



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^{14} 7^{10}$ $bc: 2^{12} 7^{17}$ $ac: 2^{20} 7^{37}$ обозначим за a_2, b_2, c_2 степени
вхождения двойки в a, b, c .

Тогда $a_2 + b_2 \geq 14$ (т.к. $ab: 2^{14}$)

$$b_2 + c_2 \geq 17$$

$$a_2 + c_2 \geq 20$$

Значит $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 51$ т.к. a_2, b_2, c_2 натуральные, то

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 26. \text{ Пример: } a_2 = 9, b_2 = 5, c_2 = 12$$

Аналогично $a_3 + b_3 \geq 10$

$$b_3 + c_3 \geq 17$$

$$a_3 + c_3 \geq 37 \text{ - значит } a_3 + b_3 + c_3 \geq 37. \text{ Пример: } a_3 = 20, b_3 = 0, c_3 = 17$$

$$\text{Тогда } (abc)_2 \geq 26, (abc)_3 \geq 37 \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

(при выше описанных a_2, b_2, \dots, c_3 это выполняется).

Ответ: $2^{26} 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow a$ взаимнопросто с b .

Числитель и знаменатель можно сократить на $m \Rightarrow$ они
делятся на m

$$a+b:m \quad a^2-6ab+b^2:m \quad a^2-6ab+b^2 = (a+b)^2 - 8ab.$$

т.к. $a+b:m$, $(a+b)^2 - 8ab:m$, то $8ab:m$

Итак, $a+b:m$ $8ab:m$.

Предположим, что ab и $a+b$ имеют какой-то общий
простой множитель $= p$.

$a+b:p$ $ab:p \Rightarrow a:p$ или $b:p$ (варианты идентичны)

$a:p$; $a+b:p \Rightarrow b:p$, $a:p$ но a и b взаимнопросты,
значит такого не может быть $\Rightarrow a+b$ и ab взаимнопро-
сты.

\Rightarrow Если $a+b:m$, $8ab:m$, то $8:m$ (т.к. $ab \perp m$) \Rightarrow

$m \leq 8$. Пример: $a=3$ $b=5$ $\frac{5+3}{(5+3)^2 - 8 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{8}{8^2 - 16 \cdot 3}$

Как мы видим, числитель и знаменатель $: 8$.

Ответ: 8

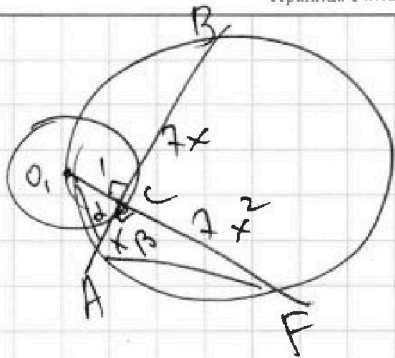
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CF \cdot O_1C = AC \cdot CB$$

$$1 \cdot 7x^2 = x \cdot 7x$$

$$\alpha = \angle O_1AC \quad \sin \alpha = \frac{O_1C}{O_1A} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\beta = \angle CAF \quad \sin \beta = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{49x^2+1}} + \frac{\sqrt{49x^2 \cdot x^2}}{(1+x^2)\sqrt{49x^2+1}}$$

$$= (7x^2+1) \sqrt{\frac{1}{(1+x^2)(49x^2+1)}}$$

$$\angle O_1AF = \alpha + \beta. \quad O_1F = 2R \cdot \sin \angle O_1AF \quad (\text{по т. синусов})$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot \sin(\alpha + \beta) = 8(1+7x^2)$$

$$10(7x^2+1) \sqrt{\dots} = 1+7x^2$$

$$10 \sqrt{\frac{1}{(1+x^2)(49x^2+1)}} = 1$$

$$\sqrt{(1+x^2)(49x^2+1)} = 10$$

$$(1+x^2)(49x^2+1) = 100$$

$$x = \pm 1; \quad x > 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Итак, $2x^2 + 2x + 1 \leq 1$; $1 - 7x \leq 0$

$2x^2 + 2x \leq 0$

$x(x+1) \leq 0$

$-1 \leq x \leq 0$

$1 \leq 7x$

$x \geq \frac{1}{7}$

Как мы видим, условия противоречат друг-другу,
а значит корней нет.

