{341}}{99} < 0 < \frac{23 - \sqrt{341}}{99} \Rightarrow \text{не корень}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) Найдите все α . Зб.

$$\begin{cases} \alpha k - g + 10b = 0 \quad (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

1-2 реш

$$(1) ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$1) \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

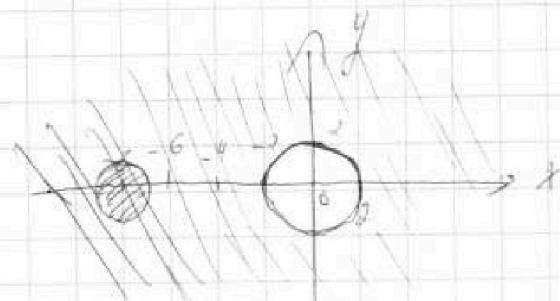
$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (x+8)^2 + y^2 = 1$$

-0

- окр кас с центром в $(-8; 0)$
 $a = 1$

$$x^2 + y^2 = 4$$

- окр кас с центром в $(0, 0)$
 $a = 2$

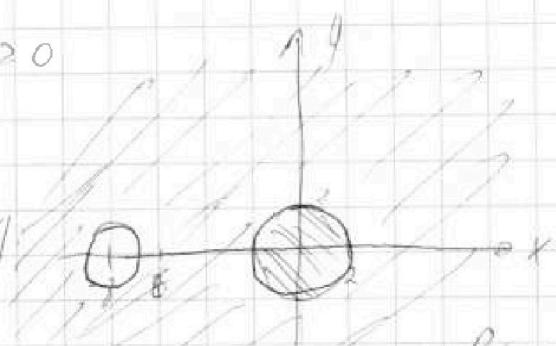


\Rightarrow Решение

- окр кас
 $a = 1$ с центром
 $(-8, 0)$

$$2) \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 14 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

Аналогично (1)



\Rightarrow Решение -
окр кас $a = 2$
с центром $(0, 0)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 9. Уравнение

$$4x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0 \Rightarrow 12x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$12x^2 - 2x - 3 \geq 2 - 4x$$

$$2 - 4x \geq 0$$

$$\frac{2}{3} \geq x \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

также $2 - 4x \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \rightarrow$$

также $x \leq \frac{2}{3}$
 $x > 0$
отсюда

$$2x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 2x + 1$$

$$0 \geq 4x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{array}{r} x \\ \times 4 \\ \hline 169 \\ + 46 \\ \hline 215 \end{array}$$

$$4x^2 - 2x + 1 \leq 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 4 = 341$$

$$\begin{array}{r} x \\ \times 4 \\ \hline 529 \\ - 188 \\ \hline 341 \\ \times 4 \\ \hline 136 \\ - 96 \\ \hline 40 \\ \times 4 \\ \hline 160 \\ - 160 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{341}}{94}$$

$$\begin{array}{r} x \\ \times 4 \\ \hline 94 \\ - 94 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{23 - \sqrt{341}}{94}, \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right]$$

$$x = \frac{23 + \sqrt{341}}{94} = \frac{23 + 19}{94} = \frac{42}{94} = \frac{21}{47}$$

$$\begin{array}{r} x \\ \times 4 \\ \hline 94 \\ - 94 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \text{ - не корень}$$

$$(x - \frac{23 - \sqrt{341}}{94})(x - \frac{23 + \sqrt{341}}{94}) \leq 0$$

$$\begin{array}{c} + - + \\ \hline \frac{23 - \sqrt{341}}{94} \quad \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \end{array} \Rightarrow x$$

$$\frac{23 - \sqrt{341}}{94} <$$

$$< 23 - 19 = \frac{4}{94} = \frac{2}{47}$$

$$\frac{23 + \sqrt{341}}{94} >$$

$$\frac{23 + 19}{94} = \frac{42}{94} = \frac{21}{47}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} + - + \\ \hline \frac{23 - \sqrt{341}}{94} \quad \frac{2}{47} \quad \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \end{array} \Rightarrow x$$

$$x \in \left[\frac{23 - \sqrt{341}}{94}; \frac{2}{47} \right]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

