



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 9

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$\min abc = ?$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Если  $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$ , то это можно представить как  $ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k$ ;  
 $k \in \mathbb{N}$

Также пусть  $bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot m$ ;  $m \in \mathbb{N}$

ибо  $ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot n$ ;  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot m \\ ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot n \end{cases}$$

Перемножим все 3 уравнения системы

$$abc^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk$$

$$abc = \sqrt[2]{2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk} = 2^{25} \cdot 7^{32} \sqrt{2mnk}$$

Найдем такое значение  $mnk$ , такое, что  $2^{25} \cdot 7^{32} \sqrt{2mnk} \in \mathbb{N}$

Это 2. Тогда  $\min abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{32}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Задача~~ Из этого равенства следует, что  
 $a \geq b$ . Но же  $a, b$  по доказанному выше  
на  $m$  не делится, значит  $\frac{a}{m}, b/m$ , а отсюда  
максимальное значение, приближающее  $m$   
это 8. Это достигается например при  $a=3$   $b=5$ .

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$  - неократимая

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$\max m$ , такая, что  $a+b:m$  и  
 $a^2-6ab+b^2:m$  - ?

Тогда есть такое  $m$ . Тогда верно следующее

$$\begin{cases} a+b \equiv 0 \\ a^2-6ab+b^2 \equiv 0 \end{cases} \pmod{m}$$

$a \equiv -b$ . Это значит, что и  $a$ , и  $b$  на  $m$  делятся на доли, ведь если  $a$  делится, то  $a \equiv 0 \equiv -b \pmod{m}$ , а это противоречит несократимости  $\frac{a}{b}$ .

Представим  $a+b = km$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$$a^2-6ab+b^2 = hm, h \in \mathbb{N}$$

Тогда имеем  $\begin{cases} a+b = km \\ a^2-6ab+b^2 = hm \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2+2ab+b^2 = k^2m^2 \\ a^2-6ab+b^2 = hm \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+2ab+b^2 = k^2m^2 \\ a^2-6ab+b^2 = hm \end{cases} \quad \leftarrow$$

$$8ab = k^2m^2 - hm = m(k^2m - h)$$

Продолжение на обратной

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

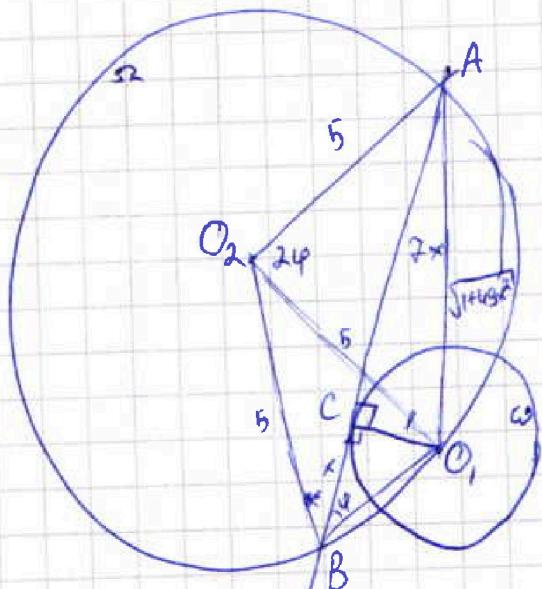
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$R_{S2} = 5$$

$$R_\omega = l$$

$$AC : CB = ? \quad AB \text{ кас. } \omega$$

$$AB - ?$$

Решение:

1) Дусь  $AB = 8x$ , тогда  $AC = 7x \quad BC = x$

~~Дусь~~  $O_1$  - центр  $\omega$ ;  $O_2$  - центр  $S2$

Дусь  $\varphi = \angle O_1BC$

2) т.к.  $AB$  - касательная к  $\omega$   $\angle O_1CA = 90^\circ, \angle O_1CB = 90^\circ$

3) по теореме Пифагора  $B \Delta A O_1 C, B \Delta C O_1 B$

$$AO_1^2 = CO_1^2 + AC^2$$

$$O_1B^2 = BC^2 + O_1C^2$$

$$AO_1 = \sqrt{1+49x^2}$$

$$O_1B = \sqrt{l+x^2}$$

4) т.к.  $\angle O_1O_2A$  - центральный для дуги  $\widehat{AO_1}$ , на которой он изображен вписанный  $\angle O_1BA = \varphi$ , то  
 $\angle O_1O_2A = 2\varphi$

Продолжение на обороте



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) ~~5)~~  $\sin \varphi = \frac{O_1 C}{O_1 B} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  в  $\triangle O_1 CB$

$$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2 \varphi = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

6)  $O_1 O_2 = O_2 A = 5$  как радиусы  $\odot 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle O_1 O_2 A - \text{равнобедренный} \Rightarrow \angle O_2 O_1 A = \angle O_2 A O_1 = 90^\circ - \varphi$$