Ответ: $x =$ Остается проверить вариант $x = 3,5$
по ОДЗ.

$\sqrt{2 \cdot 3,5^2 - 5 \cdot 3,5 + 3} = \sqrt{3,5 \cdot 2 + 3} = \sqrt{10}$

$\sqrt{2 \cdot 3,5^2 + 2 \cdot 3,5 + 1} = \sqrt{3,5 \cdot 2 + 1} = 2$. Значит $3,5$ подходит

Ответ: $x = 3,5$

итог

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Домножим обе части на $(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$ — ОКО ТОЛЬКО!

Левая часть — разность квадратов.

$$2x^2 - 5x + 3 + (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots})$$

$$2x^2 - 2x^2 - 5x - 2x + 3 + 1 = (2 - 7x)(\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots})$$

$$(2 - 7x) = (2 - 7x)(\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots})$$

$$2 - 7x = 0$$

$$x = 3,5$$

$$1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\text{ОДЗ: } 2x^2 + 2x + 1 \leq 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$1 - 7x = -2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$1 - 14x + 49x^2 = 4(2x^2 + 2x + 1)$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 7 = 0$$

Вершина при $x = \frac{22}{41} > 0$.

$$f(0) = -7 \quad f(-1) = 41 + 22 - 7 > 0$$

Значит отрицательный корень ур-я находится по ОДЗ. (Положительный, очевидно, нет)

$$x = \frac{22 - \sqrt{22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 7}}{2 \cdot 41} = \frac{11 - \sqrt{11^2 + 41 \cdot 7}}{41} = \frac{11 - \sqrt{408}}{41}$$

Итак, имели два корня: $x = -3,5$ $x = \frac{11 - \sqrt{408}}{41}$

ОДЗ:
 $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ 2(x-1)(x-1,5) \geq 0 \end{cases}$
 x — любое.
 (в числителе и знаменателе)

стр 1

$$2x^2 + 2x + 1 \leq 1$$

$$2x^2 + 2x \leq 0$$

$$x^2 + x \leq 0$$

$$x(x+1) \leq 0$$

$$-1 \leq x \leq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Знаем } \operatorname{tg} d = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{\frac{9}{55}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{55}}} = \sqrt{\frac{9}{55}} = a \quad (\operatorname{tg} d = a)$$

$$\text{Знаем } a = \pm \sqrt{\frac{9}{55}} \quad (\text{т.к. ось } y \text{ — ось симметрии относительно } O_x \text{ касательная})$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{9}{55}} ; -\sqrt{\frac{9}{55}}$$

(стр 2)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Верхнее равенство: $y = ax + 10b$ - линейная функция

Нижнее: $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

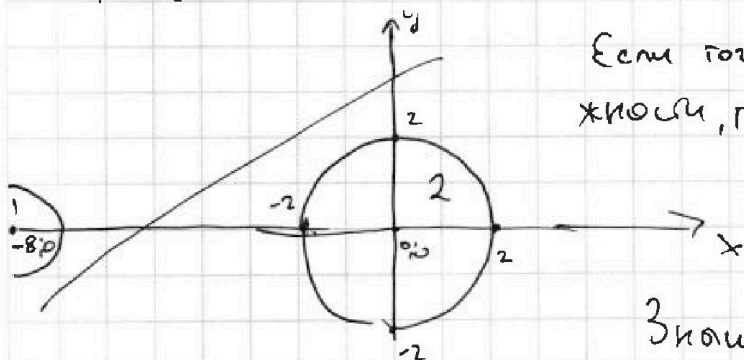
$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$ - уравнение окружности

центр $-8; 0$ $R=1$

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ - уравнение окружности.

