



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть  $k, m$  и  $n$  — такие натуральные числа, что

$$ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\left. \begin{array}{l} ac: 2^{23} \\ bc: 2^{17} \\ ab: 2^{15} \end{array} \right\} \Rightarrow abc: 2^{23} \quad \left. \begin{array}{l} ac: 7^{39} \\ ab: 7^{11} \\ bc: 7^{18} \end{array} \right\} \Rightarrow abc: 7^{39}$$

Пусть  $r, s$  и  $t$  — такие натуральные числа, что

$$abc = r \cdot 2^s \cdot 7^t \quad \text{Тогда } s \geq 23, \quad t \geq 39$$

$$3) \quad ab \cdot bc \cdot ac = kmn \cdot 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+39} = kmn \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc = \sqrt{kmn \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}} = 2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{2kmn}$$

$$abc \in \mathbb{N} \Rightarrow 2kmn \text{ — точный квадрат} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kmn \geq 2 \quad \text{Так как нам нужно найти}$$

$$abc, \text{ а } abc \text{ — не простое. Тогда } abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$4) \text{ Получается } s \geq 28, \quad t \geq 34 \quad \sqrt{\frac{kmn}{2}}$$

Вместе с уже имеющимися условиями  $s \geq 28, t \geq 39,$

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \quad n \geq 1$$

$$5) \text{ Пример. Пусть } a = 2^{11} \cdot 7^{21}, \quad b = 2^4, \quad c = 2^{13} \cdot 7^{18}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}, \quad ab = 2^{15} \cdot 7^{21} \cdot (15 \cdot 7^{11}), \quad bc = 2^{17} \cdot 7^{38} \cdot (2^{17} \cdot 7^{18})$$

$$ac = 2^{24} \cdot 7^{39} \cdot (2^{23} \cdot 7^{39})$$

$$\text{Ответ. } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~1)  $\frac{a}{b}$  - несократима~~  $\Rightarrow$  1) Пусть  $a+b = k \cdot m$

$$2) \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+4ab+b^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

3) Дробь можно сократить на  $m$ .

$$\frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{(a+b)^2-9ab}{m}} = \frac{k}{k^2m-9ab} \Rightarrow 9ab : m$$

4) Если  $a : m$  или  $b : m$ , то так как  $(a+b) : m$ , то и второе число  $: m$ , но дробь  $\frac{a}{b}$  - несократима  $\Rightarrow a \not: m$  и  $b \not: m$

$$\text{Но } 9ab : m \Rightarrow 9 : m \Rightarrow m \leq 9$$

5) Максимум  $m = 9$ . Пример

~~$$a=5, b=4 : \frac{5+4}{25-7 \cdot 5 \cdot 4+16} = \frac{9}{41}$$~~

$$a=1, b=8 : \frac{1+8}{64-56+1} = \frac{9}{9} = 1$$

Ответ: при  $m = 9$ .



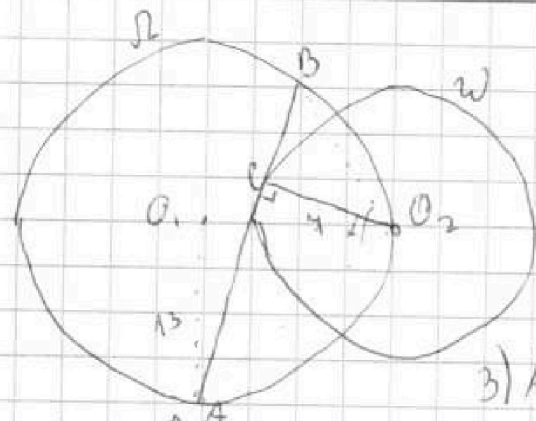
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть  $O_1$  - центр  $\Omega$ ,  $O_2$  - центр  $\Omega_2$ .  
 $a < BO_2$ ,  $A = A$ ,  $AO_2 = 17x$ ,  $AB = 4x$

2)  $\triangle AO_2B$  - вписан в  $\Omega \Rightarrow$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2 \cdot 13 \Rightarrow 4x = 26 \cdot \sin \alpha$$

$$S_{AO_2B} = \frac{BO_2 \cdot AO_2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 13 \cdot \sin \alpha}{2} = 4 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \sin \alpha$$

