



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть k, m и n такие натуральные числа, что:

$$ab = k \cdot 2^{15} \cdot 4^{11}, \quad bc = m \cdot 2^{17} \cdot 4^{18}; \quad ac = n \cdot 2^{23} \cdot 4^{32}$$

$$\begin{aligned} 2) ac \cdot 2^{23} &\Rightarrow abc \cdot 2^{23} \\ bc: 2^{19} & ; ab: 4^{11} \\ ab: 2^{15} & ; bc: 4^{13} \end{aligned} \Rightarrow abc: 4^{32}$$

Пусть r, s и t такие натуральные числа, что:

$$abc = r \cdot 2^s \cdot 4^t. \quad \text{Причина } s \geq 23, t \geq 32$$

$$3) ab \cdot bc \cdot ac = kmn \cdot 2^{15+17+23} \cdot 4^{11+18+32} = kmn \cdot 2^{55} \cdot 4^{68}$$

$$abc = \sqrt{kmn} \cdot 2^{55} \cdot 4^{68} = 2^{24} \cdot 4^{34} \cdot \sqrt{2kmn}$$

$abc \in \mathbb{N} \Rightarrow 2kmn$ - точный квадрат \Rightarrow

$\Rightarrow kmn \geq 2$. Так как kmn кратно 4, то

~~abc, а обе мо~~ ~~и~~ попадает. Причина $abc = 2^{28} \cdot 4^{34}$.

4) Получаем $s \geq 28, t \geq 34$ $\frac{\sqrt{kmn}}{2}$

Вместе с учетом полученных условий $s \geq 28, t \geq 34, r \geq 1$.

$$abc \geq 2^{28} \cdot 4^{34}$$

5) Пример. Пусть $a = 2^{11} \cdot 4^{21}, b = 2^9, c = 2^{13} \cdot 4^{18}$

$$abc = 2^{23} \cdot 4^{39}, \quad ab = 2^{15} \cdot 4^{21} (2^{15} \cdot 4^{11}), \quad bc = 2^{17} \cdot 4^{38} (2^{14} \cdot 4^{13}),$$

$$ac = 2^{24} \cdot 4^{39} (2^{23} \cdot 4^{39})$$

Ответ. $2^{28} \cdot 4^{34}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~OK~~ 1) ~~б~~ - несократима \Rightarrow 1) Пусть $a, b = k \cdot m$

$$2) \frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

3) Дробь можно сократить на m .

$$\frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{(a+b)^2}{m} - \frac{9ab}{m}} = \frac{k}{k^2m - \frac{9ab}{m}} \Rightarrow 9ab \cdot m$$

4) Если $a : m$ или $b : m$, то так как

$(a+b) : m$, то и второе число : m , но
дробь $\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow a / m$ и b / m

Но $9ab : m \Rightarrow 9 : m \Rightarrow m \leq 9$

5) Максимально $m = 9$. Пример

$$a = 5; b = 4 \quad \frac{5+4}{25-45+16} = \frac{9}{41-} \\ a = 8; b = 8 \quad \frac{1+8}{64-56+1} = \frac{9}{9} = 1$$

Ответ: при $m = 9$.



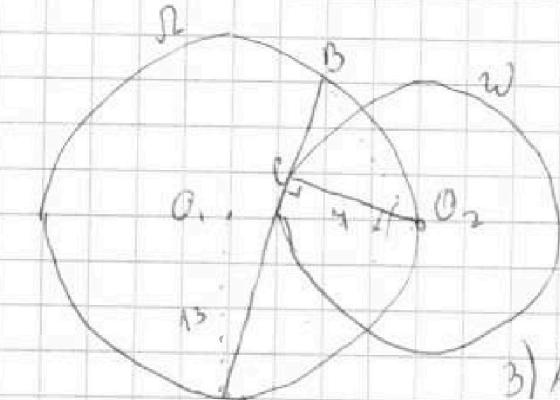
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть O_1 -центр Ω , O_2 -центр ω ,
 $a \angle BO_1 A = \alpha$, $AC = 14x$, $AB = 4x$

