



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $a, b, c \in \mathbb{N}$:

$$ab = 2^{14} \cdot 4^{10} \cdot k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 7^{14} \cdot m, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{34} \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\times \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{7^{14}}{64}$$

мин-abc - ?

$$(abc)^2 = 2^{28} \cdot 4^{20} \cdot 2^{14+14+20} \cdot 7^{10+14+34} \cdot kmn$$

$$(abc)^2 = 2^{51} \cdot 4^{64} \cdot kmn$$

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 4^{64} \cdot kmn} = 2^{25} \cdot 2^2 \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{k} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$$

$$abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{kmn} \in \mathbb{N}$$

$$\text{Если } k, m, n \in \mathbb{Z}, \text{ то } \sqrt{kmn} = \sqrt{k} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow k \text{ или } m \text{ или } n = 1$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } k=2, \quad m=n=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{kmn} = 2$$

$$\Rightarrow abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

Пусть $2^p \mid abc$, $p \in \mathbb{N}$ -max

$$2^p \mid abc, \quad p \in \mathbb{N} \text{-max} \Rightarrow p \geq 34, \quad q \geq 20$$

$$abc = 2^{35} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{kmn}$$

$$\Rightarrow \sqrt{kmn} \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{kmn} \in \mathbb{N} \\ 4^5 \mid \sqrt{kmn} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{kmn} \cdot 4^{10} \mid kmn$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } k=2, \quad m=4^{10}, \quad n=1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① - Продолжение:

$$k=2$$

$$n=y^{10}$$

$$k=1$$

$$\Rightarrow abc = 2^{15} \cdot y^{22} \cdot 2 \cdot y^5 = 2^{16} \cdot y^{27}$$

- это минимально, так как $2^{15} \cdot y^{10}$ и $2^{16} \cdot y^{10}$
 \Rightarrow среднее k, n, a равно

тогда na
 $\Rightarrow kna = 2^{16-1} \cdot y^{10} \cdot y^2$
при $t, d \in \mathbb{N}$

\Rightarrow минимально среднее
при $t=1, d=1$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot y^{27}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ - Продолжение

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \in \left[\frac{23 - \sqrt{341}}{34}, \frac{2}{3} \right]$$

$$x = \frac{11 - 11\sqrt{2}}{41} < 0 < \frac{23 - \sqrt{341}}{34} \Rightarrow \text{не подходит}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) Найдите все a : 36 .

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0 & (1-2) \text{ рис.} \end{cases}$$

(1) $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0$

1) $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

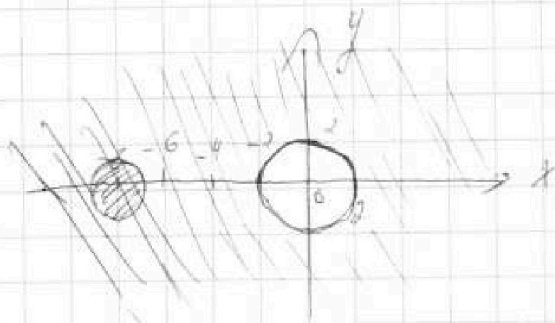
$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (x+8)^2 + y^2 = 1$

- 0

- окружность с центром в $(-8; 0)$
и $r=1$

$x^2 + y^2 = 4$

- окружность с центром в $(0; 0)$
и $r=2$



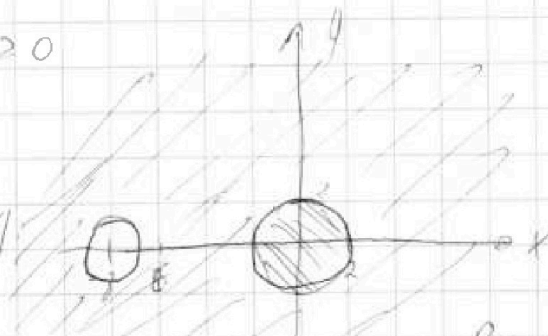
\Rightarrow Решения

- точки касания

$r=1$ с центром в $(-8; 0)$

2) $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 14 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$

Аналогично (1).



\Rightarrow Решения

- точки касания $r=2$
с центром в $(0; 0)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



④ - Преобразование

$$\sqrt{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$52x^2 - 5x + 3 \geq 2 - 9x$$

$$2 - 9x \geq 0$$

$$\frac{2}{9} \geq x \Rightarrow x \leq \frac{2}{9}$$

Если $2 - 9x \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{2}{9} \leq x \rightarrow$$

также $9 \cdot 19$
 x с $4x$
0,231

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 49x^2 - 28x + 4$$

$$0 \geq 47x^2 - 23x + 1$$

$$47x^2 - 23x + 1 \leq 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 47 = 341$$