3)  $AB$  - касат.  $\Rightarrow O_2C \perp AB \Rightarrow S_{AO_2B} = \frac{1}{2} AB \cdot OC$

$$4) \frac{AO_2 \cdot BO_2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{1}{2} AB \cdot 4 \Rightarrow AO_2 \cdot BO_2 = \frac{4 \cdot x \cdot 13}{x} = 13 \cdot 14$$

5) По т. косинусов в  $\triangle AO_2B$ . 5) По т. Пифагора в  $\triangle BO_2C$ :  $BO_2 = \sqrt{(4x)^2 + 4^2}$ .  $\triangle ACO_2$ :  $AO_2 = \sqrt{(4x)^2 + 7^2}$

6) По т. косинусов в  $\triangle BO_2A$ .

$$(14x)^2 = (17x)^2 + 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 17x \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$546x^2 = 289x^2 + 49 + 49 - 136x \cos \alpha$$

$$78 = 138x^2 = 136x \cos \alpha \Rightarrow 49 - 69x^2 = 182 \cos \alpha$$

$$x = \frac{13}{12} \sin \alpha \quad (u_3 \text{ н. 2}) \Rightarrow x^2 = \frac{169}{144} \sin^2 \alpha = \frac{169}{144} - \frac{169}{144} \cos^2 \alpha$$

$$49 - 69 \cdot \frac{169}{144} + 69 \cdot \frac{169}{144} \cos^2 \alpha = 182 \cos \alpha$$

$$284x^2 = 49x^2 + 2 \cdot 4^2 - 26 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$41x^2 = 7x^2 + 14 - 52 \cos \alpha$$

$$34x^2 + 52 \cos \alpha - 14 = 0 \Leftrightarrow 17x^2 + 26 \cos \alpha - 7 = 0$$

$$x^2 = \frac{189}{144} \sin^2 \alpha \quad (u_3 \text{ н. 2}) = \frac{169}{144} - \frac{169}{144} \cos^2 \alpha$$

$$17 \cdot \frac{169}{144} (1 - \cos^2 \alpha) + 26 \cos \alpha - 7 = 0$$

$$u_3 \text{ н. 2: } \sin \alpha = \frac{12}{13} x \Rightarrow \cos^2 \alpha = \left(\frac{5}{13} x\right)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a) Пусть  $\cos \alpha = \frac{5}{13}x$ .

$$17x^2 + 10x - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 < 0 - \text{не подходит} \\ x = \frac{7}{17} \end{cases}$$

b) Пусть  $\cos \alpha = -\frac{5}{13}x$ .

$$17x^2 - 10x - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{7}{17} < 0 - \text{не подходит} \end{cases}$$

$$13 > 7 \Rightarrow \overset{\text{минимум}}{AB} > 180^\circ \Rightarrow \angle AOB > 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0$$

$$x = 1 \Rightarrow AB = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (1 - 2x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad \begin{matrix} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{matrix}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (1 - 2x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 + \downarrow \text{переход к следствию!!!}$$
$$- 2x + 1 - (1 - 2x)^2 = 2\sqrt{(1 - 2x)^2(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$-(1 - 2x)(1 - 2x - 1) = 2\sqrt{(1 - 2x)^2(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$2x(1 - 2x) = 2\sqrt{(1 - 2x)^2(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$81x^2(1 - 2x)^2 = 4(1 - 2x)^2(3x^2 + 3x + 1) \quad \downarrow \text{переход к следствию!!!}$$

$$1 - 2x = 0$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$\Leftrightarrow$

$$1 = 2x$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 69 =$$

$$= 16(69 + 9) = 16 \cdot 78$$

~~Проверка так как были переходы~~

$$x = \frac{1}{9}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

Проверка (так и как были переходы к следствию и не проверки условия на существование корней)

$$1) x = \frac{1}{9}: \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{9} = 0$$

$$\sqrt{\frac{3}{81} - \frac{54}{81} + \frac{162}{81}} = \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{27}{81} + \frac{81}{81}} = \sqrt{\frac{111}{81}} = \sqrt{\frac{111}{81}} = 0 \checkmark$$

$$2) x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\sqrt{3 \left( \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \right)^2 - 6 \left( \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \right) + 2} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x = \frac{6 + 2\sqrt{48}}{69}$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > x \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} < x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} \\ x = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} > \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6} < 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{48}}{69}}$$

$$69 + 23\sqrt{3} \sqrt{6 + 2\sqrt{48}}$$

$$63 + 23\sqrt{3} \sqrt{2\sqrt{48}}$$

$$63 + 23\sqrt{3} > 18 \geq 2 \cdot \sqrt{81} > 2\sqrt{48}$$

Не существует  $\frac{3}{2}$  корня  $\Rightarrow x \neq \frac{6 + 2\sqrt{48}}{69}$