2) $AO_2 B$ -вписан $\angle \Omega \Rightarrow$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2 \cdot 13 \Rightarrow 14x = 26 \cdot \sin \alpha$$

$$AO_1 \cdot AO_2 = AB$$

3) AB -насам $\Rightarrow O_2 C \perp AB \Rightarrow S_{AO_2 B} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$

$$4) \frac{AO_1 \cdot BO_1}{4 \cdot 13} = \frac{1}{2} AB \cdot 4 \Rightarrow AO_1 \cdot BO_1 = \frac{4 \cdot 4^2 \cdot 13}{14} = 13 \cdot 14$$

5) По т. косинусов $b^2 = AO_2^2 + BO_2^2 - 2 \cdot AO_2 \cdot BO_2 \cos \alpha$. 5) по т. Пифагора b

$$\triangle BCO_1: BO_1 = \sqrt{(4x)^2 + 7^2} \cdot \triangle A(O_2, AC) = \sqrt{(14x)^2 + 7^2}$$

6) По т. косинусов $b^2 = BO_2^2 - BO_1^2$.

$$(14x)^2 = (14x)^2 + 49 + 49x^2 + 49 - 1 \cdot \frac{AO_1 \cdot BO_1 \cdot \cos \alpha}{13 \cdot 14}$$

$$516x^2 = 289x^2 + 49x^2 + 98 - 364 \cos \alpha$$

$$78 = 138x^2 \Rightarrow 364 \cos \alpha \Leftrightarrow 42 - 69x^2 = 182 \cos \alpha$$

$$x = \frac{13}{14} \sin \alpha (u_3 \text{ и } u_2) \Leftrightarrow \pi = \frac{169}{144} \sin^2 \alpha = \frac{169}{144} - \frac{169}{144} \cos^2 \alpha$$

~~$$42 - 69 \cdot \frac{169}{144} + 69 \cdot \frac{169}{144} \cos^2 \alpha \approx 182 \cos \alpha$$~~

$$284x^2 = 49x^2 + 2 \cdot 49 - 26 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$48x^2 = 7x^2 + 14 - 52 \cdot \cos \alpha$$

$$34x^2 + 52 \cdot \cos \alpha - 14 = 0 \Leftrightarrow 14x^2 + 26 \cos \alpha - 4 = 0$$

$$x^2 = \frac{169}{144} \sin^2 \alpha (u_3 \text{ и } u_2) = \frac{169}{144} - \frac{169}{144} \cos^2 \alpha$$

$$14 \cdot \frac{169}{144} (1 - \cos^2 \alpha) + 26 \cos \alpha - 4 = 0$$

$$U_3 \text{ и } U_2: \sin \alpha = \frac{13}{14} x \Rightarrow \cos^2 \alpha = \left(\frac{5}{13} x\right)^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1) Пусть $\cos \lambda = \frac{5}{13} x$:

$$14x^2 + 10x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & < 0 - \text{не подходит} \\ x = \frac{4}{14} & \end{cases}$$

(2) Пусть $\cos \lambda = -\frac{5}{13} x$:

$$14x^2 - 10x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \\ x = -\frac{4}{14} & < 0 - \text{не подходит} \end{cases}$$

$13 > 4 \Rightarrow \overline{AB} > 180^\circ \Rightarrow \angle AOB > 90^\circ \Rightarrow \cos \lambda < 0$
поэтому

$$x = 1 \Rightarrow AB = 24$$

Ответ: 24



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (1 - 9x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 +$$

↓ переход к
следующему!!

$$- 9x + 1 - (1 - 9x)^2 = 2\sqrt{(1 - 9x)^2(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$- (1 - 9x)(1 - 9x - 1) = 2\sqrt{(1 - 9x)^2(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$9x(1 - 9x) = 2\sqrt{(1 - 9x)^2(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$81x^2(1 - 9x)^2 = 4(1 - 9x)^2(3x^2 + 3x + 1)$$

↓ переход к
следующему!!

$$1 - 9x = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 69 = \\ * 16(69 + 9) = 16 \cdot 78$$

Проверка (так как были переходы)

$$x = \frac{1}{9} \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm \sqrt{78}}{69}$$