центр $0; 0$ $R=2$

Нарисуем всё:



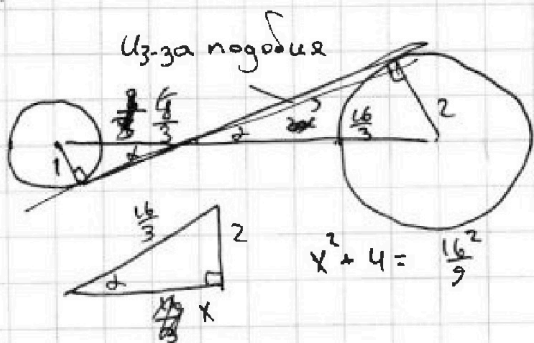
Если точка лежит внутри той окружности, то $(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$,

Если внутри второй, то $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$.

Значит неравенство выполняется \Leftrightarrow точка лежит внутри

одной из окружностей (или знак ≥ 0).

Итак, нам подходят все точки, которые лежат на прямой и находятся внутри какой-то окружности. Если прямая пересекает окружность в 2х точках, то у нас уже бесконечное кол-во решений \Rightarrow если всего 2 решения, то прямая касается обеих окружностей:



Радиусы $= 1; 2$, расстояние между центрами $= 8 \Rightarrow$ Получаем треугольник со сторонами $2; \frac{16}{3}$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 = \frac{64}{9} \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{64-9}{9} = \frac{55}{9} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{55}{9}} \quad \text{стр 1}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

$2x^2 + 2x \leq 0$
 $x^2 + x \leq 0$
 $x(x+1) \leq 0$

ОДЗ: $x \in (-1; 0]$
 $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$
 $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 4 \cdot 6 = 1$ $2 \cdot \frac{1}{4} = 1 + 1$ $4 - 4 = 2$ $(x+1)^2 + x^2$

$\frac{5 \pm 1}{4}$ $\frac{5 \pm 1}{4} = \frac{6}{4} = 1,5$ $\frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$$\sqrt{2(x-1)(x-1,5)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

1) $x = 3,5$

$$2(x-1)(x-1,5) - 2\sqrt{2(x-1)(x-1,5)(2x^2+2x+1)} + 2x^2 + 2x + 1 = 4 - 28x + 49x^2$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 2x - 1} = (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \right)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$-7x + 1 = -2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 7}}{2 \cdot 41}$$

$$\frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 7}}{2 \cdot 41} = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 1148}}{82}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

a, b, c

$ab : 2^{14} 7^{10}$ $bc : 2^{17} 7^{17}$ $ac : 2^{20} 7^{37}$

abc - наим.

2) $a+b \geq 14$
 $b+c \geq 17$
 $a+c \geq 20$

$a+2b+c \geq 31$
 $2b \geq 11$
 $b \geq 6$

$a=9$ $b=5$ $c=12$ $S=26$

$2a+b+c \geq 34$
 $2a \geq 14$
 $a \geq 7$

$a+b \geq 14$

~~$a \geq 7$ $b \geq 7$~~
 $b > 14-a$
 $14-a+c \geq 17$
 $a+c \geq 20$

$34+17 = 51$
 $c-a \geq 3$
 $a+c \geq 20$
 $2a \geq 17$
 $a \geq 9$

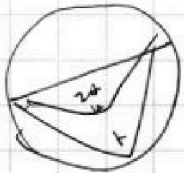
7) $a+b \geq 10$
 $b+c \geq 17$
 $a+c \geq 37$
 20 17