3)  $x = \frac{6 - 2\sqrt{48}}{69}$  Чтобы вместо следствий были равносильные переходы должно выполняться

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad (D = 9 - 12 < 0) \\ (1-x) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x^2 + 1} \geq 0 \\ 2x(1-x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > x \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} < x \quad (1) \\ 1 - 9x \geq 0 \quad (2) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 1 - 18x + 81x^2 \\ 2x \geq \frac{1}{9} \quad (3) \\ 2x \leq 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$(1) 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{48}}{69}}$$

$$69 - 23\sqrt{3} \sqrt{6 - 2\sqrt{48}}$$

$$63 + 2\sqrt{48} > 63 + 2 \cdot 2\sqrt{3} > 23\sqrt{2} > 23\sqrt{3} \Rightarrow (1) \text{ верно}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~(1)  $20x^2 - 21x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 20x^2 - 420 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 21$~~

(2)  $1 - 9x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{9}$

$\frac{6 - 2\sqrt{48}}{69} < 0 \leq \frac{1}{9} \Rightarrow$  (2) - верно

(3)  $\frac{6 - 2\sqrt{48}}{69} < 0$  - верно

$x = \frac{6 + 2\sqrt{48}}{69}$  - является корнем

Ответ:  $x = \frac{1}{9}$  или  $x = \frac{6 + 2\sqrt{48}}{69}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

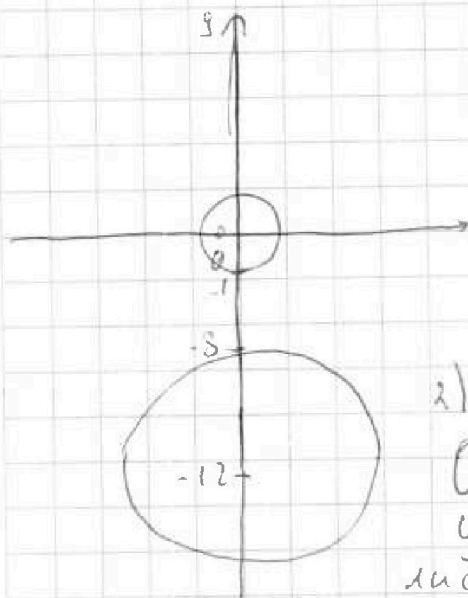
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Рассмотрим  $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 1$  - график окружности  
с центром  $(0; 0)$  и  $R = 1$   
 $x^2 + (y - 12)^2 = 16$  - график окружности  
с центром  $(0; 12)$  и  $R = 4$



Решениями не равенства  
являются точки, лежащие внут-  
ри одной окружности и вне  
второй а так как окруж-  
ности не пересекаются, то  
просто точки внутри окруж-  
ностей (или ка или)

2)  $y = 8b - ax$  - уравнение прямой.

С каждой из окружностей  
у нее  
либо 0 пересечений  $\Rightarrow 0$  решений  
либо 1 пересечение  $\Rightarrow 1$  решение  
либо 2 пересечения  $\Rightarrow$  бесконечно мно-  
го решений

3) Нулю 2 решения  $\Rightarrow y = 8b - ax$  - касательная  
к обеим окруж-  
ностям

4)  $y = 8b - ax$  - касат к  $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 1$  решение у

$$\begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (8b - ax)^2 = 1 - \text{решение}$$

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 = 1$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = 256a^2b^2 - 4 \cdot (64b^2 \cdot (a^2 + 1)) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$256a^2b^2 - 256a^2b^2 - 256b^2 \stackrel{+14a^2+4}{=} 0 \Rightarrow \cancel{256a^2} + 1 = 64b^2$$