③ ④ - Решение

$$(3x-2)^2 - 0,25 = \cancel{2\sqrt{2x^2-5x+3}} (2-3x)$$

$$(3x+3)(2-3x) = \cancel{x-2} \cancel{2\sqrt{2x^2-5x+3}} (2-3x)$$

$$(3-3x)(2-3x) = \cancel{2\sqrt{2x^2-5x+3}} (2-3x)$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ и } 0 \Rightarrow \text{-корни}$$

$$x \neq \frac{2}{3} \Rightarrow (3-3x)(2-3x) = \cancel{2\sqrt{2x^2-5x+3}} (2-3x) \quad | : (2-3x)$$

$$\underbrace{3-3x}_{\geq 0} = \cancel{2\sqrt{2x^2-5x+3}}$$

$$3 \geq 3x$$

$$\frac{3}{3} \geq x$$

$$\boxed{x \leq \frac{3}{3}}$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 9x + 9 = 4(1x^2 - 5x + 3)$$

$$4x^2 - 42x + 9 + = 8x^2 - 20x + 12$$

$$4x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \frac{44^2 + 3 \cdot 41}{4} = \frac{193}{4} = 2 \cdot 121$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{193}}{41}$$

$$x_1 = \frac{11 + \sqrt{193}}{41} > 0$$

$$x_2 = \frac{11 + \sqrt{193}}{41} > \frac{22}{41} > \frac{1}{2} > \frac{3}{3} \Rightarrow \text{не корень}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11 + \sqrt{193}}{41} \text{ или } x = \frac{11 - \sqrt{193}}{41}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4)

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + x + 1} = 2 - 8x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1)(x - \frac{3}{2}) = (x - 1)(2x - 3)$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 17$$

$$x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$2x^2 + x + 1 = \frac{4x^2 + 4x + 2}{2} = \frac{4x^2 + 4x + 1 + 1}{2} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \quad (1) \\ 2x^2 + x + 1 \geq 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} (x-1)(2x-3) \geq 0 \\ \text{---} \end{array}$$

$$x \in (-\infty, 1] \cup [\frac{3}{2}, \infty)$$

$$(1): x^2 + x + 1 \geq 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 4 = -12 < 0 \\ \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{Об} (1, \text{п}; 1) \cup [\frac{3}{2}, \infty)$$

$$\underbrace{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - (2 - 8x)}_{\geq 0} = \sqrt{2x^2 + x + 1}$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 8x) + (2 - 8x)^2 = 2x^2 + x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 8x) + 49x^2 - 32x + 4 = 2x^2 + x + 1$$

$$49x^2 - 33x + 8 - 2x - 1 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 8x)$$

$$49x^2 - 35x + 6 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 8x)$$

$$49x^2 - 35x + 6, 15 - 0, 25 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 8x)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

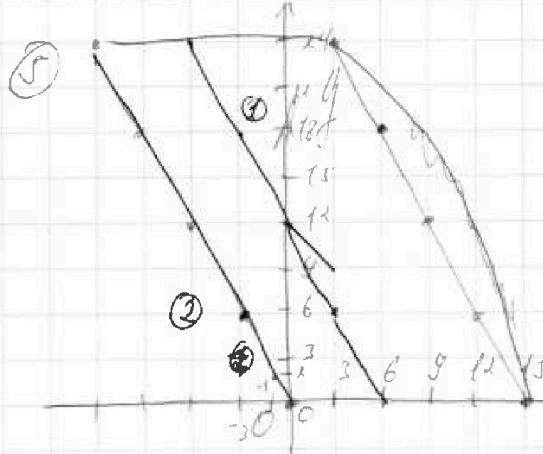
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$2x_1 - 2x_2 + y_1 - y_2 = 13$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 13$$

$$2x_2 + y_2 = 0 \rightarrow$$

$$2x_1 + y_1 + 13 = 0$$

\rightarrow все (x_1, y_1) лежат на прямой $2x_1 + y_1 = 0$

\rightarrow все x_1 в прямой $2x_1 + y_1 = 0$ не нужны

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ не нужно}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$2x_1 + y_1 = 0 \text{ (это не нужно)}$$

$$\begin{array}{r} & 6 \\ & 8 \\ x & 169 \\ \times & 19 \\ \hline & 1521 \\ + & 169 \\ \hline & 3211 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} & 15 \\ & 19 \\ x & 169 \\ \times & 19 \\ \hline & 1521 \\ + & 169 \\ \hline & 3211 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } 485 \cdot 3211}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