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{341}}{94}$$

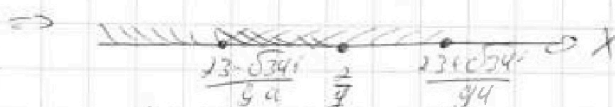
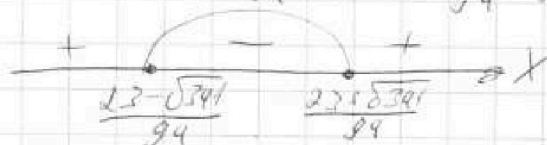
$$\Rightarrow x \in \left[\frac{23 - \sqrt{341}}{94}, \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right]$$

$$x = \frac{23 + \sqrt{341}}{94} = \frac{23 + 19}{94} = \frac{42}{94} = \frac{21}{47}$$

$\times 23$	$\times 47$
$\frac{529}{22}$	$\frac{188}{4}$
$+ 169$	188
$\frac{46}{529}$	
$- 529$	$\frac{1}{8}$
$\frac{138}{341}$	$\frac{1}{19}$
$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{191}$
$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{361}$
$\frac{1}{94}$	$\frac{1}{361}$
$\frac{1}{94}$	$\frac{1}{361}$
$\frac{1}{94}$	$\frac{1}{361}$

$$\Rightarrow x = \frac{23 + \sqrt{341}}{94}$$

$$\left(x - \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right) \left(x - \frac{23 - \sqrt{341}}{94} \right) \leq 0$$



$$x \in \left[\frac{23 - \sqrt{341}}{94}, \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \right]$$

$$\frac{23 - \sqrt{341}}{94} <$$

$$< \frac{23 - 19}{94} = \frac{4}{94} < \frac{2}{9}$$

$$\frac{23 + \sqrt{341}}{94} >$$

$$\frac{23 + 19}{94} = \frac{42}{94} > \frac{2}{9}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④- Продолжение от

$$(4x-2.5)^2 - 0.25 = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x)$$

$$(4x+3)(4x-2) = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x)$$

$$(3-4x)(2-4x) = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x)$$

$$x = \frac{2}{4} \in ODZ \Rightarrow \text{корень}$$

$$x \neq \frac{2}{4} \Rightarrow (3-4x)(2-4x) = 2\sqrt{2x^2-5x+3} (2-4x) \quad | \cdot (2-4x)$$

$$\frac{3-4x}{2} = \sqrt{2x^2-5x+3}$$

$$\geq 0$$
$$3 \geq 4x$$

$$\frac{3}{4} \geq x$$

$$x \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 49x^2 - 92x + 9 = 4(2x^2 - 5x + 3)$$

$$49x^2 - 92x + 9 = 8x^2 - 20x + 12$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 11^2 + 3 \cdot 41 = 121 + 3 \cdot 41 = 242$$
$$= 2 \cdot 121$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121}}{41}$$

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{121}}{41} < 0$$

$$x_2 = \frac{11 + \sqrt{121}}{41} > \frac{22}{41} > \frac{1}{2} > \frac{3}{4} \Rightarrow \text{не корень}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{4} \text{ или } x = \frac{11 - \sqrt{121}}{41}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)(x-\frac{3}{2}) = (x-1)(2x-3)$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 9$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = \frac{4x^2 + 4x + 2}{2} = \frac{4x^2 + 4x + 1 + 1}{2}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 & (1) \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$(x-1)(2x-3) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad \frac{3}{2} \end{array} \Rightarrow x$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$(2) \quad 2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$D = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{OДЗ: } (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - (2 - 4x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x) + (2 - 4x)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x) + 49x^2 - 28x + 4 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$49x^2 - 33x + 8 - 2x - 1 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

$$49x^2 - 35x + 6 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

$$49x^2 - 35x + 6, 25 - 0, 25 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}(2 - 4x)$$

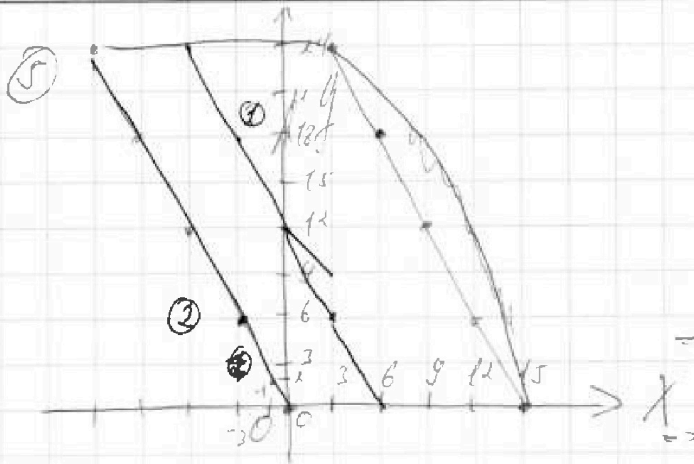
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_1 - y_2 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12$$

$$2x_2 + y_2 = 0 \rightarrow$$

$$2x_1 + y_1 + 12 = 0$$

$\in \mathbb{R}^2(x_1, y_1, 0)$
 \rightarrow для $\forall (x_1, y_1)$ ~~содержит~~