5)  $y = 8b - ax$  - касат. к  $x^2 + (y-12)^2 = 16 \Rightarrow 1$  решение

$$\begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2 + (y-12)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (8b - ax - 12)^2 = 16 \quad - 1 \text{ решение}$$

$$x^2 + 64b^2 - 86ax - 96b - 86ax + a^2x^2 + 12ax - 96b + 12ax + 144 = 16$$

$$(a^2+1)x^2 + x(24a - 16ab) - 192b + 128 = 0$$

$$D = (24a - 16ab)^2 + 4(a^2+1)(192b - 128) = 0$$

$$576a^2 + 256a^2b^2 - 384a^2b + 4(192a^2b - 128a^2 - 128b - 128) = 0$$

$$576a^2 + 256a^2b^2 - 384a^2b + 768a^2b - 512a^2 + 768b - 768 = 0$$

$$64a^2 - 256a^2b^2 + 384a^2b + 768b - 768 = 0$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$404a^2(b^2 + b + 1) + 768b - 768 = 0$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$404(a^2 + 1) \cdot 64b^2 - 404b \cdot 404 + 768b - 768 = 0$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$404 \cdot 64b^2 - 404b^2 + 64b - 1472 = 0$$

$$404 \cdot 63b^2 + 64b - 1472 = 0$$

$$D = 64^2 + 4 \cdot 1472 \cdot 404 \cdot 63 = 4(32^2 + 1472 \cdot 404 \cdot 63) =$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{192} \\ 768 \\ \hline 160 \\ 384 \\ \hline 384 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 404 \cdot 4 \\ 1616 \\ \hline 30 \\ \hline 28 \\ \hline 34 \\ \hline 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} &= 16(16^2 + 176 \cdot 63 \cdot 1472) = 32 \sqrt{64(8^2 + 44 \cdot 63 \cdot 1472)} = \\ &= \cancel{16}^2 (4^2 + 11 \cdot 63 \cdot 1472) = 3 \cdot 2^2 (2^2 + 11 \cdot 63 \cdot 368) = \\ &= 64^2 (1 + 693 \cdot 92) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{693} \\ 92 \\ \hline 1386 \\ 6234 \\ \hline 64756 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64754 = 25 \\ -4 \\ \hline 45244 \\ 5225 \\ \hline 50 \cdot 72254 \end{array}$$

$$b = \frac{-64 \pm 64 \sqrt{64754}}{2 \cdot 40463}$$

$$a = \pm \sqrt{\left( \frac{-64 \pm 64 \sqrt{64754}}{2 \cdot 40463} \right)^2 - 1}$$

$$\text{Ответ при } a = \pm \sqrt{\left( \frac{-64 \pm 64 \sqrt{64754}}{2 \cdot 40463} \right)^2 - 1}$$

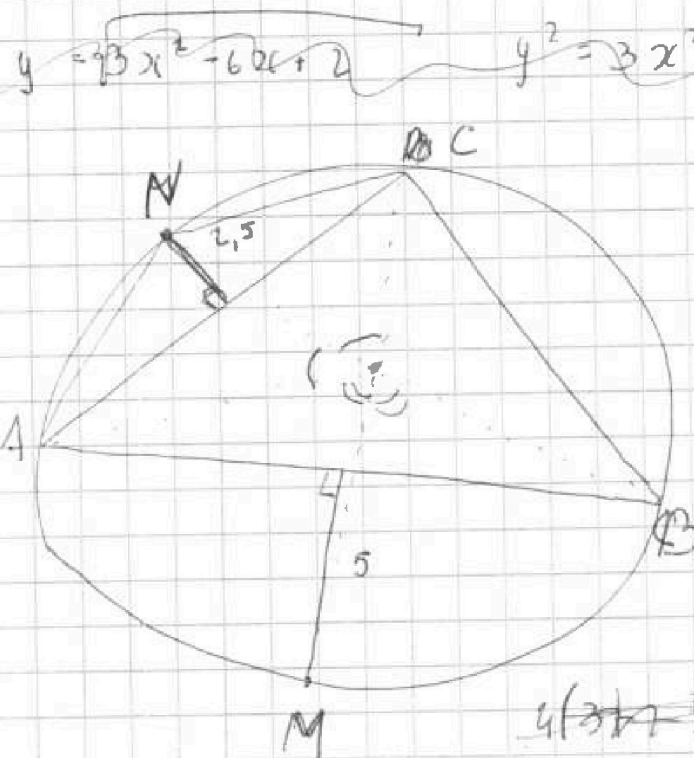
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 81 \\ -12 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$-\frac{1}{3} \quad x = \frac{1}{9}$$