7) по теореме косинусов в  $\triangle O_1 O_2 A$

$$O_2 A^2 = O_1 O_2^2 + A O_1^2 - 2 O_1 O_2 \cdot A O_1 \cdot \cos(90^\circ - \varphi)$$

$$25 = 25 + 1 + 49x^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{1+49x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{10\sqrt{1+49x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1+49x^2$$

$$\frac{10}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+49x^2}$$

$$\frac{100}{1+x^2} = 1+49x^2$$

$$100 = 1+49x^2 + x^2 + 49x^4$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x^2 = -\frac{99}{49} \text{ нет корней}$$

$$x = 1$$

8) T.k.  $AB = 8x$   $AB = 8$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Обратная задачка

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \leq 1 \\ -7x + 1 = -2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 + 2x \leq 0 \\ 49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(x+1) \leq 0 \\ 41x^2 - 22x - 3 = 0 \end{array} \right. \xrightarrow[-1]{-\frac{1}{41}} x \in [-1, 0]$$

$$D = 484 + 12 \cdot 41 = 976$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82} = \frac{22 \pm 2\sqrt{244}}{82} = \frac{11 \pm \sqrt{244}}{41}$$

$$x = \frac{11 + \sqrt{244}}{41} \quad x = \frac{11 - \sqrt{244}}{41}$$

не подходит  $x \in [-1, 0]$

$$\text{Ответ: } \frac{11 - \sqrt{244}}{41}; \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порта QR-кода недопустима!

$$\text{Задача } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\text{ОДЗ: } 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \quad (x-1)(x-\frac{3}{2}) \geq 0 \quad \begin{array}{c} + \\ \hline - \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ \hline - \end{array} \quad x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad D = 4 - 8 < 0 \quad \text{всегда верно}$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

~~$$\text{П. Р. } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \text{ можно}$$~~

заменить  $\sqrt{2x^2}$

$$\text{Задача } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b$$

$$2 - 7x = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = a^2 - b^2$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

$$1) a - b = 0$$

$$a = b$$

$$\text{Обр. замена } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$7x = 2 \quad x = \frac{2}{7}$$

$$2) a + b = 1$$

Продолжение на обратной стороне

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$a_2 = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

Ответ:  $\pm \frac{3}{\sqrt{55}}$ ;  $\pm \frac{1}{3\sqrt{2}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Продолжение случая 2

$$\angle O_1BB_1 = \angle O_2BC_1$$

$\angle BC_1O_2 = \angle BB_1O = 90^\circ$  из-за свойства касательной

Тогда  $\triangle BO_1B_1 \sim \triangle BO_2C_1$  с коэф.  $\frac{O_2C_1}{O_1B_1} \geq 2$

Пусть  $BB_1 = x$ , тогда по подобию  $BC_1 = 2x$

По теореме Пифагора в  $\triangle O_2C_1$ ; в  $\triangle BO_1B_1$

$$BO_2^2 = O_2C_1^2 + BC_1^2$$

$$BO_1^2 = B_1O_1^2 + BB_1^2$$

$$BO_2 = 2\sqrt{x^2 + 1}$$

$$BO_1 = \sqrt{1+x^2}$$

Так как расстояние между центрами окружностей равно 8

$$BO_2 + BO_1 = 8$$

$$3\sqrt{x^2 + 1} = 8$$

$$x^2 + 1 = \frac{64}{9}$$

$$x^2 = \frac{55}{9}$$

$$x = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

~~Задача~~ Так как а г в уравнении

$y = ax + b$  это также ее коэффициента та есть

искомый а и  $\tan(180^\circ - \alpha)$  это а для второй

прямой

Продолжение на обороте

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ



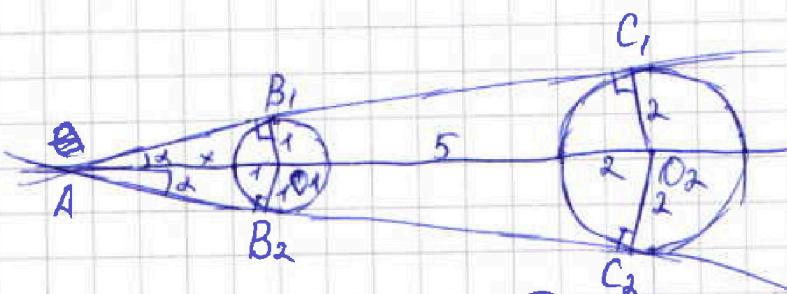
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Касание прямой и двух окружностей может  
происходить только так, как показано на чертеже.

У нас есть различные подозрительные кандидаты

1) Рассмотрим ~~окружности~~ прямые, пересекающиеся в A. A будет лежать на оси Ox, ~~так как~~

~~две~~  
~~линейные~~  
~~свойства~~  
~~касательных~~



так как центры обеих окружностей должны  
быть равноудалены от каждой из этих прямых.

Тогда Ox есть биссектриса угла A, т. к. центры  
окружностей, лежащие на линии равноудалены от  
сторон угла.