Проверка (так как были переходы к следующему)
(и непроверены условия на существование корней)

$$1) x = \frac{1}{9} \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9} = 0$$

$$\sqrt{\frac{3}{81}} - \frac{54}{81} + \frac{162}{81} - \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{72}{81} + \frac{81}{81}} = \sqrt{\frac{111}{81}} - \sqrt{\frac{111}{81}} = 0 \quad \checkmark$$

$$2) x = \frac{6 - \sqrt{78}}{69} :$$

$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{6 - \sqrt{78}}{69}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{6 - \sqrt{78}}{69}\right) + 2} =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$$

$$3) x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{6+2\sqrt{3}}{6} \\ x = \frac{6-2\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > x$$

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{3} < x$$

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \checkmark \quad \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$$

$$69 + 23\sqrt{3} \quad \checkmark \quad 6 + 2\sqrt{78}$$

$$63 + 23\sqrt{3} \quad \checkmark \quad 2\sqrt{78}$$

$$63 + 23\sqrt{3} > 18 \geq 2\sqrt{81} > 2\sqrt{78}$$

Не существует x при $\Rightarrow x \neq \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$

3) $x = \frac{6-2\sqrt{48}}{69}$ Чтобы вместе следующий один
равносильные переходы должно выполняться

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad (D = 9 - 12 = 0)$$

$$(1-x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$x(1-x) \geq 0$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > x \quad (1)$$

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{3} < x$$

$$\begin{cases} 1 - 9x \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 1 - 18x + 81x^2 \end{cases} \quad (A)$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{9} \\ x \leq 0 \end{cases} \quad (B)$$

$$(1) 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \checkmark \quad \text{Быстро } \frac{6-2\sqrt{48}}{69}$$

$$69 - 23\sqrt{3} \quad \checkmark \quad 6 - 2\sqrt{78}$$

$$63 + 2\sqrt{78} > 63 + 25 \geq 23\sqrt{3} \Rightarrow 11 \cdot 6 \text{ верно}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) 20x^2 - 4x^2 + 21x \Leftrightarrow 0 \geq 26x^2 - 4x \Leftrightarrow 0 \geq x \geq \frac{2}{26}$$

$$(2) 1 - 9x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{9}$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{48}}{69} < 0 \leq \frac{1}{9} \Rightarrow (2) - \text{верно}$$

$$(3) \frac{6 - 2\sqrt{48}}{69} < 0 - \text{верно}$$

$$x = \frac{6 - 2\sqrt{48}}{69} - \text{ выделяем корни}$$

$$\text{Отв. } x = \frac{6 - 2\sqrt{48}}{69} \text{ или } x = \frac{6 + 2\sqrt{48}}{69}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

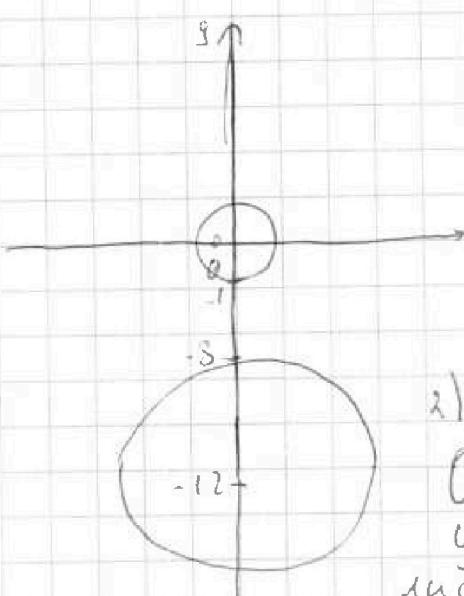
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Рассмотрим $(x^2 + y^2 - 1)/(x^2 + (y - 1)^2 - 16) \leq 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 \geq 16 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 1$ — график окружности
с центром $(0; 0)$ и $R = 1$
 $x^2 + (y - 1)^2 = 16$ — график окружности
с центром $(0; 1)$ и $R = 4$



Решением неравенства
являются точки, лежащие вкруг
одной окружности и вне
второй, а так как окруж-
ности не пересекаются, то
просто точки вкруг окруж-
ностей (или на них)

2) $y = 8b - ax$ — ур-ние прямой.

