



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!

~ 1

$$ab: (2^{15} \cdot 4^{11}) \Rightarrow ab = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot x_1; \quad bc: (2^{17} \cdot 4^{18}) \Rightarrow bc = 2^{17} \cdot 4^{18} \cdot x_2;$$

$$ac: (2^{23} \cdot 4^{39}) \Rightarrow ac = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot x_3, \quad (ab: 2^{15} \cdot 4^{11}) = x_1$$

$$\begin{cases} ab: (2^{15} \cdot 4^{11}) \\ ac: (2^{23} \cdot 4^{39}) \\ bc: (2^{17} \cdot 4^{18}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab: (2^{15} \cdot 4^{11}) = x_1 \\ ac: (2^{23} \cdot 4^{39}) = x_2 \\ bc: (2^{17} \cdot 4^{18}) = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot x_1 \\ ac = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot x_2 \\ bc = 2^{17} \cdot 4^{18} \cdot x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (abc)^2 = 2^{(15+23+17)} \cdot 4^{(11+39+18)} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad (x_1, x_2, x_3 - \text{обозначение}$$

четности при делении  $ab$  на  $2^{15} \cdot 4^{11}$ ,  $ac$  на  $2^{23} \cdot 4^{39}$  и  $bc$  на

$$2^{17} \cdot 4^{18} \text{ соответственно}) \Rightarrow (abc)^2 = 2^{55} \cdot 4^{69} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \Rightarrow abc =$$

$$= \sqrt{2^{55} \cdot 4^{69} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = 4^{39} \cdot 2^{27} \cdot \sqrt{2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}. \quad abc - \text{натуральное}$$

$$\text{число} \Rightarrow (abc)^2: (2^{55} \cdot 4^{69}) \cdot \text{П.к. } (abc)^2 - \text{квадрат н.ч.}$$

числа, степени всех простых множителей - четны  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (abc)^2: (2^{56} \cdot 4^{69}) \Rightarrow abc: (2^{28} \cdot 4^{39}) \text{ Тогда мин. } abc = 2^{28} \cdot 4^{39}.$$

$$\text{Пример: } a = 2^{11} \cdot 4^{11}, b = 2^5, c = 2^{12} \cdot 4^{18}$$

$$ab = 2^{16} \cdot 4^{11}, bc = 2^{17} \cdot 4^{18}, ac = 2^{23} \cdot 4^{39}, abc = 2^{28} \cdot 4^{39}$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{28} \cdot 4^{39}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МОФИ

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н.д.  
Пусть ~~дано~~ найдем такое  $m$ , что числитель и знаменатель дроби  $\frac{a+b}{a^2-4ab+b^2}$  можно сократить на  $m$ . Тогда

Тогда  $(a+b):m$  и  $(a^2+b^2-4ab):m$ :  $a^2+b^2-4ab = (a+b)^2 - 9ab$ .

$(a+b)^2 - 9ab : m$ ,  $(a+b)^2 : m \Rightarrow 9ab : m$ . Пусть  $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$

(разложим  $m$  на простые множители, где  $p_i$  - простой делитель  $m$ , а  $\alpha_i$  - степень вхождения  $p_i$  в  $m$ ). Пусть

найдем такое  $p_i$  ~~такое  $p_i$   $\leq p_i$~~ , что  $ab : p_i$ . П.к.

$\frac{a}{b}$  - несократима, ~~а  $b$  не делит  $a$~~   $\text{НОД}(a,b) = 1 \Rightarrow$  только

одно из чисел  $a$  и  $b$  делится на  $p_i$ ; (иначе  $\text{НОД}(a,b) \geq p_i$ ).

Пусть ~~то~~  $a : p_i$  ~~тогда~~, а  $b \not: p_i$  (без ограничения общности)

$\Rightarrow a+b \not: p_i$   $\Rightarrow a+b \not: m$  (т.к.  $p_i$  - простой множитель  $m$ ),

это противоречит ~~уже принятому~~ условию  $\Rightarrow$  не най

дем такого  $p_i$ , что  $ab : p_i \Rightarrow \text{НОД}(ab, m) = 1 \Rightarrow 9ab : m$ .

Тогда из  $9ab : m$  и  $\text{НОД}(ab, m) = 1 \Rightarrow 9 : m$ . Тогда  $m \leq 9$ .