Пусть  $\angle A = 2\alpha$

$B_1, C_1$  — точки касания первой прямой с  
окружностью

$B_2, C_2$  — точки касания второй прямой с  
окружностью

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

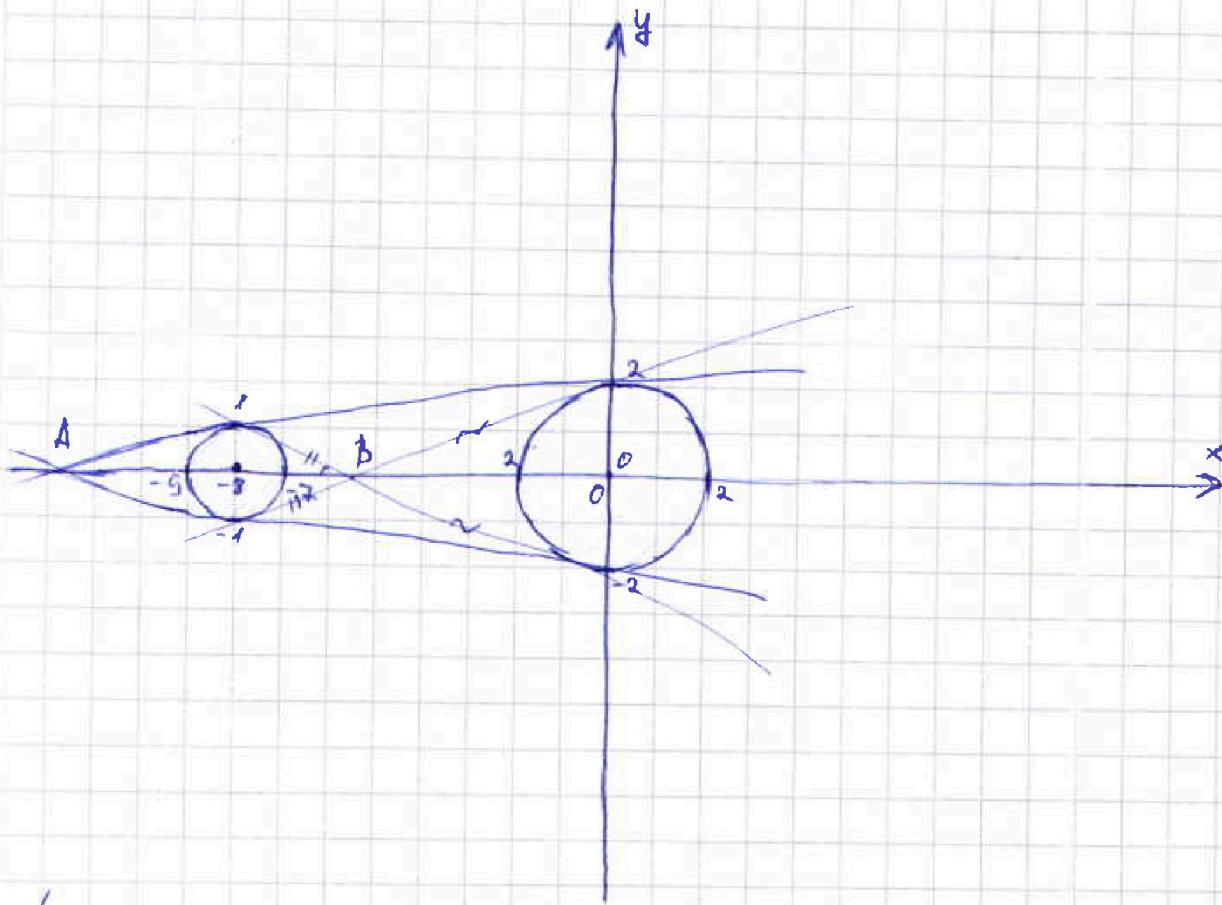
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)  $ax - y + 10b = 0 \quad y = ax + 10b \quad (1)$

$\sqrt{(x+8)^2 + y^2} \leq 1 \quad (2)$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$  - окружность с ц. в.  $B(-8, 0)$   $R=1$

$x^2 + y^2 = 4$  - окружность с ц. в.  $B(0, 0)$   $R=2$



Система имеет 2 решения, когда прямая  $y = ax + 10b$  касается двух окружностей.

Решениями нер-ва (2) будут области внутри окружностей, включая их границы

Продолжение на обратной листе



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

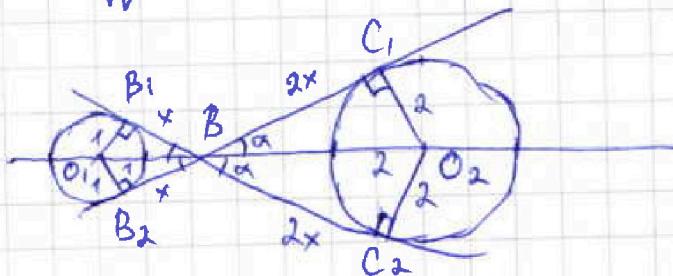
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

искомый  $\alpha$  в этом случае это  $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

Две прямые касающиеся окружностей в точках

$B_2$  и  $C_2$  искомый  $\alpha$  это  $\tan(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$

2) Рассмотрим ~~три~~, две прямые, касающиеся в  $B$ .  $B$  будет лежать на оси  $Ox$ , так как центры обеих окружностей должны быть равноудалены от каждой из этих прямых