$$-\frac{1}{24} \quad \begin{array}{r} 52 \\ 17 \\ \hline 38 \\ 17 \end{array}$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$$4(3x + \frac{1}{3} + 1) + 8 = \frac{69 \cdot 4}{81} + \frac{24}{9} + 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 > 0$$

$$D = 36 - 24 = 8$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 - 7(1 - 9x)(3x^2 + 3x + 1)$$

$$2\sqrt{(1 - 9x)(3x^2 + 3x + 1)} = (1 - 9x)^2 + 9x - 1 \quad (69 - 23\sqrt{2} < 6 - 2\sqrt{15})$$

$$2\sqrt{(1 - 9x)(3x^2 + 3x + 1)} = (9x - 1)(9x - 9x) \quad (3 + 2\sqrt{15} > 2\sqrt{2})$$

$$4(1 - 9x)(3x^2 + 3x + 1) = 81x^2(1 - 9x)^2(1 - 9x)$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2 - 429x^3$$

$$429x^3 - 81x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$\frac{36 \cdot 3\sqrt{3}}{3} + 3^4\sqrt{3} + \frac{54}{111} \quad \sqrt{81} \quad \frac{81}{24}$$

$$26 - \frac{2}{3} + 12 = 1\frac{1}{3} = 1 \quad 1 - \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{6 - 2\sqrt{15}}{69} \quad 6x - 3x \quad -6x + 1 - 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \sqrt{69} \\ \sqrt{69} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 348 \\ \times 3 \\ \hline 1044 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{69} \\ \sqrt{69} \\ \hline 414 \\ \times 3 \\ \hline 1242 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{48} \\ \sqrt{48} \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{69} \\ \sqrt{69} \\ \hline 414 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{48} \\ \sqrt{48} \\ \hline 2484 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{4761} \\ \sqrt{4761} \\ \hline 21572 \end{array}$$

$$\frac{1}{69} \sqrt{3(36 + 312 - 24\sqrt{48})} - 414(6 - 2\sqrt{48}) + 9522$$

$$\frac{1}{69} \sqrt{1044 - 42\sqrt{48}} - 2484 + 328\sqrt{48} + 9572$$

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{6 + 2\sqrt{18}}{69}$$

$$69 + 23\sqrt{2} > 6 + 2\sqrt{48}$$

$$63 + 23\sqrt{2} > 2\sqrt{48}$$

1

8

$$1 - \frac{6 - 2\sqrt{48}}{69} > 0$$

$$69 -$$

$$69 - 23\sqrt{3} \sqrt{6 - 2\sqrt{48}}$$

$$63 - 23\sqrt{3} \sqrt{2\sqrt{48}}$$

$$69 \sqrt{6 - 2\sqrt{48}}$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{6 - 2\sqrt{48}}$$

$$1 + 3$$

$$63 + 2\sqrt{48} \sqrt{23\sqrt{3}}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \sqrt{109} \\ 67 \times 14 \\ \hline 114 \\ 14 \\ \hline 119 \\ + 14 \\ \hline 250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{169} \\ 69 \\ \hline 1521 \\ 1014 \\ \hline 19661 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{144} \\ 42 \\ \hline 1396 \\ 546 \\ \hline 7156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{182} \\ 144 \\ \hline 728 \\ 1428 \\ \hline 182 \\ \hline 26208 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{24} \\ 24 \\ \hline 24 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{11661} \\ 10 \\ 7156 \\ \hline 4505 \\ 10 \\ 41 \\ - 4 \\ \hline 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{576} \\ 10 \\ 289 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$4156 - 11661 + 11661 \cdot \cos^2 \alpha = 26208 \cdot \cos \alpha \quad \begin{array}{r} 2543 \\ 1005 \\ \hline 2565 \end{array}$$

$$11661 \cos^2 \alpha - 26208 \cdot \cos \alpha + 4505 = 0 \quad \begin{array}{r} 2543 \\ 1005 \\ \hline 2565 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{169} \\ 14 \\ \hline 1183 \\ + 169 \\ \hline 2873 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1865 \mid 5 \\ \hline 75 \quad 313 \quad 26 \\ 36 \quad 4 \\ \hline \times 144 \\ 4 \\ \hline 1008 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{144} \\ 26 \\ \hline 864 \\ 288 \\ \hline 3444 \end{array}$$

$$2543 - 2543 \cos^2 \alpha + 3444 \cos \alpha - 1005 = 0$$

$$-1873 \cos^2 \alpha + 3444 \cos \alpha + 1865 = 0$$

$$D = 144^2 \cdot 12^4 \cdot 26^2 - 4 \cdot 169 \cdot 14$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{13} x$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{13} x$$