~~возвращаясь к  $m=9$~~ . Проверим пример для  $m=9$ :  $a=1, b=8, \frac{a}{b} = \frac{1}{8}$

$\frac{a+b}{a^2+b^2-4ab} = \frac{1+8}{1+64-4 \cdot 1 \cdot 8} = \frac{9}{9} = 1$  ( $\frac{a}{b}$  - несократима,  $\frac{a+b}{a^2-4ab+b^2}$  сокращаем

на  $a$  на  $m$ ).

Ответ:  $m=9$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2+3x+1} > 1$$

$$3x^2+3x+1 > 1$$

$$3x^2+3x > 0$$

$$x^2+x > 0$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$$

Когда  $\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} > 1$  при любых допустимых  $x \Rightarrow \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$  не имеет решений.

Когда существует только 1 возможный корень:  $x = \frac{1}{9}$ , если он входит в область определения.

$$3x^2+3x+1 > 0 \rightarrow \sqrt{3x^2+3x+1}, 3x^2-6x+2 \geq 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}, D = 36 - 24 =$$

$$= 12 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$$

$$\frac{1}{9} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{9-3\sqrt{3}}{9} > \frac{9-8}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{9} \text{ входит}$$

в область определения.

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{9}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

№ 4.

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \quad | \cdot (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} > 0 \text{ на всей области определения,}$$

$$\text{т.к. } \sqrt{3x^2-6x+2} \geq 0, \text{ а } \sqrt{3x^2+3x+1} > 0 \text{ (т.к. } D = 9 - 4 \cdot 3 = -3) \Rightarrow$$

$$= \sqrt{3x^2+3x+1} > 0. \text{ Область определения } \sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} \text{ и}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} \text{ совпадает.}$$

$$(\sqrt{3x^2-6x+2})^2 - (\sqrt{3x^2+3x+1})^2 = (-9x) (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = (-9x) (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}) \quad | \cdot (\sqrt{3x^2-6x+2})$$

я раскрыли как  $3x^2-6x+2$ , тогда потому что область опреде-

ления знаменателя уравнения совпадает с областью, на кото-

рой  $3x^2-6x+2$  имеет <sup>неотрицательное</sup> значение совпадают, и

точки, в которой  $3x^2-6x+2$  принимает отрицательные значения не рассматриваются.

$$(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 1-9x=0 \\ \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} > 1 \text{ при } x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$$

$$3x^2-6x+2 > 1$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 24 \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{6-\sqrt{24}}{6} \\ x > \frac{6+\sqrt{24}}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x > 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что <sup>только</sup> при  $0 \leq z \leq 32$  ~~то~~ прямая пересечет  
параллелограмм <sup>большее количество точек только эти z</sup>. Заметим, что если  $z$  - четное, то прямая  
 $z = 2x + y$ . Будет иметь ровно 13 точек с целыми координатами в параллелограмме (9 внутренних точек), т.к. в таком  
случае  $y$  должно быть четным (чтобы  $x$  было целым),  
а четность  $y$ .  $0 \leq y \leq 26$  ровно 13. Аналогично при  $z$  - четном,  
 $y$  - четное  $\Rightarrow$  максимум точек 14. Тогда между прямой парой  
 $z$  и  $z+14$  <sup>и  $z+14 = 2x+y$</sup>  13<sup>2</sup> пар если  $z$  - чет., и 14<sup>2</sup> если  $z$  - чет. Если расс-  
смотрим пары прямых  $z = 2x + y$  при  $0 \leq z \leq 18$ , то мы расс-  
смотрим все пары прямых  $\Rightarrow$  все пары внутренних точек.  
Тогда общее кол-во пар  $k = 10 \cdot 14^2 + 9 \cdot 13^2 = 16960 + (1690 - 169) =$   
 $= 1960 + 1521 = \underline{3481}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

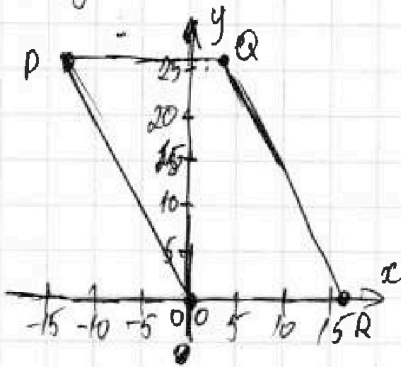
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



25

Пусть  $2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 14$

Пусть  $2x_1 + y_1 = z$ . Тогда  $2x_2 + y_2 = 14 + z$



Найдем уравнение прямой PQ:

Пусть оно  $ax + y = b$

~~$a \cdot (-13) + 26 = b$~~

$$\begin{cases} a \cdot (-13) + 26 = b \\ a \cdot 0 + 0 = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a \cdot (-13) + 26 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Тогда  $2x + y = 0$  - уравнение прямой PQ.