$Ox$  есть биссектриса угла

Люсть  $B_1, C_2$  - точки касания одной прямой с окружностями  
 $B_2, C_1$  - точки касания второй прямой с окружностями

$\angle C_1 B C_2 = 2\alpha = \angle B_1 B B_2$  как вертикальные

$\angle C_1 B C_2 = \angle C_1 B_2 C_2$  и  $\angle B_1 B B_2$

Так как  $B_1$  и  $B_2$  касаются на  $Ox$ -биссектрисе  $\angle C_1 B C_2$  и  $\angle B_1 B B_2$

Продолжение на след. листе



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Продолжение случая 1

~~Задача~~ Быть расстояние от A до окружности  
 $(x+8)^2 + y^2 = 1$  это x

$$\sin \alpha = \frac{1}{x+1} \quad \text{для} \quad \begin{array}{l} \cancel{\text{круга}} \\ \cancel{\text{стремится к прямой}} \end{array}$$

крайногольного по свойству касательной прямой  
 к окружности  $AB_1O_1$ ,

$\sin \alpha = \frac{2}{9+x}$  для крайногольного по тому  
 же свойству  $\triangle AC_1O_2$

Можем приравнять и получим

$$\frac{1}{x+1} = \frac{2}{9+x}$$

$$9+x = 2x+2$$

$$x = 7$$

По теореме Пифагора в  $\triangle AB_1O_1$ ,

$$AB_1^2 = B_1O_1^2 + AO_1^2$$

$$AB_1 = \sqrt{63}$$

Так как коэффициент a в уравнении прямой ~~y = ax + b~~ это тангенс угла наклона

Продолжение на обратной стороне



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично откосательно  $M$ , середина  $\angle A B$  и

перпендикульра  $MM'$  по этой же теореме  $AM' = BM'$

3) т. к.  $M$ -середина  $\angle A B$  СМ-биссектриса, и поэтому  
она проходит через I, центр вписанной окр.  $\triangle ABC$

Аналогично  $BN$ -биссектриса  $\angle CBA$

4)  $\angle CBN = \angle ABN = \angle CAN$  как ~~углы на одной~~ вписаные,  
отображающие на равные дуги

$\angle BCM = \angle ACM = \angle BAM$  как вписаные, отображающие  
на равные дуги

5) пусть  $AC = 2a$ , тогда  $AN = CN = a$

$AB = 2b$ , тогда  $AM = BM = b$

6) по т. синусов в  $\triangle ABC$

~~AC~~

$$6) \sin B = \frac{MM'}{AM} = \frac{4,5}{b}$$

6) по теореме Гипатозра в  $\triangle AMM'$ ,  $\triangle NAN'$

$$AM^2 = MM'^2 + AM'^2$$

$$AM = \sqrt{4,5^2 + b^2}$$

$$NA^2 = N'A^2 + NN'^2$$

$$NA = \sqrt{a^2 + 4'}$$

Продолжение на следующем листе

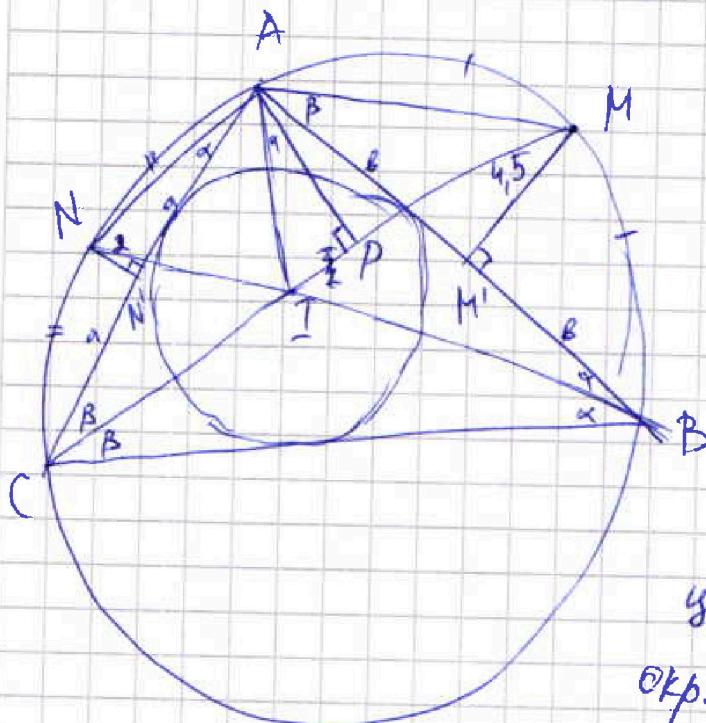
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



M - середина  $\vee AB$

N - середина  $\vee AC$

расстояние от

M до AB = 4,5

от N до AC = 2

расстояние от A до

центра вписанной

окр.  $\triangle ABC$  - ?