$$y = kx + b$$

$$\cos \alpha = -\frac{5}{13} x$$

$$2x_2 + (kx_2 + b) - (x_1 + kx_1 + b)$$

$$(x_2 - x_1)(k + 2) = 14$$

$$x_2(k + 2) + b - (x_1)(k + 2) \rightarrow b = 14$$

$$14 = (k + 2)$$

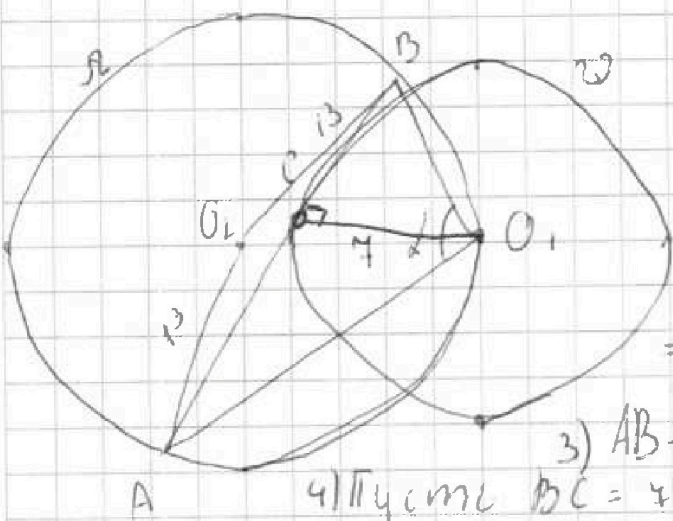
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть  $O_1$  - центр  $\omega$ ;  
 $O_2$  - центр  $\Omega$

2) Пусть  $\angle BO_1A = \lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow \widehat{BA} = 2\lambda \Rightarrow \widehat{BO_1A} = 360^\circ - 2\lambda$$

$$\Rightarrow \angle AO_1B = 360^\circ - 2\lambda$$

3)  $AB$  - касат  $\Rightarrow O_1C \perp AB$

4) Пусть  $BC = 4x \Rightarrow AC = 14x$

5) По т. косинусов в  $\triangle BO_2A$   $(24x)^2 = 169 + 169 - 2 \cdot 13^2 \cdot$

5)  $O_1C \perp AB \Rightarrow BO_1 = \sqrt{(4x)^2 + 4^2}$ ;  $AO_1 = \sqrt{(14x)^2 + 4^2}$   
(по т. Пифагора в  $\triangle BO_1C$  и  $\triangle AOC$ )

6) По т. косинусов в  $\triangle BO_1A$ :

$$(24x)^2 = 49x^2 + 49 + 787x^2 + 49 - 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{(y^2 + 1)(1 + x^2 + 49)} \cdot \cos \lambda$$

7) По т. синусов в  $\triangle BO_1A$ :  $26 = \frac{26}{\sin \lambda}$

8) Возвращаясь

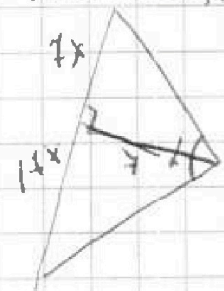
$$24x = \frac{26}{\sin \lambda}$$

$$y = sb - ax$$

$$y^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y - 11)^2 = 16$$

$$y^2 + 64b^2 - 16abx + ax^2 = 1$$

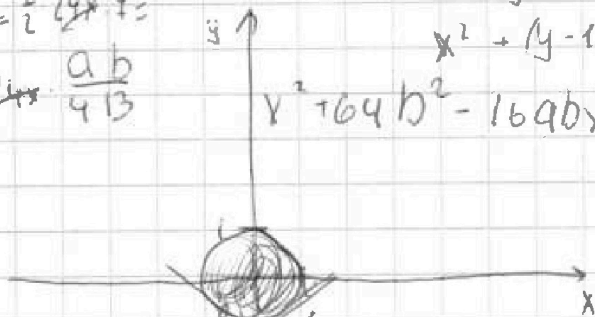


$$S = \frac{1}{2} \cdot 24x \cdot 7 = 84x$$

$$= 24x \cdot \frac{ab}{4B}$$

1 рш  $\frac{26}{364}$

1 рш



$$\begin{array}{r} +289 \\ 49 \\ \hline 10 \quad 338 \\ -576 \\ \hline 138 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 12 > 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