\rightarrow для $\forall x_1 \in$ границе $2x_1 + y_1 = 0$ ~~не пересекается~~

всех x_1 границе

$$2x_1 + y_1 + 12 = 0$$

~~(если $\forall (x_1, y_1)$ ~~содержит~~)~~

$$2x_1 + y_1 \text{ (если } x_1 \in \mathbb{R}^2 \text{)} \\ \text{и } 2x_1 + y_1 + 12 = 0, \text{ и } 12 \neq 0$$

$$12 \in \mathbb{R}^2 \text{ и } 2x_1 + y_1 = 0$$

\Rightarrow На каждой прямой $2x_1 + y_1 + c = 0$, $c \in \mathbb{Z}$

- но $12 \notin \mathbb{Z}$ в границе

границы x_1 в границе $2x_1 + y_1 = 0$

пересекается

$$\rightarrow (-1; 2), (0; 0)$$

$$(0; 0), (-1; 2), (-2; 4)$$

$$\dots (-12; 24) \neq$$

для $2x_1 + y_1 + c = 0$ - очевидно, $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$

\Rightarrow На каждой прямой $2x_2 + y_2 + c = 0$, $c \in \mathbb{Z}$

$$2x_2 + y_2 + c = 0, c \in \mathbb{Z}$$

- но $12 \notin \mathbb{Z}$ в границе

\Rightarrow для каждой прямой $2x_2 + y_2 + c = 0$

$$2x_2 + y_2 + c = 0 \text{ и } 2x_2 + y_2 + c + 12 = 0$$

$$- \text{сведем } 12 = 25$$

$$12^2 = 169$$

то всего 169 прямых:

$$2x_2 + y_2 = 0 \text{ и } 2x_2 + y_2 + 12 = 0$$

$$2x_2 + y_2 + 1 = 0 \text{ и } 2x_2 + y_2 + 13 = 0$$

$$2x_2 + y_2 + 18 = 0 \text{ и } 2x_2 + y_2 + 30 = 0$$

Далее 169 прямых $2x_2 + y_2 + c = 0$, $c \in \mathbb{Z}$

и 169 прямых $2x_2 + y_2 + c + 12 = 0$

за границей $2x_2 + y_2 = 0$

$$\Rightarrow 169 + 169 + 19 = 321 + 19$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 25 \cdot 19 = 475$$

Итого: $475 + 321 + 19 = 815$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 169 \\ \hline 1152 \\ + 1521 \\ \hline 169 \\ \hline 3211 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 25 \\ \hline 475 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

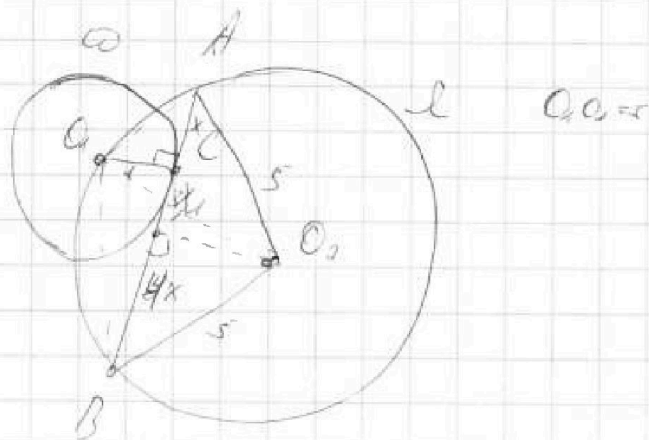
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

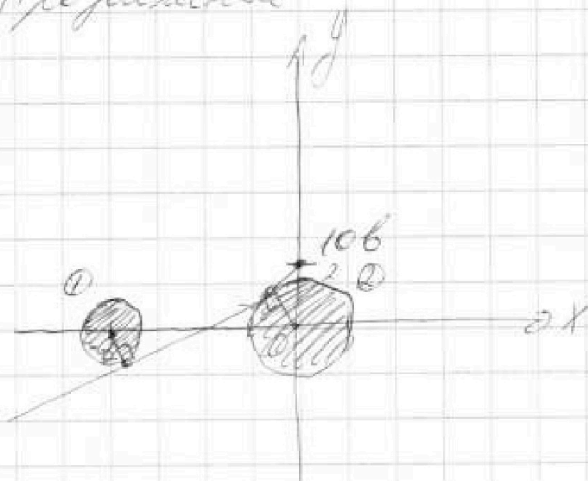


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) - Продолжение

(2)



1) - окружность с центром в $(-2, 0)$

2) - окружность с центром в $(0, 2)$

сист. им. 2 рав. $\Rightarrow ax - y + 10b = 0$

д.т. пересечем экв. кр. 1 и 2

\Rightarrow т.п.