Решение

1) пусть I - центр вписанной окружности  $\triangle ABC$

$\angle NAC = \alpha$   $MI'$  - расстояние от M до AB

$\angle BAI = \beta$   $NN'$  - расстояние от N до AC

2)  $NN'$  перпендикуляр к хорде AC, описанной окружности  $\triangle ABC$ , проходящей через середину  $\vee AC \Rightarrow$

$\Rightarrow$  по теореме о радиусах, ~~и~~ перпендикулярна хорде  $AN' = CN'$  и прямая  $NN'$  содержит центр описанной около  $\triangle ABC$  окружности

В продолжение на обратную сторону



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$7) \sin \beta = \frac{MM'}{AM} = \frac{4,5}{\sqrt{4,5^2 + 6^2}}$$

в  $\Delta AMM'$

$$\cos \beta = \frac{6}{\sqrt{4,5^2 + 6^2}} = \frac{AM'}{AM}$$

$$\sin 2\beta = \frac{9B}{4,5^2 + 6^2}$$

$$8) \sin \alpha = \frac{NN'}{AN} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + 4}}$$

в  $\Delta ANN'$

$$\cos \alpha = \frac{AN'}{AN} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{4a}{\sqrt{a^2 + 4}}$$

9) по т. синусов в  $\Delta ABC$

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$

$$\frac{AB}{\sin 2\beta} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{2b(4,5^2 + 6^2)}{9B} = \frac{2a(a^2 + 4)}{4a}$$

$$4,5^2 \cdot 4 + 6^2 = 9a^2 + 36$$

$$6^2 = \frac{9}{4}a^2 + 9 - 4,5^2$$

10) дополнительное построение  $AP \perp CM$

11) т. к.  $AI$  проходит через I-центр вписанной окружности  $\Delta ABC$ , то  $AI$  - биссектриса  $\angle BCA$

$$12) \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$$

$$\angle CAI = \frac{1}{2} \angle BCA = 90^\circ - \alpha - \beta$$

Готовых на обзор



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$13) \angle CAP = 90^\circ - \angle ACP = 90^\circ - \beta$$

$$\angle IAP = \angle CAP - \angle CAI = 90^\circ - \beta - 90^\circ + \beta + \alpha = \alpha$$

$$14) \sin \beta = \frac{AP}{ABC} \text{ в } \triangle APC$$

$$\frac{AP}{ABC} = \frac{4,5}{\sqrt{4,5^2 + 6^2}}$$

Подставив в  $\beta$  из пункта 9 решения

$$\frac{AP}{ABC} = \frac{4,5}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + 9}} = \frac{4,5}{3\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}} \Rightarrow AP = \frac{4,5 \cdot 2\sqrt{a}}{3\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}}$$

$$15) \cos \alpha = \frac{AP}{AI} \text{ в } \triangle API$$

$$\frac{AP}{AI} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4}} = \frac{a}{2\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}} = \frac{a}{2\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}}$$

Подставив AP из пункта 14 решения

$$\frac{3a}{AI \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}} = \frac{a}{2\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}}$$

$$\frac{3}{AI} = \frac{1}{2}$$

$$AI = 6$$

Ответ: 6

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1    2    3    4    5    6    7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

a

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = 2\sqrt{1+x^2} - 2 = 8$$

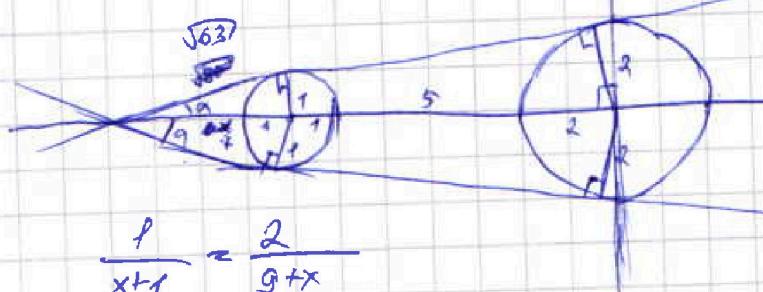
$$3\sqrt{1+x^2} = 18 \quad \cancel{x^2}$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{121}}$$

$$9 + 9x^2 = 121$$

$$9x^2 = 112$$

$$x^2 = \frac{112}{9}$$



$$\frac{1}{x+1} = \frac{2}{9+x}$$

$$\frac{-64}{55}$$

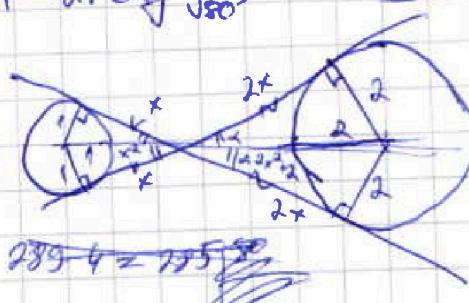
$$9 + x = 2x + 2 \quad x = 7$$

$$\alpha = \arctg \frac{1}{\sqrt{80}}$$

$$\alpha = \pm \arctg \frac{1}{\sqrt{80}}$$

$$-252/4$$

$$x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$$



$$289/4 = 72.5$$

$$5 + 3x^2 = 8$$

$$x^2 = 1 \quad x = 1$$

$$\begin{cases} x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 16x + 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0 \\ (a+1)x^2 + (16+20ab)x + 100b^2 + 64 = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{357}$$