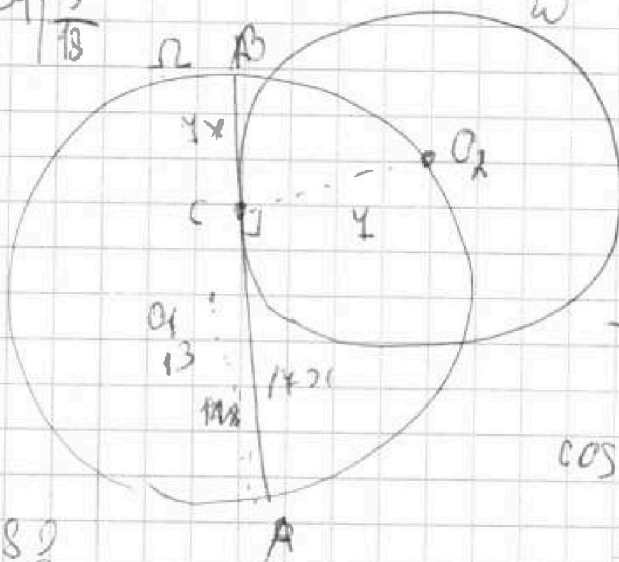
$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1 - 18x + 8x^2$$

$$-45x^2 + 15x + 3 = 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$45^2 x^4 - 2 \cdot 45 \cdot 15x - 2 \cdot 3 \cdot 45x^2 + 15^2 x^2$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ + 24 \\ \hline 48 \\ \hline 546 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \overline{) 3} \\ \underline{18} \phantom{0} \\ 18 \phantom{0} \\ \underline{18} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$



$$24^2 x^2 = 2169 + 2 \cdot 162 \cdot \cos \alpha$$

$$24^2 x^2 = 49x^2 + 49 -$$

$$+ 49x^2 + 289 -$$

$$- 24\sqrt{(x^2 + 1)(49x^2 + 289)} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{24^2 x^2}{2 \cdot 162} = 1$$

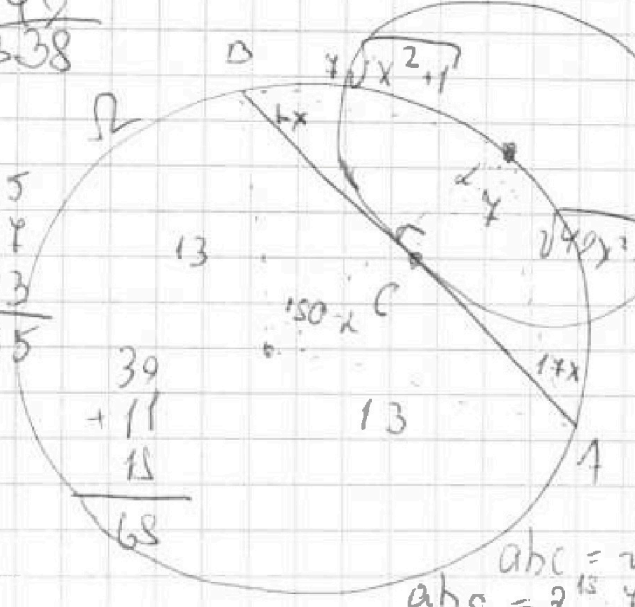
$$576x^2 = 64 - 1,8$$

$$\begin{array}{r} 210 \\ \hline 546 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$64 - 56,1$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \hline 448 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ + 49 \\ \hline 338 \end{array}$$



$$4 \cdot 48x^2 - 289 =$$

$$2\sqrt{(49x^2 + 289)} = -14\sqrt{(49x^2 + 338x^2 + 289)}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot k$$

$$bc = 2^{14} \cdot 4^{11} \cdot m \quad m \cdot k \cdot n = 7^2 \cdot 4$$

$$ac = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot n$$

$$abc = \sqrt{mkn} \cdot 7^{55} \cdot 4^{68}$$

$$abc = 2^{15} \cdot 4^{22} \cdot \sqrt{2 \cdot 4^2 \cdot mkn} \quad abc = 2^{20} \cdot 4^{23}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

МФТИ



- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$

$b \cdot c = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{18}$  ( $m \in \mathbb{N}$ ),  $bc = 2^{14} \cdot 7^{18}$