$\Rightarrow ax - y + 10b = 0$ - касания 1 и 2

$\Rightarrow ax - y + 10b = 0$

$\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$\begin{cases} ax_1 - y_1 + 10b = 0 \\ ax_2 - y_2 + 10b = 0 \\ (x_1 + 2)^2 + y_1^2 = 4 \\ x_2^2 + y_2^2 = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$$\uparrow \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow ax - y + 10b = 0$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} = 1 \text{ реш. } \uparrow$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 = 4 \end{cases} = 1 \text{ реш. } \Delta$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8) Продолжение

$$\begin{cases} 25b^2 - a^2 = 1 \\ 160ab - 64a^2 - 75b^2 = 0 \end{cases}$$

$$64a^2 - 160ab + 75b^2 = 0$$

$$(8a - 10b)^2 = 25b^2$$

$$8a - 10b = 5b$$

$$8a - 10b = -5b$$

$$8a = 15b$$

$$\frac{8a}{15} = b$$

$$8a = 5b$$

$$\frac{8a}{5} = b$$

$$1) \left(\frac{8}{15}\right)^2 a^2 \cdot 25 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(\frac{25 \cdot 64}{25 \cdot 9} - 1 \right) = 1$$

$$a^2 \left(\frac{64}{9} - 1 \right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{55}{9} = 1$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\sqrt{63}}{63}, \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$2) \left(\frac{8a}{5}\right)^2 \cdot 25 - a^2 = 1$$

$$\frac{64a^2}{25} \cdot 25 - a^2 = 1$$

$$63a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{63}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{63}}{63}$$



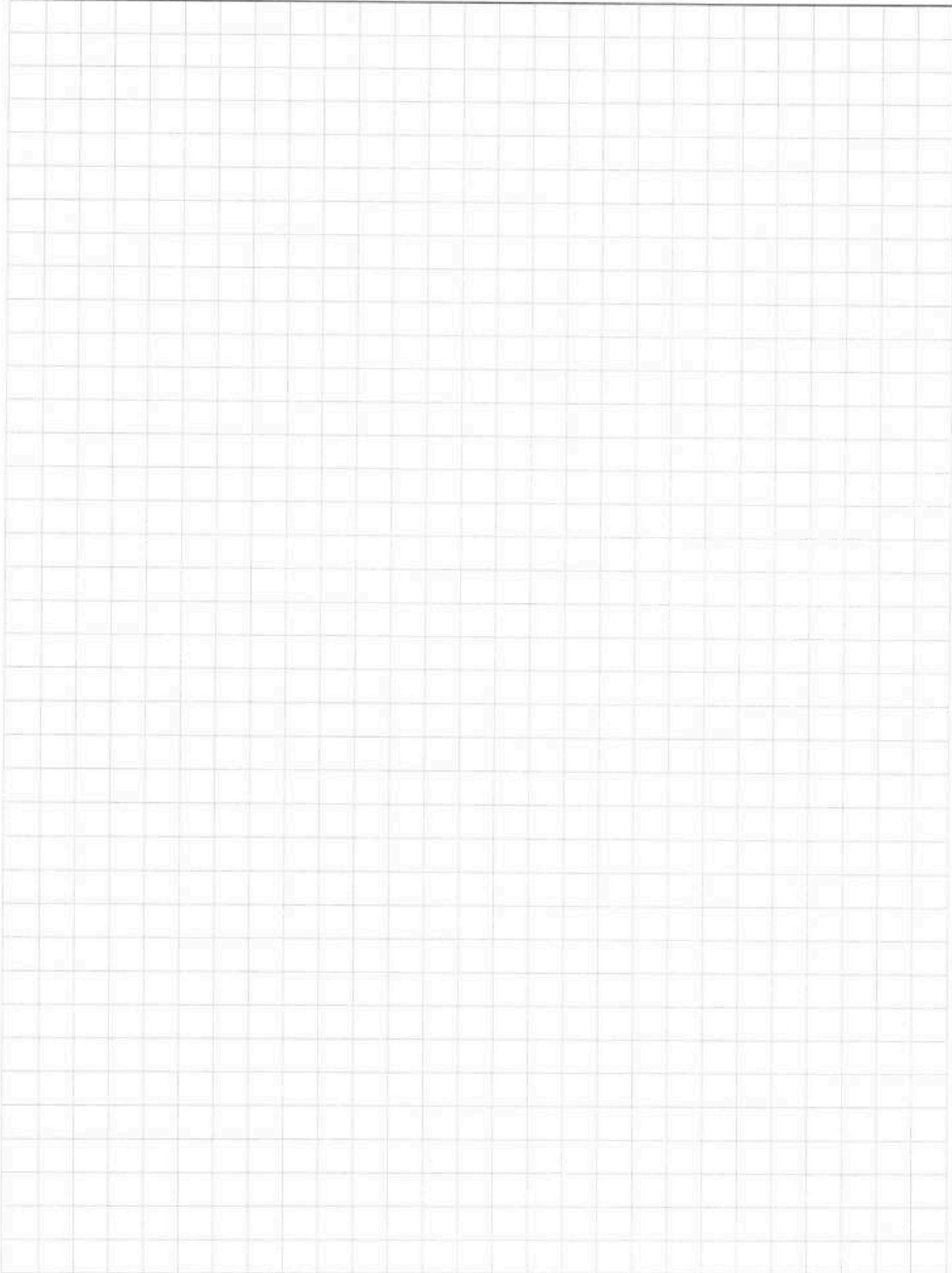
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 25b^2 - a^2 = 1 \\ 1600b - 64a^2 - 45b^2 = 0 \end{cases}$$