С каждой из окружностей
либо 0 пересечений \Rightarrow 0 решений
либо 1 пересечение \Rightarrow 1 решение
либо 2 пересечения \Rightarrow бесконечно-ши-
го решения

3) Рассмотрим 2 решения $\Rightarrow y = 8b - ax$ — касательная
к обеим окружно-стям

4) $y = 8b - ax$ — касам к $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ 1 решение

$$\begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (8b - ax)^2 = 1 \Rightarrow$$
 решение

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 = 1$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = 256a^2b^2 - 4(64b^2)(a^2 + 1) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$256a^2b^2 - 256a^2b^2 - 256b^2 = 0 \Rightarrow 256a^2 + 4 = 64b^2$$

$$5) y = 8b - ax \text{ - касам. } x^2 + (y-12)^2 = 16 \Rightarrow 1 \text{ решение}$$

$$\begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2 + (y-12)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (8b - ax - 12)^2 = 16 \text{ - 1 решение}$$

$$x^2 + 64b^2 - 8bx - 96b - 8ax + a^2x^2 + 12ax - 96b + 12ax + 144 = 16$$

$$(a^2 + 1)x^2 + x(24a - 16ab) - 192b + 128 = 0$$

$$D = (24a - 16ab)^2 + 4(a^2 + 1)(192b - 128) = 0$$

$$576a^2 + 256a^2b^2 - 384a^2b + 4(192a^2b - 112a^2 - 128) = 0$$

$$576a^2 + 256a^2b^2 - 384a^2b + 768a^2b - 512a^2 + 768b - 768 = 0$$

$$64a^2 + 256a^2b^2 + 384a^2b + 768b - 768 = 0$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$404a^2(b^2 + b + 1) + 768b - 768 = 0$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$404(a^2 + 1) + 404b^2 - 404b - 404 + 768b - 768 = 0$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$404 \cdot 64b^2 - 404b^2 + 64b - 1442 = 0$$

$$404 \cdot 63b^2 + 64b - 1442 = 0$$

$$D = 64^2 + 4 \cdot 1442 \cdot 404 \cdot 63 = 4(32^2 + 1442 \cdot 404 \cdot 63) =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= 16(16^2 + 176 \cdot 63 \cdot 1472) = 32064(8^2 + 44 \cdot 63 \cdot 1472) =$$

$$= 128(4^2 + 11 \cdot 63 \cdot 1472) = 32^2(2^2 + 11 \cdot 63 \cdot 368) =$$

$$= 64^2(1 + 693 \cdot 92)$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{693} \\ \underline{-92} \\ 1386 \\ \underline{-6234} \\ 64456 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 644754 \\ \underline{-4} \\ 45244 \\ \underline{-5} \\ 51225 \\ \underline{-50} \\ 1225 \end{array} = 275$$

$$\beta = \frac{-64 \pm 64 \sqrt{644754}}{2 \cdot 40463}$$

$$a = \pm \sqrt{\left(\frac{-64 \pm 64 \sqrt{644754}}{2 \cdot 40463} \right)^2 - 1}$$

$$\text{Ответ при } a = \pm \sqrt{\left(\frac{-64 \pm 64 \sqrt{644754}}{2 \cdot 40463} \right)^2 - 1}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$y = -3x^2 - 6x + 2$ $y^2 = 3x^2 + 6x + 2$

$\begin{array}{r} 8 \\ \times 1 \\ \hline 8 \\ 1 \\ \hline 82 \end{array}$

A B C M N

$- \frac{1}{3}$ $x = \frac{1}{3}$

$- \frac{1}{27}$ $\frac{52}{77}$

$- 1 + 4 - \frac{23}{27} - \frac{32}{63}$

$D = 9 - 12 \cdot 40 \cdot \frac{2}{5}$

~~$3x^2 - 6x + 2 > 0$~~

$D = 36 - 24 = 8$

$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$

$3x^2 - 6x + 2 = (1 - 2x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 - 7\sqrt{(1 - 2x)(3x^2 + 3x + 1)}$

$2\sqrt{(1 - 2x)(3x^2 + 3x + 1)} = (1 - 2x)^2 + 9x - 1$

$6^2 - 23\sqrt{2} < 6 \cdot 22\sqrt{3}$

$2\sqrt{(1 - 2x)(3x^2 + 3x + 1)} = (9x - 1)4x - 9x$

$63 + 2\sqrt{45} > 23\sqrt{3}$

$9(1 - 2x)(3x^2 + 3x + 1) = -81x^2(1 - 2x)^2 / (1 - 2x)$

$12x^2 + 12x + 12 = -81x^2 - 72x^3$

$429x^3 - 69x^2 + 12x + 12 = 0$

$\frac{36 \cdot 8 \cdot 30\sqrt{3}}{3^2} + 34\sqrt{3} + \frac{54}{111} - \frac{81}{162}$