$$100b^2 - 4 = k^2$$

$$100b^2 + 64 = t^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}$$

$\frac{a}{b}$  — несокр

$$HOD(a+b; a^2 - 8ab + b^2)$$

$$\frac{a^2 - 8ab + b^2}{a+b} = a - 7b + \frac{8b^2}{a+b}$$

$$a - 7b \quad 8b^2 \\ \cancel{a+b}$$

$$\frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b}$$

$$a+b - \frac{8ab}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{8b^2} = \frac{a+b}{\cancel{2b}}$$

$$(a; b) = 1$$

$$\frac{(a+b)^2}{b} - 8a$$

$$a = \frac{b}{m} \times \quad a^2 = \frac{b^2}{m^2} \times^2 \quad x^2 = \frac{b^2}{m^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$9 - 6 \cdot 3 \cdot 5 + 25 \\ \cancel{56}$$

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a^2 - 8ab + b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -b \\ ab = -b^2 \\ a+b = km \\ a^2 - 8ab + b^2 = hm \end{cases}$$

$$y = ax + 10b$$

$$\begin{cases} 2 = 10b \\ -1 = -8a + 10b \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{8}x + 2 \\ a^2 - 8ab + b^2 = 0 \end{cases}$$

$$9 - 6 \cdot 3 \cdot 5 + 25 = 34 - 90 = 38$$

$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = k^2 m^2 \\ a^2 - 8ab + b^2 = hm \end{cases} \quad -1 = -8a + 2 \quad 8a = 3 \quad a = \frac{3}{8} \quad b = \frac{2}{10}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = k^2 m^2 \\ a^2 - 8ab + b^2 = hm \end{cases}$$

1E

$$8ab = m(k^2 m - h) \quad x^2 + y^2 = 4 \quad b$$

$$\frac{b^2}{3}$$

$8ab \neq m$

$$x^2 + \frac{9}{64}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 = 4$$

$$8ab \neq p$$

$$8ab \neq 0$$

(8)

$$x \left( \frac{13}{64}x + \frac{3}{2} \right) = 0 \quad x = -\frac{3}{\frac{13}{64}} = -\frac{96}{73} \quad \cancel{1}$$

$$-8b^2 \neq 0$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

1K

$$8 \neq 0$$

$$(m \neq 8)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

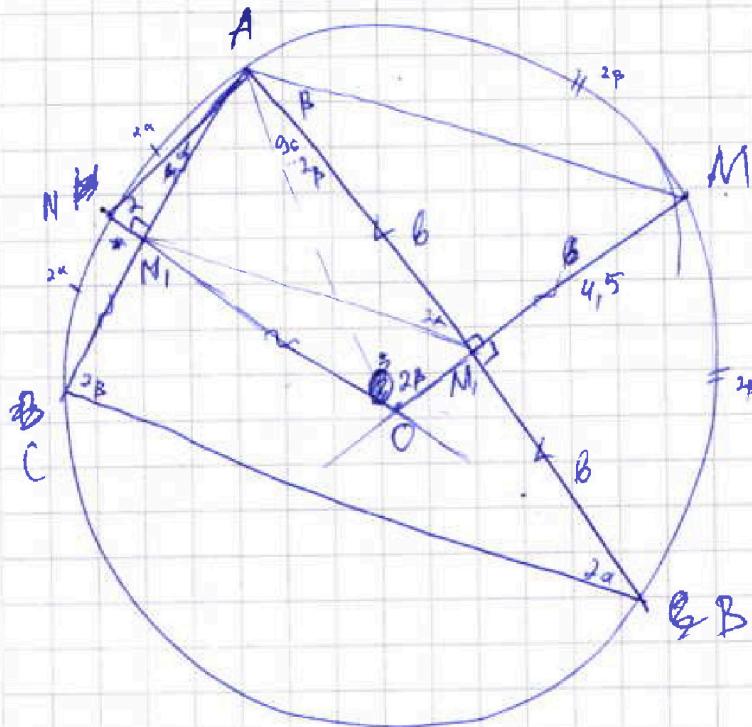
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ.**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 4,5 \quad b = 2$$

$$R - ?$$

$$360 - 2\alpha - 2\beta$$

$$360 - 2\alpha - 2\beta$$

$$\sin \beta = \sqrt{4,5^2 + b^2}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{4,5^2 + b^2}}$$

$$\sin 2\beta = \frac{2b}{\sqrt{4,5^2 + b^2}}$$

$$\frac{AB}{2 \sin 2\beta} = 2R$$

~~$$R = \frac{4,5^2 + b^2}{2}$$~~

$$\frac{2^2 + a^2}{4} = \frac{b(4,5^2 + b^2)}{9b} = R$$

~~$$\frac{9b}{4,5^2 + b^2} =$$~~

$$36 + 9a^2 = 4 \cdot 4,5^2 + 4b^2 \quad b^2 = 9 + \frac{9}{4}a^2 - 4,5^2$$

5)