400a
8-551 a = 800b

$$64a^2 - 1600b + 45b^2 = 0$$

$$(2a)^2 - 1600b + (55b)^2 = 0$$

$$45b^2 - 1600b + 64a^2 - 1600b + 100b^2 + 15b^2 = 0$$

$$100b^2 - 1600b + 64a^2 = 25b^2$$

$$(8a - 10b)^2 = 25b^2$$

$$(40b + 8a)^2 = 25b^2$$

$$8a - 10b = 25b$$

$$8a - 10b = -15b$$

$$10b + 8a = 5b$$

$$10b + 8a = -5b$$

$$8a = 25b$$

$$8a = -15b$$

$$a = \frac{25b}{8}$$

$$a = -\frac{15b}{8}$$

$$8a = -5b$$

$$4a = -b$$

$$8a = b$$

$$\frac{8a}{35} = b$$

$$-\frac{8a}{15} = b$$

$$\Rightarrow 125 \cdot \left(\frac{8}{35}\right)^2 a^2 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(25 \cdot \frac{64}{49} - 1\right) = 1$$

$$\frac{-64}{49} - 1$$

$$a^2 \left(\frac{64}{49} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{15}{49} = 1$$

$$a^2 = \frac{49}{15}$$

$$a = \pm \frac{7}{\sqrt{15}} = \pm \frac{7\sqrt{15}}{15}$$

$$2) 25 \cdot \left(-\frac{8}{15}\right)^2 a^2 - a^2 = 1$$

$$a^2 \left(25 \cdot \frac{64}{225} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \left(\frac{64}{9} - 1\right) = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{55}{9} = 1$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

Ответ: $\pm \frac{7\sqrt{15}}{15}$
 $\pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6 - Продолжение.

$$\square \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$ax + 10b = y^2 \quad y^2 = (ax)^2 + 20abx + 100b^2$$

$$x^2 + (ax)^2 + 20abx + 100b^2 = 4$$

$$x^2(1+a^2) + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow D = 400a^2b^2$$

$$\Rightarrow D = 400a^2b^2$$

$$D = 100a^2b^2 - (100b^2 - 4)(1+a^2) = 0$$

$$100a^2b^2 - 100b^2 - 100b^2a^2 + 4 + 4a^2 = 0$$

$$200a^2b^2 - 100b^2 + 4a^2 - 4 = 0 \quad | :4$$

$$50a^2b^2 - 25b^2 + a^2 - 1 = 0$$

$$25b^2(2a^2 - 1) + a^2 - 1 = 0$$

$$-100b^2 + 4 + 4a^2 = 0$$

$$25b^2 + 1 + a^2 = 0$$

$$25b^2 - a^2 = 1$$

$$\square \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ (x+b)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 16bx + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1$$

$$x^2(a^2+1) + x(16+20ab) + 63 + 100b^2 = 0$$

$$D = (16+20ab)^2 - (a^2+1)(63+100b^2)$$

$$= 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 63a^2 - 100a^2b^2 - 63 - 100b^2 = 0$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 64 = 0$$

$$\Rightarrow 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 25b^2 - a^2 = 0$$

$$160ab - 64a^2 - 75b^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

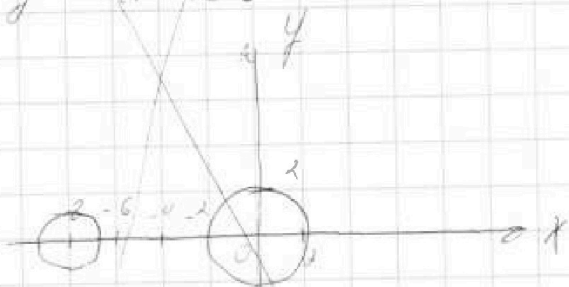
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



① ~~Решение.~~
~~Согласно формуле~~
~~для касания кривых.~~

$$\Rightarrow \parallel ax - y + kb = 0$$

$$y = -ax - kb$$



② $\frac{a+b}{b}$ - касаясь, $a, b \in \mathbb{R}$

возм.:

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

касаясь μ ; $\mu(a+b)$, $\mu(a^2 - 6ab + b^2)$

гео

гео

$$(a, b) = 1$$

гео

$$(a \pm b, a^2 - 6ab + b^2) = \mu$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = t$$

$$a + b = p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = \frac{t}{b^2}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{p}{b}$$

$$\text{пусть } p = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{(p+1)/b}{(p^2 - 6p + 1)/b}$$

$$p^2 - 6p + 1 = 0$$

$$p^2 - 6p + 1 = p^2 - 6p + 9 - 8 = (p-3)^2 - 8$$

$$D = 36 - 4$$

$$p_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6

Найти все $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (2) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (1) \end{cases}$$