Уравнение прямой QR  $ax + y = b$ :

$$\begin{cases} 30a + 26 = b \\ 16a + 0 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13a = 26 = 0 \\ 16a + 0 = b \end{cases} \begin{cases} a = 2 \\ b = 32 \end{cases} \Rightarrow QR: 2x + y = 32.$$

PQ:  $y = 26$ , OR:  $y = 0$ . Тогда все точки в параллелограмме удовлетворяют условию:  $\begin{cases} 0 \leq 2x + y \leq 32 \\ 0 \leq y \leq 26. \end{cases}$

Возьмем <sup>прямые</sup>  $Z_1 = 2x + y$  и  $Z_2 = 2x + y$  <sup>так</sup>. Тогда любая <sup>точка</sup> ~~точка~~ <sup>из</sup> ~~этой~~ <sup>этой</sup> ~~прямой~~ <sup>прямой</sup> ~~удовлетворяет~~ <sup>удовлетворяет</sup> ~~условию~~ <sup>условию</sup> ~~параллелограмма~~ <sup>параллелограмма</sup> ~~и~~ <sup>и</sup> ~~находится~~ <sup>находится</sup> ~~внутри~~ <sup>внутри</sup> ~~параллелограмма~~ <sup>и</sup> ~~такая же~~ <sup>такая же</sup> ~~точка~~ <sup>точка</sup> ~~на~~ <sup>на</sup> ~~прямой~~ <sup>прямой</sup>  $Z + 14 = 2x + y$  ~~(удовлетворяющая тем же условиям)~~ <sup>(удовлетворяющая тем же условиям)</sup> является ~~и~~ <sup>и</sup> ~~искомой~~ <sup>искомой</sup> ~~парой~~ <sup>парой</sup>.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

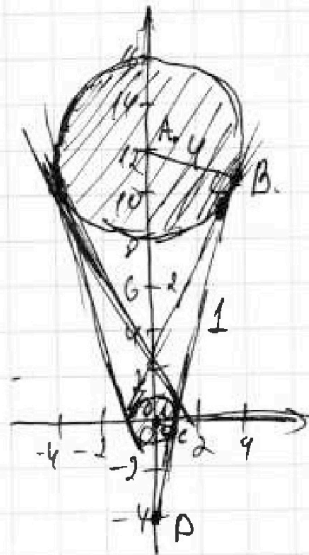
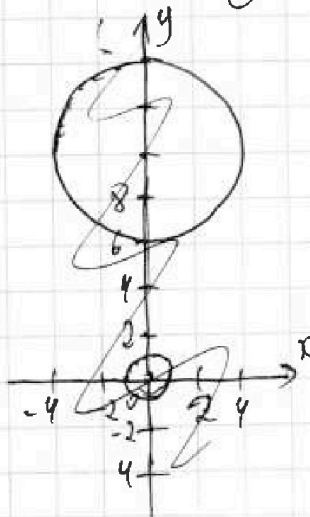
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что  $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 12) - 16 \leq 0$  только если один из множителей  $\geq 0$ , а второй  $\leq 0$ .



П.к. оба графика  
обойх множителей - круги  
- окружности, то множе-  
ство всех решений  
этого неравенства  
все точки внутри каж-  
дого круга (т.к. круги не пересе-

каются, <sup>точка</sup> внутри круга делает значение одно из множи-  
телей положительным, а второго - отрицательным.

П.к.  $ax + y - 8b = 0$  - прямая, то система имеет  
всего два решения, то эта прямая касательная к <sup>одной</sup>  
окружности (имеет <sup>одну</sup> точку касания) либо не <sup>имет</sup> <sup>никаких</sup> точек с  
кругами, либо касается одной окружности (1 решение), либо  
пересекает хотя бы одну окружность (бесконечное кол-во  
решений). По условию нужно найти  $a$  всех прямых,  
касательных <sup>одной</sup> окружности. Возьмем <sup>точку</sup>  $A(-4, -4)$   
уже только одна П.к.  $AB = 0, A \in \text{окр}$  Тогда  $a = 4, -4$