$-\frac{76}{3} + 12 = -\frac{1}{3} + 1$

$3 - \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{6 - 2\sqrt{3}}{63}$

$6x = 3x$

$6x - 3x = 1 - 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \cancel{69} \\ \times \cancel{52} \\ \hline 1044 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 348 \\ \times 3 \\ \hline 1044 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 62 \\ \hline 621 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times 4 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 6 \\ \hline 414 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4761 \\ \times 2 \\ \hline 9522 \end{array}$$

$$\frac{1}{69} \sqrt{3(36+312-24\sqrt{48})} - 414(6-2\sqrt{48}) + 9522 =$$

$$\frac{1}{69} \sqrt{1044 - 42\sqrt{48}} - 2484 + 328\sqrt{48} + 9572$$

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{6 - 2\sqrt{48}}{69}$$

$$69 + 23\sqrt{3} > 6 + 2\sqrt{48}$$

$$63 \cdot 23\sqrt{3} > 2\sqrt{48}$$

15

69 -

$$1 - \frac{6 - 2\sqrt{48}}{69} > 0$$

$$69 - 23\sqrt{3} > 6 - 2\sqrt{48}$$

$$63 - 23\sqrt{3} > -2\sqrt{48}$$

$$69 > \sqrt{6 - 2\sqrt{48}}$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{6 - 2\sqrt{48}}{69}$$

$$68 + 2\sqrt{48} > 23\sqrt{3}$$

1 + 3.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 109 \\ \times 14 \\ \hline 67 \\ 109 \\ \hline 149 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ 69 \\ \hline 1521 \\ 1014 \\ \hline 19661 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ 49 \\ \hline 1396 \\ 546 \\ \hline 4156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ \hline 780 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 182 \\ 144 \\ \hline 728 \\ 268 \\ \hline 182 \\ \hline 26208 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 06 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11661^{10} \\ 7156 \\ \hline 4505 \\ 41 \\ \hline 34 \end{array}$$

$$4156 - 11661 + 11661 \cdot \cos^2 \alpha \approx 26208 \cdot \cos \alpha \quad \frac{2843}{1005}$$

$$11661 \cos^2 \alpha - 26208 \cdot \cos \alpha + 4505 = 0 \quad \frac{2843}{2565}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 14 \\ \hline 1183 \\ 169 \\ \hline 2843 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1865 \mid 5 \\ 75 \quad 343 \quad 26 \\ \hline 36 \quad 26 \\ 26 \quad 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ 26 \\ \hline 864 \\ 288 \\ \hline 344 \end{array}$$

$$2843 - 1873 \cos^2 \alpha + 3444 \cos \alpha - 1005 = 0$$

$$- 1873 \cos^2 \alpha + 3444 \cos \alpha + 1865 = 0$$

$$D = 144^2 \cdot 12^4 \cdot 26^2 - 4 \cdot 169 \cdot 14$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{13} x$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{13} x$$

$$y = kx + b$$

$$\cos \alpha = -\frac{5}{13} x$$

$$2x_2 + (kx_2 + b) - (x_1 + kx_1 + b) \quad (x_2 - x_1)(k+2) = 14$$

$$x_2(k+2) + b - (x_1)(k+2) \Rightarrow b = 14 \div (k+2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

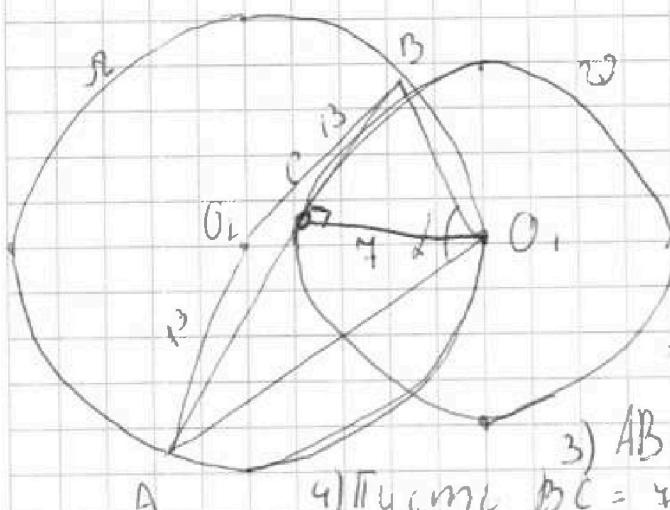
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть O_1 -центр ω ,
 O_2 -центр ϖ