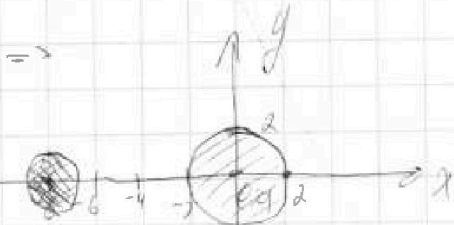
- система
2 уравн

$$(1): ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$\Rightarrow 1) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

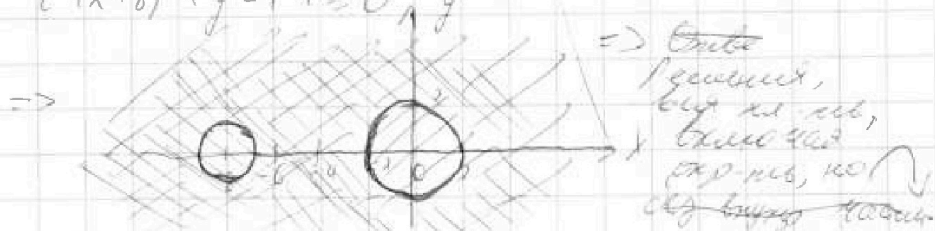
$x^2 + y^2 = 4$ - окруж в π
с центром в $(0, 0)$
и $r = 2$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ - окруж
с центром в $(-8, 0)$
и $r = 1$



\Rightarrow и.т. не имеют общих точек.

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



\Rightarrow область
внешняя,
вне кр. и кр.,
вне кр. и кр.
окр. и кр., но
не между кр.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



② $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$, $a, b \in \mathbb{N}$ $\frac{a}{b}$ -несократ

m -макс $\left\{ \begin{array}{l} a+b = m \cdot k \\ a^2-6ab+b^2 = m \cdot n, \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{k}{n} \text{ - несократ} \end{array} \right.$

$a^2 + 2ab + b^2 = m^2 \cdot k^2$

$a^2 - 6ab + b^2 = m \cdot n = m^2 \cdot k^2 - 8ab$

$\Rightarrow 8ab : m$
 $\gcd(a, b) = 1$

~~$\gcd(a+b, a^2-6ab+b^2) = m$, $\gcd(a, b) = 1$~~

~~$\gcd(m, m^2 k^2 - 8ab) = m$~~

~~$\Rightarrow \gcd(m, 8ab) = m$
 $\gcd(a, b) = 1$~~

~~$\gcd(a+b, a^2-6ab+b^2) = m$~~

~~$(a+b, -8ab) = m$~~

~~$(a+b, 8ab) = m$, $(a, b) = 1$~~

~~$m | a+b \Rightarrow m | 8ab$~~

~~$m | 8ab$ и $m | (a+b)$~~

~~$m | a+b \Rightarrow$~~

~~$\begin{cases} a+b = m \cdot k & a = m \cdot k - b \\ 8ab = m \cdot n \end{cases}$~~

~~$8b(m \cdot k - b) = m \cdot n$~~

~~$8b \cdot m \cdot k - 8b^2 = m \cdot n$~~

~~$8b \cdot m \cdot k - m \cdot n = 8b^2$~~

~~$\Rightarrow m | 8b^2 \Rightarrow m | 8a^2$~~

~~$m | 8a^2$~~

~~$\Rightarrow 8a^2 = m^2 \cdot k^2$~~

$8(b^2+a^2) = m$
 $b((a+b)^2+8ab) = m$
 $8(a-b)^2 = m$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



②

$$\begin{cases} a+b=mn \\ 2ab=mn \end{cases}$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} & a^2 - 2ab + b^2 : mn \\ & \frac{a^2 + 2ab}{b^2 + 2ab} \end{aligned}$$