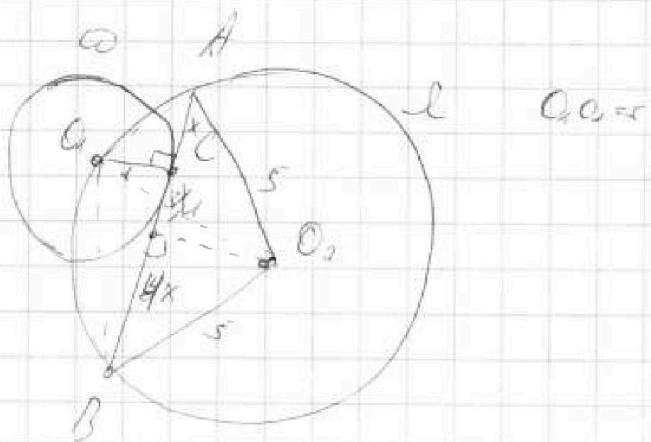
6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

?



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

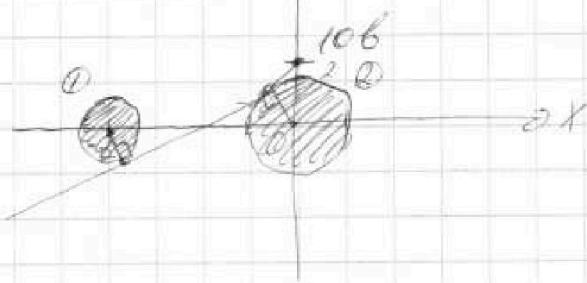


- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

⑥ - Пересечение
(2)



① - каскад с централ
 $(-3, 0)$

② - каскад с централ
 $(0, 1)$

беск. иле. 2 раз. $\Rightarrow ax - y + 106 = 0$

\Rightarrow л. пересечения окр. и л.
 \Rightarrow т.к.

$\Rightarrow ax_1 - y_1 + 106 = 0$ - каскадные Θ и Θ

$\Rightarrow ax_2 - y_2 + 106 = 0$

$$\begin{cases} ax_1 - y_1 + 106 = 0 \\ ax_2 - y_2 + 106 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x_1 - 4)^2 + y_1^2 = 1 \\ (x_2 - 0)^2 + y_2^2 = 1 \end{cases}$$
$$4x^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} ax_1 - y_1 + 106 = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + y_1^2 = 1 \end{cases}$$

\Rightarrow ~~ax - y + 106 = 0~~

$$\begin{cases} ax - y + 106 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{реш. } 4$$

$$\begin{cases} ax - y + 106 = 0 \\ (x - 2)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{реш. } 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) *Предложение*

$$\begin{cases} 256^2 - a^2 = 1 \\ 1600b \cdot 64a^2 - 256^2 = 0 \end{cases}$$

$$64a^2 - 1600b + 256^2 = 0$$

$$(8a - 10b)^2 = 256^2$$

$$8a - 10b = 56$$

$$8a - 10b = -56$$

$$8a = 156$$

$$\frac{8}{5}a = 6$$

$$8a = 56$$

$$\frac{8}{5}a = 6$$

$$1) \left(\frac{8}{15}\right)^2 a^2 - 25 - a^2 = 1$$

$$2) \left(\frac{8}{5}\right)^2 a^2 - 25 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(\frac{64}{25} - 1 \right) = 1$$

$$\frac{64}{25}a^2 - 25 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(\frac{64}{25} - 1 \right) = 1$$

$$63a^2 = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{63}{55} = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{63}$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{55}}{63}$$

$$a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\sqrt{63}}{63}, \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 256^2 - a^2 = 1 \\ 16006 - 64a^2 - 256^2 = 0 \end{cases}$$
$$64a^2 - 16006 + 256^2 = 0$$
$$(3a)^2 - 16006 + (5536)^2 = 0$$
$$9a^2 + 16006 + 1000000 - 256^2 = 0$$
$$9a^2 + 16006 + 1000000 - 256^2 = 0$$
$$(8a - 106)^2 = 256^2$$
$$(8a - 106)^2 = 256^2$$
$$8a - 106 = 256$$
$$8a - 106 = -256$$
$$8a = -156$$
$$a = -\frac{156}{8}$$
$$a = -19.5$$
$$-\frac{8a}{15} = 6$$
$$\Rightarrow 125 \cdot \left(\frac{8}{15}\right) a^2 - a^2 = 1$$
$$a^2 \left(25 \cdot \frac{64}{15} - 1\right) = 1$$
$$a^2 \left(25 \cdot \frac{64}{15} - 1\right) = 1$$
$$a^2 \left(\frac{64}{15} - 1\right) = 1$$
$$a^2 \cdot \frac{15}{15} = 1$$
$$a^2 = \frac{15}{15}$$
$$a = \pm \sqrt{\frac{15}{15}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$$
$$a = \pm \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$$