2) Пусть $\angle BO_1A = \lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overarc{BA} = 2\lambda \Rightarrow \overarc{BO_1A} = 360^\circ - 2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 360^\circ - 2\lambda$$

3) AB -касам $\Rightarrow O_1C \perp AB$

4) Пусть $BC = 4x \Rightarrow AC = 17x$

5) По т.косинусов $b^2 = BO_1^2 + BO_1A^2 - 2 \cdot BO_1 \cdot BO_1A \cos(24x)$

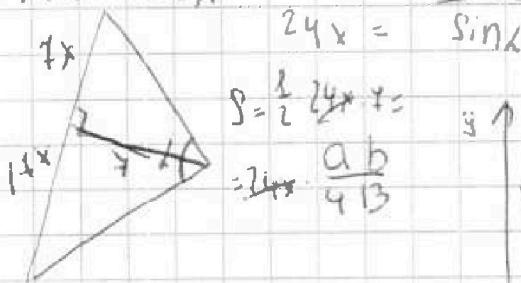
5) $O_1C \perp AB \Rightarrow BO_1 = \sqrt{(4x)^2 + y^2}$, $AO_1 = \sqrt{(17x)^2 + y^2}$ (по т.Пифагора $b \triangle BO_1C$ и AO_1C)

6) По т.косинусов $b^2 = BO_1A^2 - 2 \cdot BO_1 \cdot BO_1A \cos(24x)$

$$(24x)^2 = 49x^2 + 49 + 289x^2 + 49 - 2 \cdot 7 \sqrt{(y^2+1)(12x^2+49)} \cdot \cos x$$

7) По т.синусов $b = \frac{24x}{\sin x} = \frac{24x}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{169}}}$

$$8) BO_1 \text{ радиус } \frac{24x}{\sin x} = \frac{24}{\sin x} \quad y = 8b - ax \quad \frac{104}{26} \quad \frac{26}{364}$$



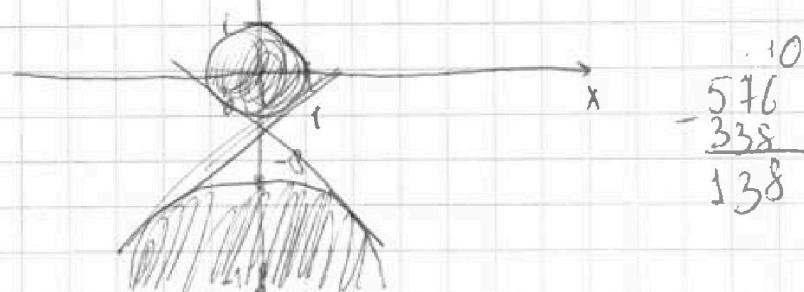
$$y^2 + y^2 = 1 \quad \text{реш} \quad \frac{26}{364}$$

$$x^2 + (y-11)^2 = 16 \quad \text{реш}$$

$$y^2 + 64b^2 - 16abx + ax^2 = 1$$

$$+289 \\ 42 \\ \hline 338$$

$$-576 \\ 338 \\ \hline 138$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \geq 14291$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 12 \leq 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

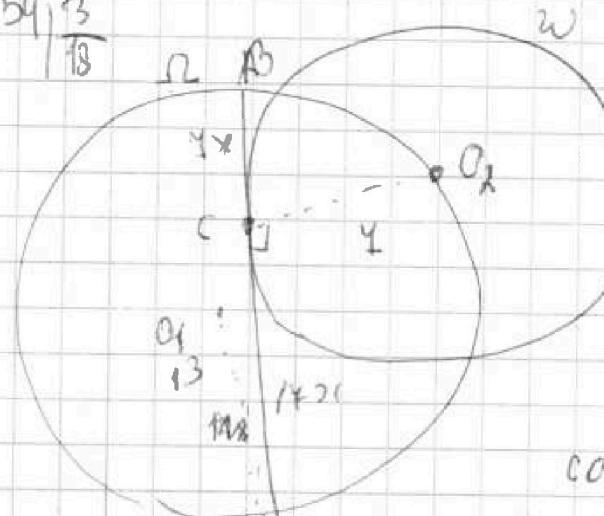
$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1 - 18x + 8x^2$$