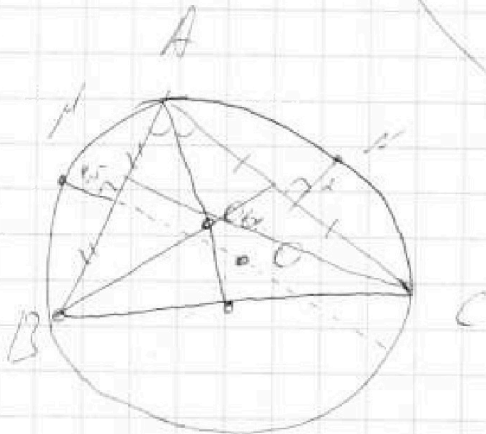
$$2(ab), mn$$

$$4a^2 + 3ab + 4b^2 : mn$$

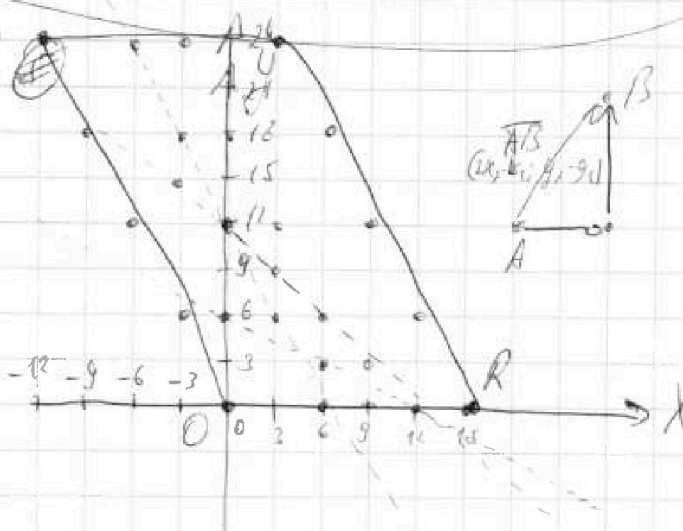
$$4a^2 - 8ab + 4b^2 : mn$$

$$2(a-b)^2 : mn$$

③



④



$$\begin{aligned} \Delta x & \\ 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 &= 12 \\ 2\Delta x + \Delta y &= 12 \\ \Delta x & \geq 0, \Delta y > 0 \\ \Delta y &= 12 - 2\Delta x \\ 0 & \leq \Delta x \leq 6 \\ y - x &= \frac{0-12}{4} \\ \text{или } \Delta x & \leq 6 \\ \Delta x &= 6 - \frac{\Delta y}{2} \end{aligned}$$

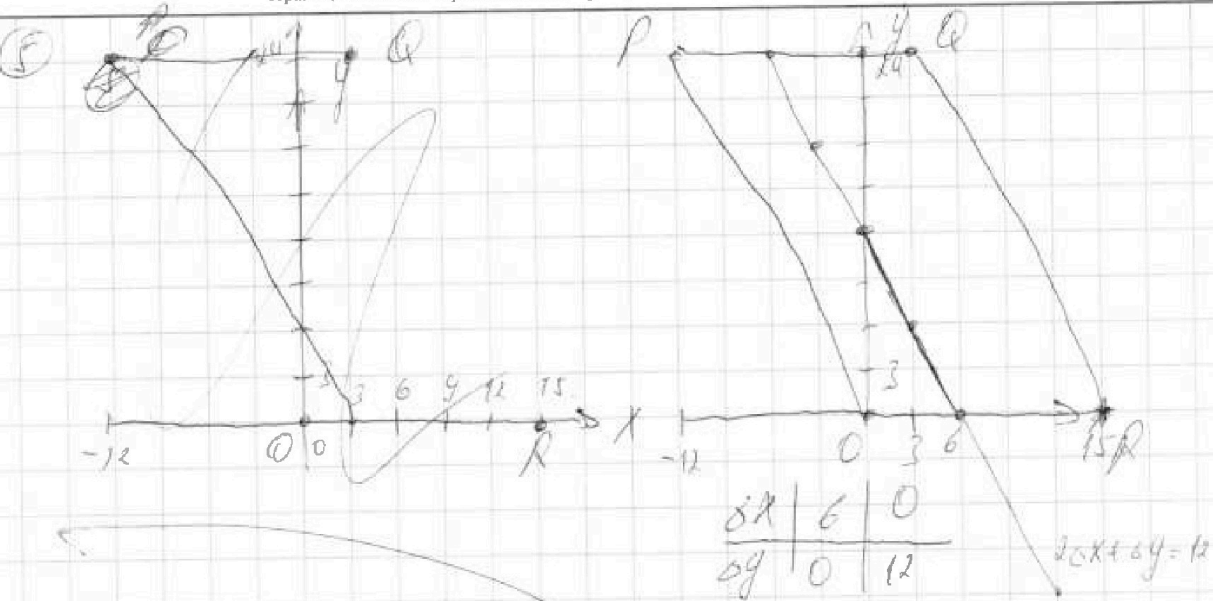
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

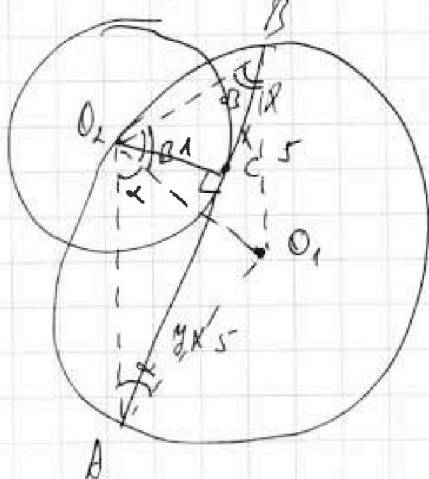
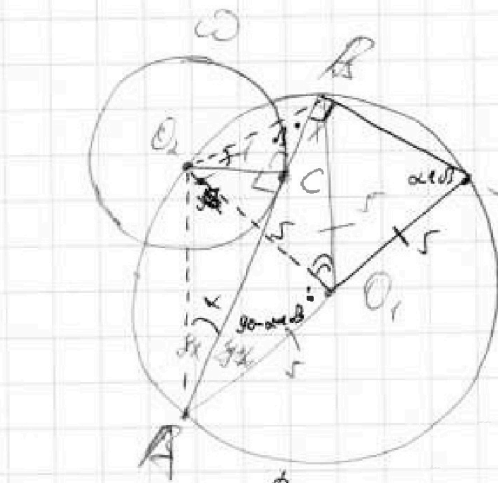
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4 3