$a \cdot c = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$

Тогда  $ab \cdot bc \cdot ac = kmn \cdot 2^{15} \cdot 2^{14} \cdot 2^{23} \cdot 7^{11} \cdot 7^{18} \cdot 7^{39}$

$(abc)^2 = k \cdot m \cdot n \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$

$abc = \sqrt{k \cdot m \cdot n \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}} = \sqrt{2^{27} \cdot 7^{34}} \cdot \sqrt{kmn \cdot 2^2}$

$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow kmn \cdot 2^2$  - должно быть полным квадратом  $\Rightarrow kmn \geq 2$  Пусть  $kmn = 2$  Тогда

$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34} \Rightarrow$  минимум  $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

Пример  ~~$a = 2^{10} \cdot 7^{16}$~~ ,  ~~$b = 2^5$~~ . При этом  $ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow$

~~$abc = 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$~~   $n=2$

~~$a = 2^{11} \cdot 7^{11}$~~ ,  ~~$b = 2^4$~~ ,  ~~$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$~~   $\frac{9ab}{m}$

~~$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$~~   $n=2$   ~~$mk = 4^5$~~   $a+b=m$

~~$b = 2^{28} \cdot 7^{39} : (2^{24} \cdot 7^{39}) = 2^4 \cdot 7^4$~~   $b = 7^4$

~~$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$~~ ,  ~~$a = 2^{11} \cdot 7^{16}$~~   $m=9$   $a:m$   $5 \quad 4$

$a+b$   $m \cdot \frac{a+b}{m}$   $\frac{a}{b+1}$   $9$

$a^2 - 2ab + b^2 = \frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b}$   $81 - 9 \cdot 5 \cdot 4$

$\text{НОД}(a+b) = 1$   $5 \cdot 6$   $k$

$a+b = k \cdot m$   $\frac{11}{121 - 9 \cdot 5 \cdot 6}$   $k \cdot m = \frac{9ab}{m}$

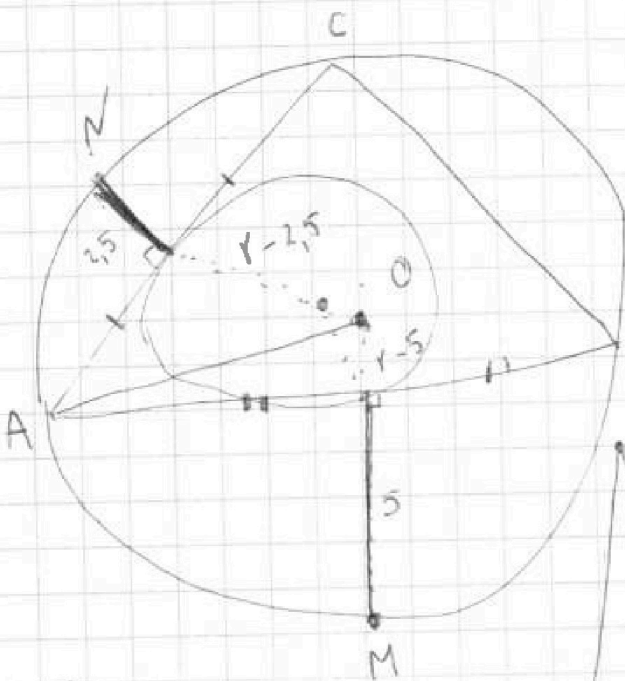
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) y_1 = 26 = 3k + b$$

max

$$y = 2 - 2x + 32$$

$$y = -2x$$

$$y = 3k$$

$$3) y = 3k - 48$$

027

$$0 = 10k + b$$

$$2b = -13k$$

$$k = -2$$

$$y = 3k + b$$

$$b = 0$$

$$3 \cdot 10 + b = 0$$

$$(x_2 - x_1)(k + 2) = 14$$

$$\frac{26}{14}$$

$$2x + y$$

$$17 \cdot 26 =$$

$$\begin{cases} y \leq -2x + 32 \\ y \geq -2x \\ y \leq 3k \\ y \geq 3k - 48 \end{cases}$$

$$y \geq -2x$$

$$y \leq 3k$$

$$y \geq 3k - 48$$

$$(0 - 16) \cdot$$

(0, 0)

(16, 0)

(-13, 26)

(13, 26)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                          |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                        | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