$$-45x^2 + 15x + 3 = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$45^2 x^4 - 2 \cdot 45 \cdot 15x \cdot 2 \cdot 3 \cdot 45x^2 + 15^2 x^2$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ + 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\frac{54}{18} \mid \begin{array}{r} 3 \\ 18 \end{array}$$



$$24x^2 = 2169 + 2 \cdot 169 \cos \alpha$$

$$24^2 x^2 = 49x^2 + 49 +$$

$$+ 49x^2 + 289 -$$

$$- 24\sqrt{(x^2 + 1)(49x^2 + 289)} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{24^2 x^2}{2 \cdot 169} - 1$$

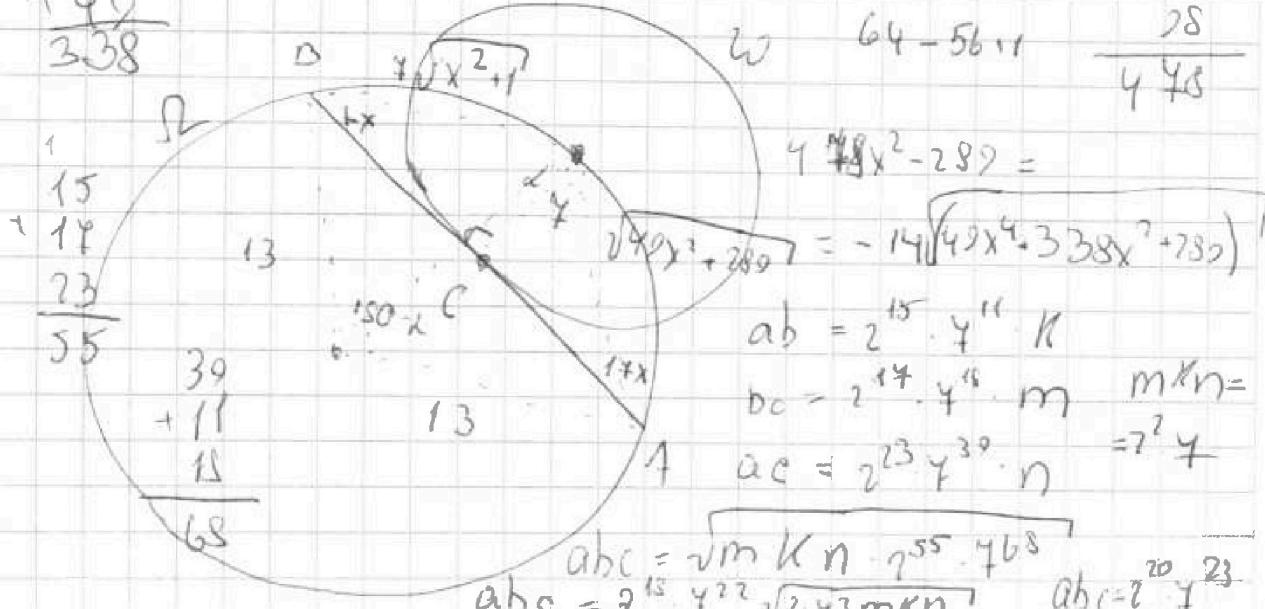
$$576x^2 = 6 \quad 1, 8$$

$$\begin{array}{r} 9, 0 \\ \times 576 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ + 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$64 - 56, 11$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 448 \\ \hline 448 \end{array}$$



$$4 \cdot 49x^2 - 289 =$$

$$- 14\sqrt{49x^2 \cdot 338x^2 + 289}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 4^{11} K$$

$$bc = 2^{14} \cdot 4^{11} m \quad m \cdot n =$$

$$ac = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot n = 7^2 \cdot 4$$

$$abc = \sqrt{m \cdot K \cdot n} = 7^{55} \cdot 4^{68}$$

$$abc = 2^{15} \cdot 4^{22} \sqrt{2 \cdot 4^2 \cdot m \cdot K \cdot n}$$

$$abc = 2^{20} \cdot 4^{23}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $ab = K \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$ ($K \in \mathbb{N}$), $ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$