\Rightarrow ~~...~~
Если $(x_0, y_0) \in P \cap Q$

\Rightarrow ~~...~~
 $x \in [0, 15]$
 $y \in [-24, 24]$
 $x \in$

~~...~~

$R = 5$ $r = 1$ $\frac{AC}{CB}$
 $AB = ?$

$O_1 O_2 = R = 5$

$O_1 A = \sqrt{1 + 49x^2}$

$O_2 B = \sqrt{1 + x^2}$

\Rightarrow $\frac{AB}{\sin(\alpha)} = 2R = 2$

$\sin(\alpha)$

$\frac{2x}{\sin(\alpha)} = 2 \Rightarrow 4x = \sin(\alpha) \cdot 2$

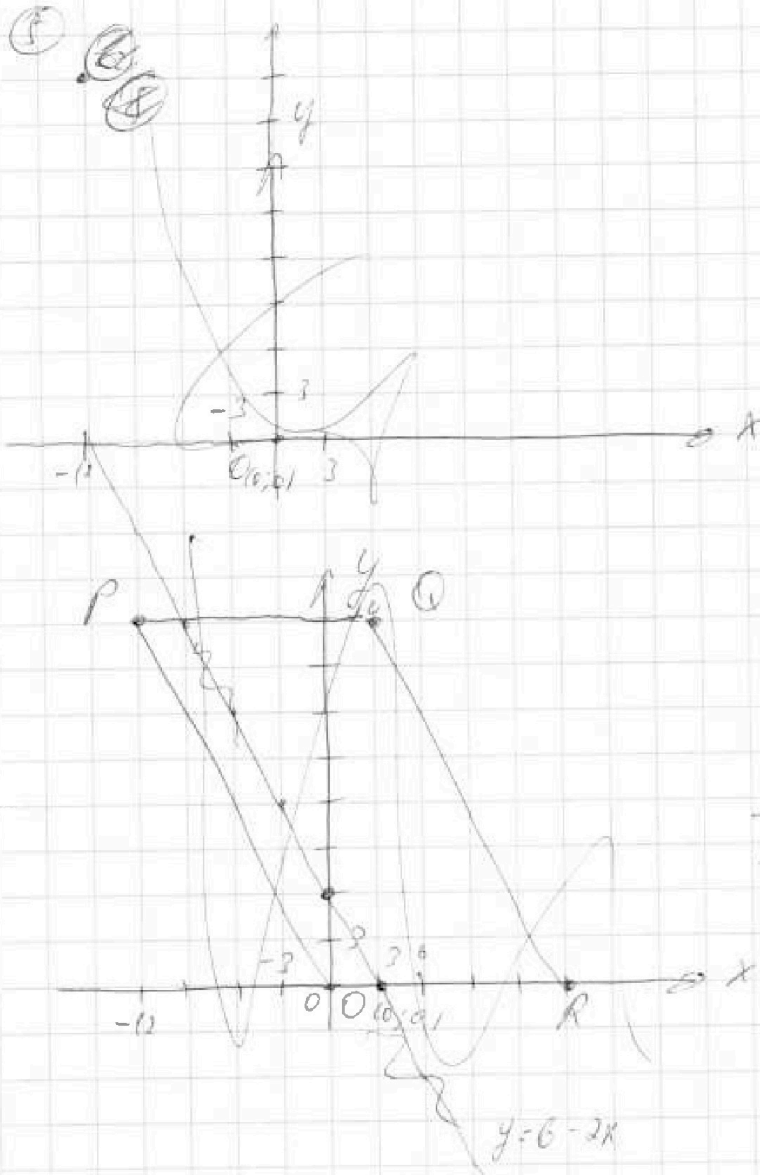
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Каждое кол-во.
 $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$
 $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Решим: $2x + y = 6$

$$\Rightarrow y = 6 - 2x$$

x	0	3
y	6	0

$$\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 6 + (2x_1 + y_1 + 6) = 0$$

$$2x_2 + y_2 = 6 = 2x_1 + y_1 + 6$$

Решение:

Решим

Пусть $x_2 - x_1 = 6x, y_2 - y_1 = 6y$

$$\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$26x + 6y = 12$$

$$6y = 12 - 26x$$