$2(a+b+c) \geq 14+17+20 = 51$

$a+b+c \geq 26$

$a+b+c \geq 37$
 $a=20$ $c=17$

$S=9$



$\frac{a+b}{a^2 - bab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} : m$

$\frac{m_1 + m_2}{\sin \alpha}$
 $a+b : m$

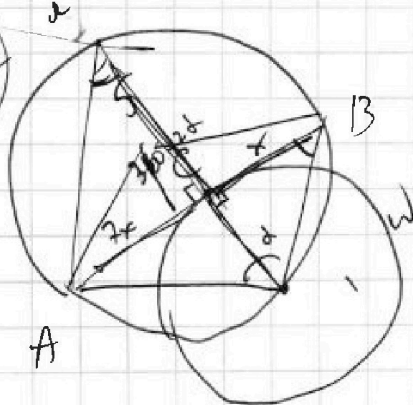
$8ab : m$
 $: p_1$

$a=3$
 $b=5$

$\frac{5+3}{5-3 \cdot 5 \cdot 6+3^2}$

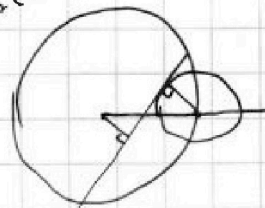
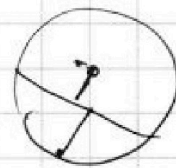
8

$25+9-90$



$15 \cdot 6 = 90$

$AB = 10 \cdot \sin \alpha$



$41 \cdot 7 = 287$
 $280 + 7 = 287$
 $\frac{14}{x} \cdot 7$

$\frac{287}{x} = \frac{280}{x} + \frac{7}{x}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\begin{cases} ax - y + \frac{b}{a} = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

ровно 2 решения

$$b = 10a$$

$$y = ax + \frac{b}{a} \quad y = b = 0$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$((x+8)^2 - 1)(x^2 - 4) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 \leq 0$$

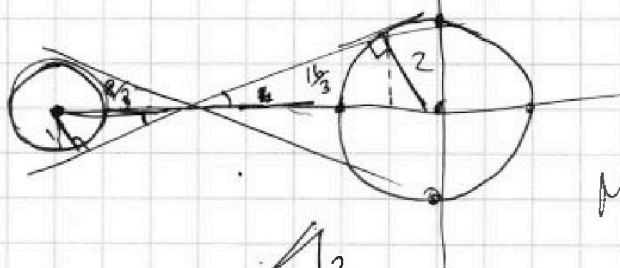
$$x^2 + y^2 \leq 4$$

если x, y внутри окружности, то $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$

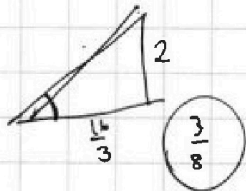
$\Delta \geq 0$
 $\Delta \leq 0$ тогда не выполняется

$$\frac{11 - \sqrt{408}}{41} \geq \frac{1}{7}$$

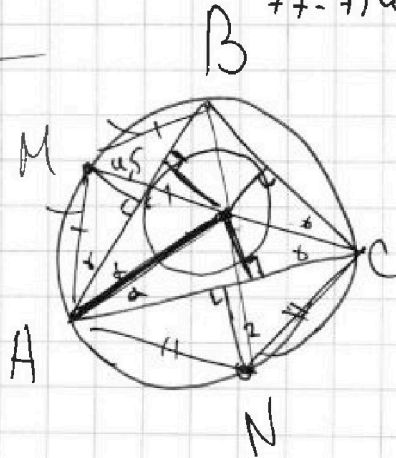
$$77 - 7\sqrt{408} \geq 41$$



-7 0



$$x \geq \frac{1}{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

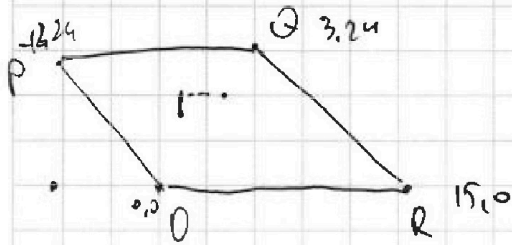
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