Ошибки: $\frac{15}{15}$, $\pm \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6 - Доделка.

$$\boxed{D} \quad \begin{cases} 4x - y + 106 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$4x + 106 = y \quad y^2 = (4x)^2 + 2008x + 1006^2 - 4$$

$$x^2 + 16x^2 + 2008x + 1006^2 = 4$$

$$x^2(1 + a^2) + 2008x + 1006^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta > 0 \text{ и } \Delta \neq 1$$

$$\rightarrow \Delta \neq 2008^2$$

$$\Delta = 1000a^2b^2 - (1006^2 - 4)(1 + a^2) = 0$$

$$1000a^2b^2 - 1006^2 + 1006^2a^2 + 4a^2 + 4a^2 = 0$$

$$1000a^2b^2 - 1006^2 + 4a^2 - 470 = 0$$

$$500a^2b^2 - 256^2 + a^2 - 4 = 0$$

$$256^2(2a^2 - 1) + a^2 - 4 = 0$$

$$-1006^2 + 4 - 4a^2 = 0$$

$$256^2 + 16a^2 = 0$$

$$256^2 - a^2 = 0$$

$$\boxed{E} : \begin{cases} 4x - y + 106 = 0 \\ (x+8)^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 2008x + 1006^2 = 0 \quad | \cdot 1$$

$$x^2(a^2 + 1) + x(16 + 2008) + 64 + 1006^2 = 0$$

$$\Delta = (8 + 1006)^2 - (a^2 + 1)(64 + 1006^2)$$

$$= 1000a^2b^2 + 16008b^2 + 64 - 63a^2 - 1000b^2 - 63 - 1006^2 = 0$$

$$16008b^2 - 63a^2 - 1006^2 + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16008b^2 - 63a^2 - 1006^2 + 256^2 - a^2 = 0$$

$$16008b^2 - 64a^2 - 956^2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

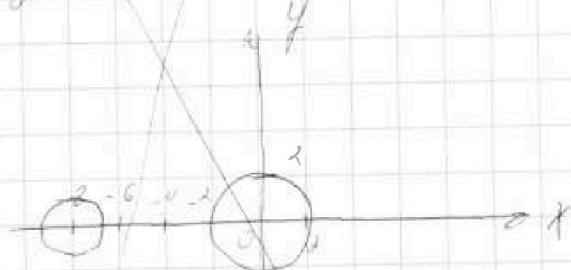
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1) Входные
данные

$$\Rightarrow |ax - g(106)| = 0$$

$$g = -ax - 106$$



(2) $\frac{a}{b}$ - кесеңір, $a, b \in \mathbb{Z}$

Берілген:

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \quad \text{Найд. и. : } n(a+b, n) \mid a^2-6ab+b^2$$

gcd

$$(a, b) = 1$$

gc

$$(a+b, a^2-6ab+b^2) = n$$

$$a^2-6ab+b^2 = t \quad a-b = p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{6(a-b)}{b} + 1 = t \quad \frac{a-b}{b} = f \quad \text{Лучш. } n = q$$

$$\Rightarrow \frac{(a+1)/q}{(a^2-6a+1)/q}$$

$$n^2 - 6n + 1 = n^2 - 6n + 9 - 8 = (n-3)^2 - 8$$

$$D \mid 36 - 4$$

$$n_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6)

Найти все α : 36

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha x - g < 100 = 0 \\ ((x+8)^2 + g^2 - 1)(x^2 + g^2 - 4) \leq 0 \end{array} \right. \quad (I)$$

$$(II) \quad ((x+8)^2 + g^2 - 1)(x^2 + g^2 - 4) \leq 0$$

$$(II) \quad ((x+8)^2 + g^2 - 1)(x^2 + g^2 - 4) \leq 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + g^2 - 4 \leq 0 \\ (x+8)^2 + g^2 - 1 \neq 0 \end{array} \right.$$