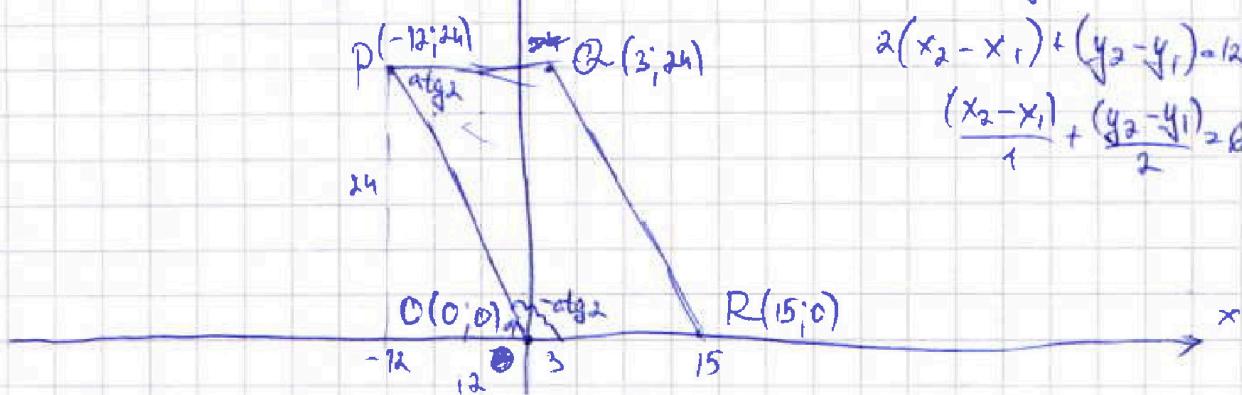
$$\alpha = \arctg 2$$

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$\frac{(x_2 - x_1)}{1} + \frac{(y_2 - y_1)}{2} = 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

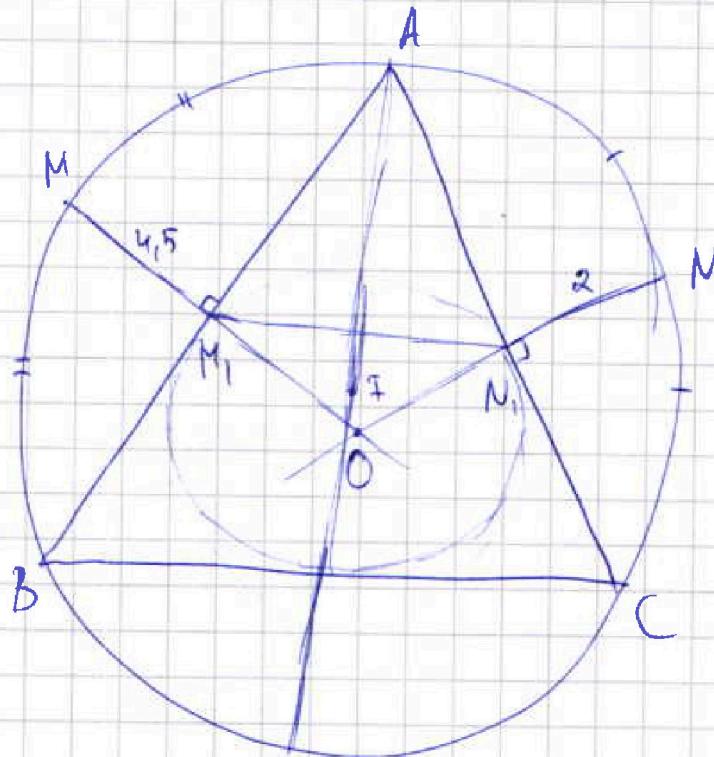
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