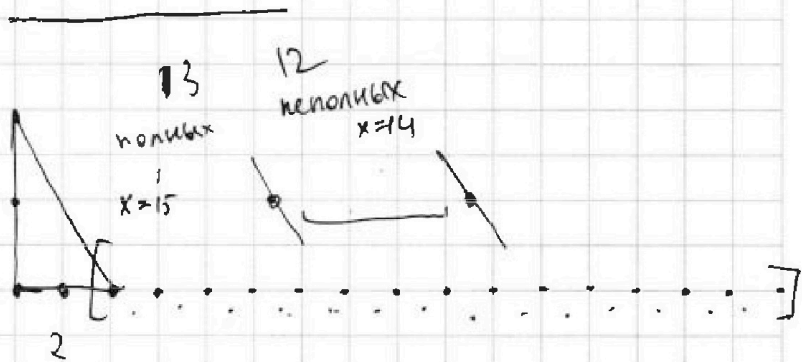
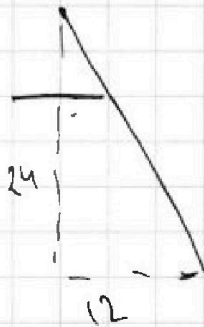
Черновик



$$0 \leq y \leq 24$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$0 \Rightarrow \Delta x = 6$$



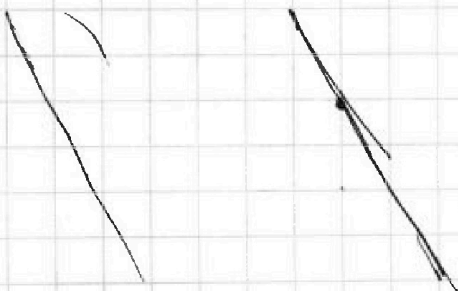
$$\Delta y = 0 \quad \Delta x = 6 \quad \begin{matrix} \text{K: } 9 \cdot 12 \\ \text{P: } 10 \cdot 13 \end{matrix}$$