$x^2 + g^2 - 4$ - орт вк α
с центром $6(0,0)$
и $r = 2$

$(x+8)^2 + g^2 - 1$ - орт вк
с центром $-6(-8,0)$
и $r = 1$

$$\Rightarrow 1 \cdot g$$

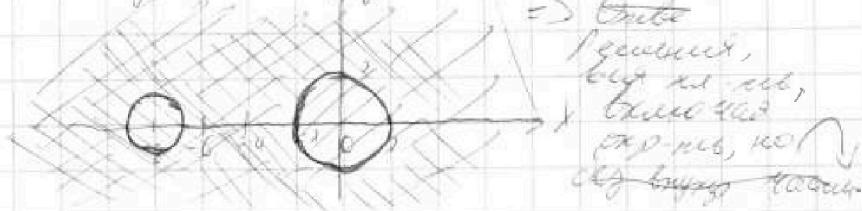


$\Rightarrow M$ и пересекают обе окружности.

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + g^2 - 4 \geq 0 \\ ((x+8)^2 + g^2 - 1) \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + g^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + g^2 - 1 \geq 0 \end{array} \right. \quad (I)$$

\Rightarrow



\Rightarrow Окружности
1) делящиеся
внешней
области
окружности
2) делящиеся
внешней
области

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

② $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$, $a, b \in \mathbb{N}$ $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$ - кесеңдер

$a+b \mid a+b$
 $a+b \mid a^2 - 6ab + b^2 = ab$, $a, b \in \mathbb{N}$, $\frac{a+b}{ab}$ - кесеңдер

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2b^2$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = ab = a^2b^2 - 8ab$$

$$a^2b^2 - ab$$

$$\Rightarrow 8ab \mid ab$$

$$\gcd(a, b) = 1$$

~~$\gcd(a+b, a^2 - 6ab + b^2 - ab) = ab$, $\gcd(a, b) = 1$~~

~~$\gcd(ab, a^2b^2 - 8ab) = ab$~~

~~$\Leftrightarrow \gcd(ab, 8ab) = ab$~~

~~$\gcd(a, b) = 1$~~

~~$\gcd(a+b, a^2 - 6ab + b^2) = ab$~~

~~$(a+b) - 8ab = ab$~~

~~$(a+b, 8ab) = ab$, $(a, b) = 1$~~

~~$\text{Ессе } ab \mid 8ab \Rightarrow ab \mid 8ab$~~

~~$ab \mid 8ab$ а $ab \mid (a+b)$~~

~~$a+b \mid ab \Leftrightarrow$~~

~~$\begin{cases} a+b = ab \\ 8ab = ab \end{cases}$~~

~~$8ab \mid ab - b = a$~~

~~$8ab \mid a - b$~~

~~$8ab \mid a - b = 8b^2$~~

~~$\Rightarrow ab \mid 8b^2 \Rightarrow ab \mid 8a^2$~~

~~$ab \mid a^2 + b^2$~~

~~$\Rightarrow 64a^2b^2 \mid a^2 + b^2$~~

$$\begin{aligned} & 8(b^2 + a^2) \mid ab \\ & 6((a+b)^2 + (a-b)^2) \mid ab \\ & 8(a+b)^2 \mid ab \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2)

$$\begin{cases} a + b = 11 \\ ab = 10 \end{cases}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 121$$

$$\begin{aligned} &a^2 + 2ab + b^2 = 121 \\ &a^2 + 2ab + b^2 = 121 \end{aligned}$$