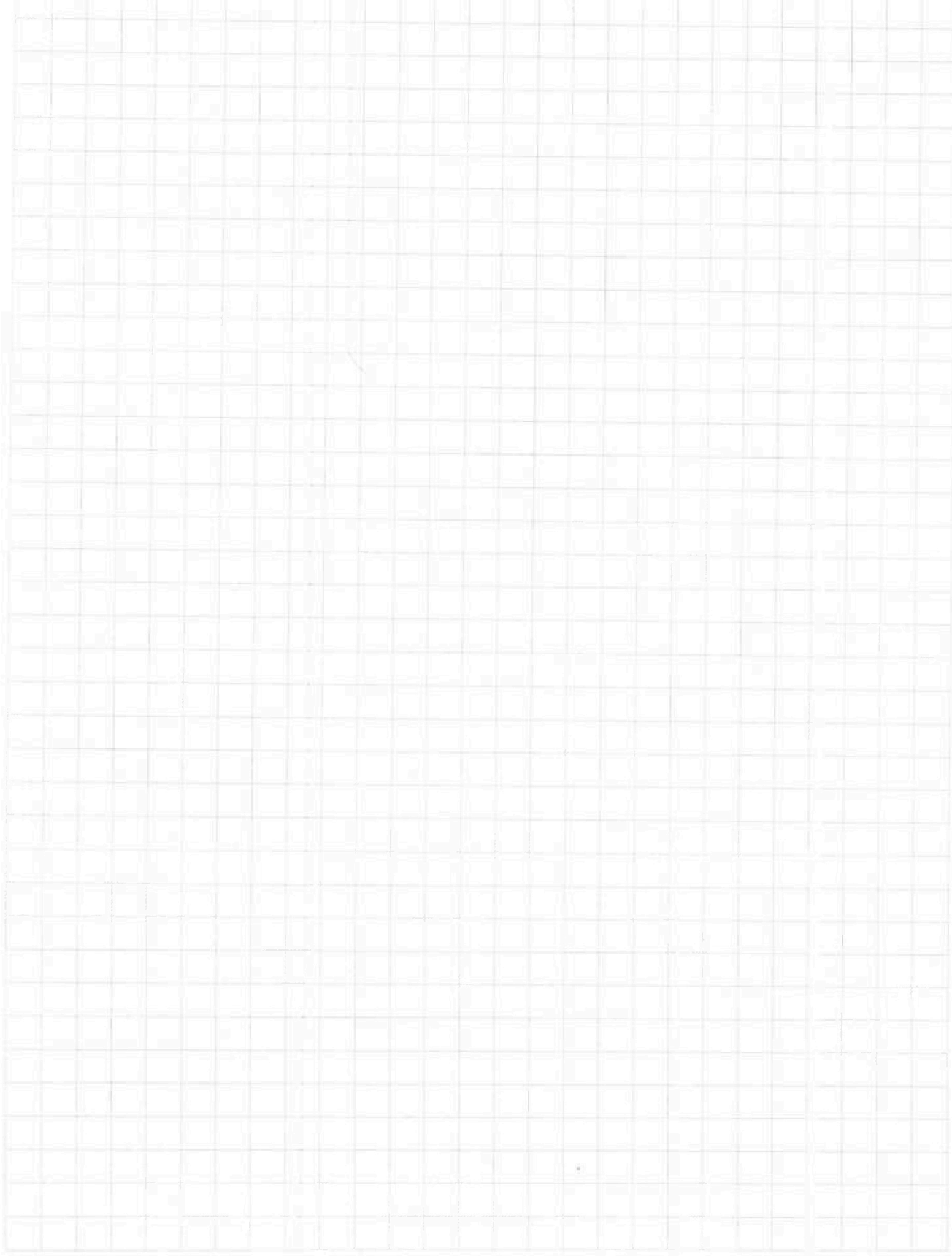
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

МОТИ

- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!

$$4(120^2 + 221^2) = 4(120^2 - 2 \cdot 120 \cdot 221 + 221^2) + 8 \cdot 120 \cdot 221 = 4(221 - 120)^2 +$$

$$\begin{array}{r} \times 221 \\ 120 \\ \hline 442 \\ 2210 \\ \hline 26520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 221 \\ 12 \\ \hline 221 \\ 2412 \\ \hline 26520 \\ + 53040 \\ 10201 \\ \hline 63241 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 251 \\ 251 \\ \hline 1255 \\ 502 \\ \hline 63001 \end{array}$$