$$\Delta y = 2 \quad \Delta x = 5$$

$$\Delta y \text{ от } -24 \text{ до } +24$$

A

B





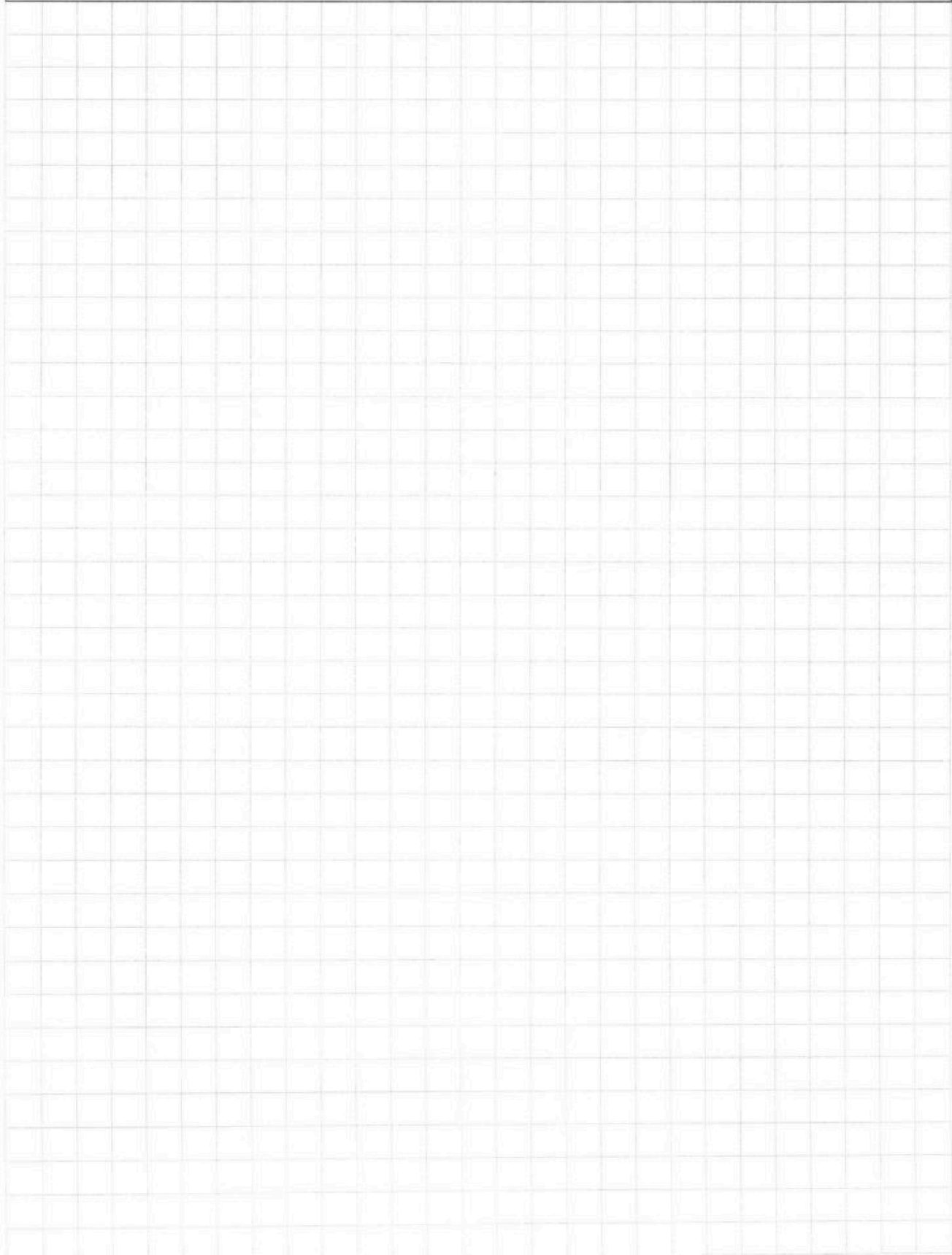
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

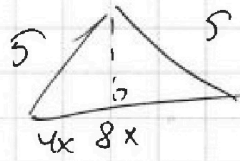
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

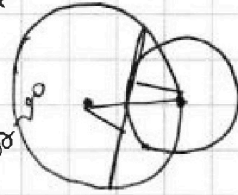
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик



$$h^2 = 25 - 16x^2$$



$$90^\circ - \alpha - \beta = \alpha$$

$$r = R \cos 2\alpha$$

$$r = b$$

$$25b = (bx + 3x)(4x(1+b) + 3bx)$$

$$25b = x(1+3b)x(4+7b)$$

$$25b = x^2(1+3b)(4+7b)$$

$$AB \cdot BO = r^2$$

$$AB^2 = 49x^2 + 49x^2$$

$$BO^2 = 49x^2 + 1$$

$$(10.8) \cdot r$$

$$\sqrt{4 + x^2}$$

$$a = \sqrt{25 - 16x^2}$$

$$a = \frac{3x}{1 + \sqrt{25 - 16x^2}}$$

$$\frac{5}{1 + \sqrt{25 - 16x^2}}$$

$$\frac{5\sqrt{25 - 16x^2}}{1 + \sqrt{25 - 16x^2}} \cdot \frac{5}{1 + \sqrt{25 - 16x^2}} = \left(\frac{4x + 3x}{1 + \sqrt{25 - 16x^2}} \right) \left(\frac{4x + 3x\sqrt{25 - 16x^2}}{1 + \sqrt{25 - 16x^2}} \right)$$

$$25\sqrt{25 - 16x^2} = (x(1+r) + 3x)(4x(1+r) + 3xr)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