$$2(a+b) = 11$$

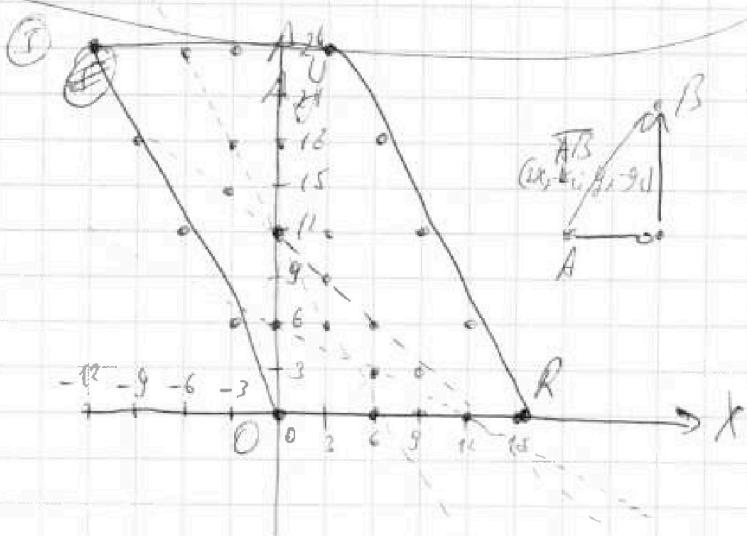
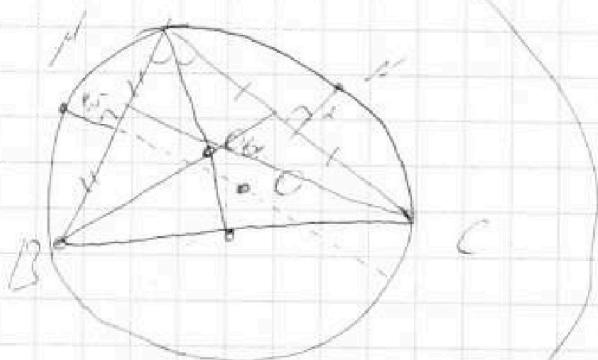
$$4a^2 + 8ab + 4b^2 = 121$$

$$4a^2 + 8ab + 4b^2 = 121$$

$$2(a-b)^2 = 11$$

(7)

A



$$\begin{aligned} 2k_2 - 1k_1 + g_2 - g_1 &= 12 \\ 2ok + \delta y &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10k &\geq 0, \quad \delta y \geq 0 \\ \delta y &= 12 - 10k \\ 0 &\leq \delta y \leq 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - ok &= \frac{\delta y}{2} \\ \text{или } y &= ok + \frac{\delta y}{2} \end{aligned}$$

$$ok = 6 - \frac{\delta y}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

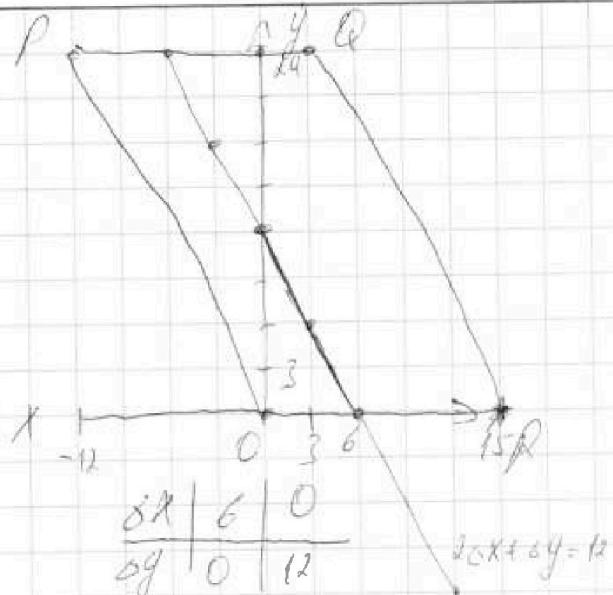
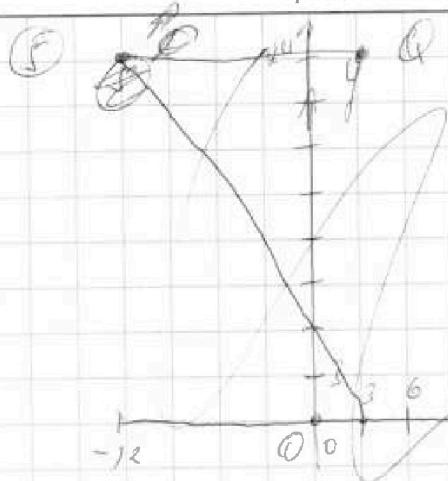
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Rightarrow \text{дво} \quad \text{знач} (x_0, y_0) \in P \& R$$

$$\Rightarrow \text{дво} \quad \text{знач} (x_0, y_0) \in P \& R$$
$$x \in [0, 15]$$
$$y \in [-4, 4]$$