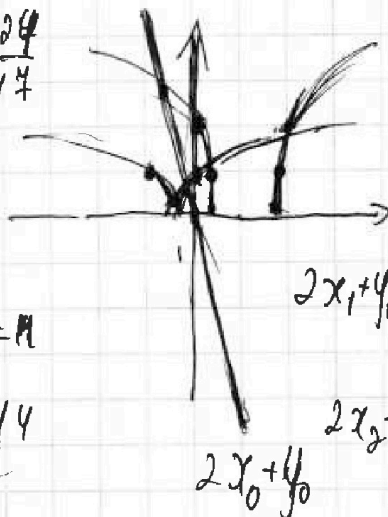
$$8 \cdot 26520 \sqrt{14^2} \sqrt{14}$$

$$D = 4 \cdot (2514 \cdot 240) + 588$$

$$a^2 = \frac{252514240 - 588}{281}$$

BA AB = 24a = 24 \cdot \frac{24}{14}

10 \cdot 14 \cdot 14 + 13 \cdot 13 \cdot 9



$$(x+1) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x} = 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 12 = -3$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$2x_1 + y_1 = 2$$

$$2x_2 + y_2 = 24x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$$

$$2x_2 + y_2 = (2x_1 + y_1) = 14$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$$

$$3 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 6 - 2\sqrt{3}$$

$$+ 2 = 8 + 1 + 2\sqrt{3} -$$

$$2a + b = 14 = 2x_1 + y_1$$

$$y_1 = -2x_1 + 2a + b - 14$$

$$0 = 1 \cdot 16 + b$$

$$26 = a \cdot 3 + b$$

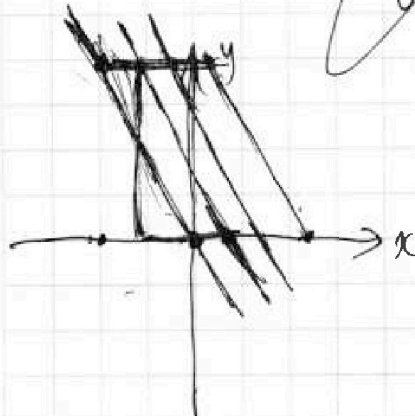
$$26 = -13a \Rightarrow a = -2$$

$$y = -2a^2 + 82$$

$$0 \leq y \leq 16$$

$$-2x \leq y \leq -2x + 32$$

$$0 \leq y + 2x \leq 32 \quad 0 \leq y \leq 16$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(x^2 + y^2 - 1) / (x^2 + y^2 - 24y + 144) = 1/3$

$36 - 12 = 24$   
 $x = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\alpha = -4, -4$   
 $-ax = y + 4$   
 $-a = \frac{y+4}{x}$   
 $c = y_0 + ax_0 \quad -a = 4$   
 $\alpha x + y = -4$   
 $\alpha x + y = c$   
 $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$   
 $\frac{4 - 12}{5 - 4} = \frac{y_2 + 4}{x_2}$   
 $y_1 = ctg\alpha \cdot |x_1| \quad y_2 = ctg\alpha \cdot |x_2|$   
 $\frac{4 - 12}{5 \cdot 4} = \frac{12}{5} - \frac{12}{5}$

$ax + y = b$   
 $-13a + 26 = b \Rightarrow -13a + 26 = 0$   
 $a = 2$   
 $0 = b$   
 $-2a + y = 0$   
 $2x + y = 9b$   
 $2x + y = 32$   
 $0 \leq 2x + y \leq 32$   
 $0 \leq y \leq 26$

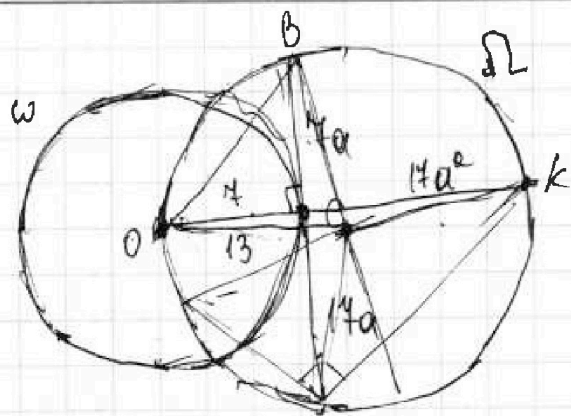
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

ЛМОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 14$$

$$a - b = 11$$

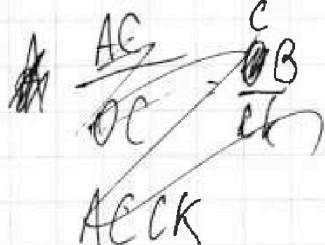
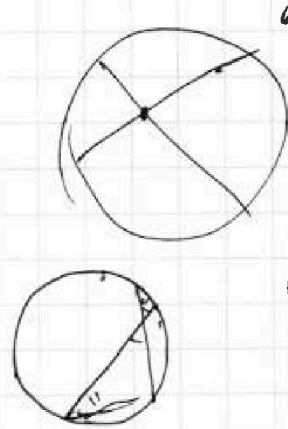
$$b = 0, a = 11, c = 18$$

$$a + b \geq 15 \Rightarrow a = 11,$$

$$a - b = 6 \Rightarrow b = 5,$$

$$c = 12.$$

$$240 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$$



$$\frac{OC}{CA} = \frac{BC}{CK}$$

$$OC \cdot CK = AC \cdot BC.$$

$$14 \cdot 4a^2 = 4 \cdot CK \Rightarrow CK = 14a^2$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 14 \\ \hline 91 \\ 13 \\ \hline 221 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 221 \\ 221 \\ \hline 442 \\ 442 \\ \hline 48841 \end{array}$$

$$13^2 = \sqrt{14^2 a^2 + 14^2 a^4 + 4^2 + 4^2 a^2}$$

$$14^2 x^2 + (14^2 + 4^2)x + 4^2 - 13^2 = 0. \quad D = 14^4 + 2 \cdot 14^2 \cdot 4^2 + 4^4 - 4 \cdot 14^2 \cdot 4^2$$

$$+ 13^2 \cdot 14^2 \cdot 4 = (4^2 - 14^2)^2 + 4 \cdot 13^2 \cdot 14^2 = 240^2 + 2^2 \cdot 13^2 \cdot 14^2 = 47100$$

$$a^2 = \frac{14^2 - 4^2 \pm \sqrt{D}}{14^2}$$

$$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1)$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 12 \\ \hline 14400 \\ + 48841 \\ \hline 63241 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 321 \\ 321 \\ \hline 321 \\ 642 \\ 963 \\ \hline 103041 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54600 \\ + 48841 \\ \hline 106441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 331 \\ 331 \\ \hline 331 \\ 662 \\ 993 \\ \hline 109861 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ \hline 48 \\ 48 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ 28 \\ \hline 56 \\ 56 \\ \hline 112 \\ 56 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ \hline 48 \\ 48 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 429 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 331 \\ 331 \\ \hline 331 \\ 662 \\ 993 \\ \hline 109861 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 329 \\ 329 \\ \hline 329 \\ 658 \\ 987 \\ \hline 108241 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 251 \\ \times 251 \\ \hline 251 \\ 1255 \\ \hline 502 \\ \hline 62751 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 329 \\ 329 \\ \hline 329 \\ 658 \\ 987 \\ \hline 108241 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 + 3x - 1 = -9x + 1$$

$$1 - 9x = (1 - 9x) \left( \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right)$$

$$(1 - 9x) \left( \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 \right) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - 9x = 0 \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \end{cases} \quad x = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1 - 18 + 54}{24} =$$

$$= \frac{37}{24}$$

$$\frac{1 + 9 + 24}{24} = \frac{34}{24}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \quad D = 36 - 24 = 12$$

$$3t^2 - 6t + 3 - 6t + 6 + 2 = 3t^2 - 12t + 11$$

$$3t^2 - 6t + 3 - 6t + 6 + 2 = 3t^2 - 12t + 11$$

$$3t^2 + 6t + 3 + 3t + 3 + 1 = 3t^2 + 9t + 7$$

$$3t^2 - 6t + 3 + 3t - 3 + 1 = 3t^2 - 3t + 1$$

$$3(t^2 + 3t + 3) = 3(t^2 - 3t + 1)$$

$$ab: p, p;$$

$$a: p, p;$$

$$m: p, p;$$

$$ab: p, p;$$

$$a: p, p;$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} =$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$a+b: m$$

$$(a+b)^2 - 9ab: m$$

$$9ab: m$$

$$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{(a+b)^2 - 9ab} = 1 \Rightarrow 1 + \frac{9ab}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{5+4}{25+16-4 \cdot 2}$$

$$a+b: p, p; \quad (a, b) = 1$$

$$\frac{1+8}{1+64-4 \cdot 8} = \frac{9}{65-32} = \frac{9}{33} = \frac{3}{11}$$