$b \cdot c = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{33}$ ($m \in \mathbb{N}$), $bc = 2^{17} \cdot 7^{33}$

$a \cdot c = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$ ($n \in \mathbb{N}$), $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$

Тогда $ab \cdot bc \cdot ac = kmn \cdot 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+39}$

$$(abc)^2 = K \cdot m \cdot n \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc = \sqrt{K \cdot m \cdot n \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}} = \cancel{\sqrt{2^{27}}} \cdot \cancel{\sqrt{7^{34}}} \sqrt{kmn} \cdot 2^{\cancel{17}}$$

$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow kmn \cdot 2^{\cancel{17}}$ - должно быть произведением квадратом $\Rightarrow kmn \geq 2$ ~~Пусть~~ $kmn = 2$ Тогда

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34} \Rightarrow \text{наименьшее } abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

Пример: $a = 2^{10} \cdot 7^{16}$, $b = 2^5$. При этом $ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow$

$$\cancel{7^{39}} \Rightarrow abc \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$n=2$$

$$\frac{9ab}{m}$$

$$a = 2^{11} \cdot 7^{11}, b = 2^4, c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}, n = 2 \Rightarrow m \cancel{K} = 7^5 \cdot a \cdot b \cdot m$$

$$b = 2^{28} \cdot 7^{39} : (2^4)^5 = 2^{24} \cdot 7^{39} = 2^4 \cdot \cancel{7^{39}} \Rightarrow b = 7^4$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{28}, a = 2^{11} \cdot 7^{16} \quad \frac{m}{a:m} = \frac{9}{5 \cdot 4}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{\cancel{m}(\cancel{a}+\cancel{b})}{\cancel{a}+\cancel{b}} = \frac{9}{81 - 9 \cdot 5 \cdot 4}$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$a+b = k \cdot m$$

$$\frac{p.p}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{5 \cdot 6}{121 - 9 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{k}{km - 9ab}$$



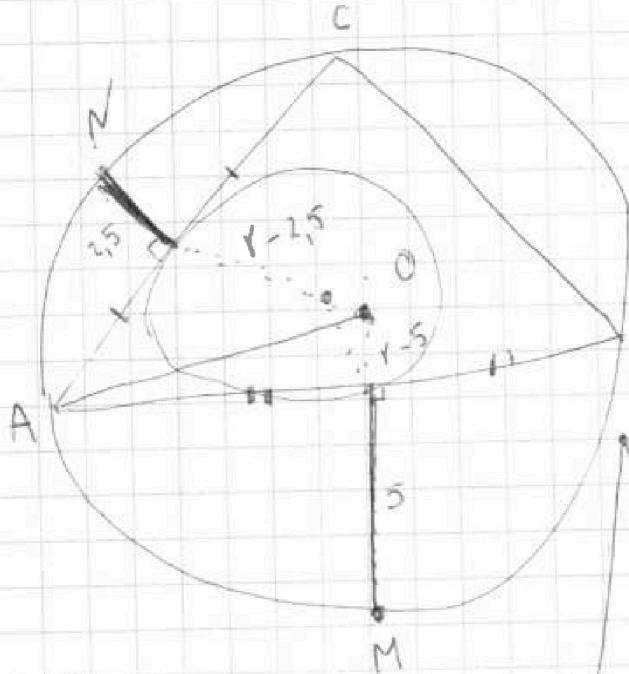
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(x_2 - x_1)(k + 2) = 14$$

$$\frac{26}{14}$$

$$2x + y$$

$$14 \cdot 26 =$$

$$1) y = 26 = 3k + b$$

max

min

$$0 = 16k + b$$

$$26 = -13k$$

$$k = -2$$

$$y = 3k + b$$

$$b = 0$$

$$3 \cdot 16 + b = 0$$

$$\begin{cases} y \leq -2x + 32 \\ y \geq -2x \end{cases}$$

$$y \leq 3k$$

$$y \geq 3k - 48$$

$$(0, 16)$$

$$(0, 0)$$

$$(8, 0)$$

$$(-3, 26)$$

$$(13, 26)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ч/л

1

Р

~~36~~ 36
26