БКЕ

БКЕ

$$O_2 O_1 = R = 5$$

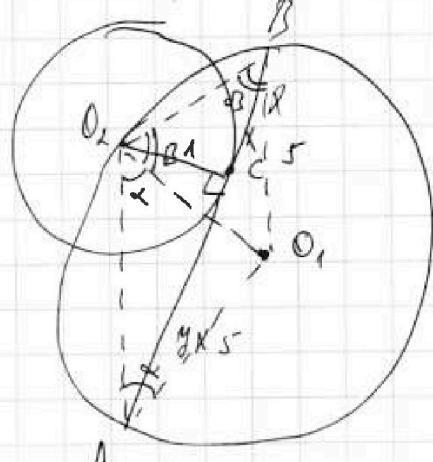
$$O_2 A$$

$$OA = \sqrt{144R^2}$$

$$O_2 B = \sqrt{144R^2}$$

$$\text{знач } \frac{AB}{\sin(\angle AOB)} = 2R = 2$$

$$\frac{8R}{\sin(\angle AOB)} = 2 \rightarrow 4R = \sin(\angle AOB)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

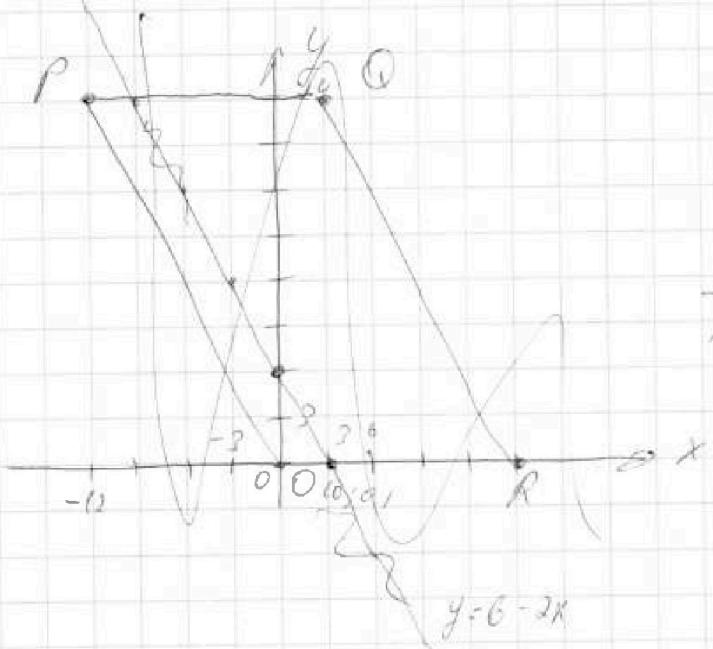
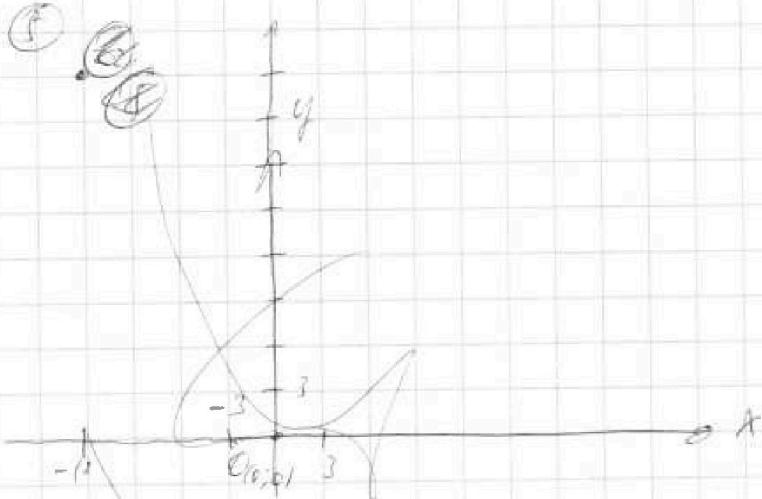
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Каждое из л. с. л.
 $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$
 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 1^{\circ}$$

Рассмотрим $2x + y = 6$
 $\Rightarrow \cancel{y = 6 - 2x}$
 $\begin{array}{r} x | 0 | 3 \\ \hline y | 6 | 0 \end{array}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 1^{\circ} \\ &2x_2 + y_2 - 6 - (2x_1 + y_1 + 6) = 0 \\ &2x_2 + y_2 - 6 = 2x_1 + y_1 + 6 \end{aligned}$$

Решение:

Пусть

$$\begin{aligned} &x_2 - x_1 = 6x, y_2 - y_1 = 6y \\ &\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 1^{\circ} \\ &2x + 6y = 1^{\circ} \\ &6y = 1^{\circ} - 2x \end{aligned}$$