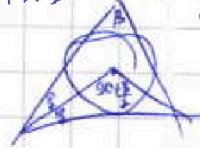
1) ~~sin~~, T.  $\sin$

в через  $a$

2) ~~нрнедж~~ к BP

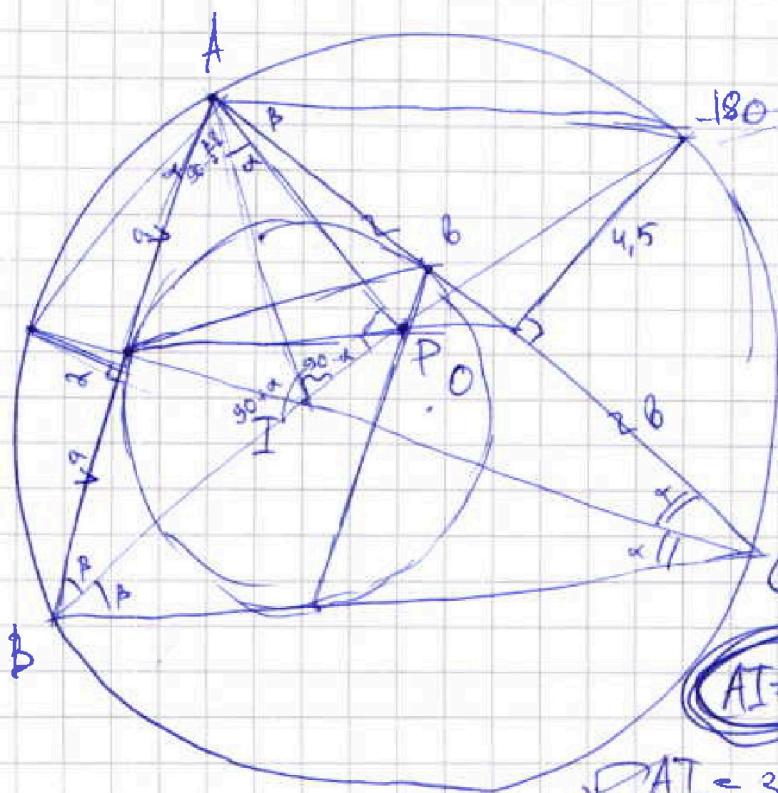
3)  $\angle BIA = 90 + \frac{\beta}{2}$

4)  $\sin \triangle BAP, \triangle IAP$



$$180 - \frac{\alpha}{2} - 90 + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

~~стар~~  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$



$$180 - 90 + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} - \beta = 90 + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{4,5}{\sqrt{4,5^2 + b^2}}$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{4,5}{2a \sqrt{9 + \frac{9}{4}a^2}}$$

$$AP = \frac{9a}{\sqrt{9 + \frac{9}{4}a^2}}$$

$$\frac{9a}{AI \sqrt{9 + \frac{9}{4}a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4}}$$

$AI = 6$

$$3AI \sqrt{1 + \frac{9}{4}a^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4}}$$

$$\sqrt{3AI} \sqrt{4(a^2 + 1)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} k$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} m$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} n$$

$\min abc - ?$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{28} \cdot 7^{34} mnk$$

$$abc = 2^{14} \cdot 7^{17} \cdot \sqrt{2mnk}$$

$$\text{Oval: } abc = 2^{14} \cdot 7^{17} \cdot 2^{18}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 37 \\ 14 \\ \hline 81 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 27 \\ 37 \\ \hline 27 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 39 \\ 2 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$m=2 \quad h=1 \quad k=1$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \\ + 34 \\ \hline 64 \end{array}$$

2)

$\frac{a}{b}$  иесокр

$$\begin{array}{r} 976 \\ - 8 \\ \hline 17 \\ - 16 \\ \hline 16 \end{array}$$

~~НОД~~( $a+b, a^2 - ab + b^2$ ) - ?

$$\frac{a+b}{a^2 - ab + b^2}$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 41 \\ \cancel{\mid} \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - ab + b^2 \\ \hline a^2 + ab \\ - 2ab + b^2 \\ \hline - 2ab + b^2 \\ \hline b^2 \end{array}$$

$$\frac{180 - 360 + 2x + 2\varphi}{2}$$

$$\frac{p}{\sqrt{1+x^2}} \quad l - \frac{2}{1+x^2}$$

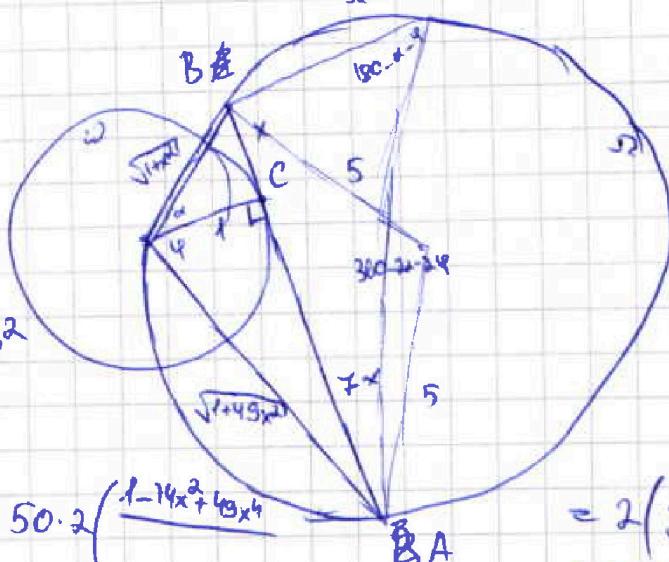
$$R_W = 1 \quad R_\Omega = 5$$

$$\cancel{x^2 - 6x + l}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{7x}{x}$$

$$8x - ?$$

3)



$$a - b = a^2 - b^2$$

$$\cos(2\pi - 2\alpha - 2\beta) =$$

$$= \cos(2(\alpha + \beta)) =$$

$$= 2\cos^2(\alpha + \beta) - 1 =$$

$$= 2 \left( \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}} - \frac{7x \cdot x}{\sqrt{1+49x^2}} \right)^2 - 1$$

$$= 2 \left( \frac{1-49x^2}{\sqrt{1+49x^2}} - 1 \right)^2, \quad \frac{484}{49} \frac{22}{44}$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 =$$

$$-7x + 2$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ 31 \\ \hline 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\frac{484}{49} \frac{22}{44}$$