



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



1) a_1, b_1, c_1 - степени двоек в разложении
чисел a, b, c на простые
 a_2, b_2, c_2 - степени троек, a_3, b_3, c_3 - степени пятёрок
 ~~$a_2 + b_2 = 8$~~

$$\begin{cases} a \cdot b = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 3^{12} \cdot 5^{22} \\ b \cdot c = k_2 \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{18} \\ a \cdot c = k_3 \cdot 2^{24} \cdot 3^{27} \cdot 5^{19} \end{cases}$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$$

$$a^2 b^2 c^2 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

$$a b c = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 3}$$

чем меньше $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$ - тем меньше $a b c$
аналогично. Аналогично $a_1, b_1, c_1 \dots$ обозначим
 $k_{12}, k_{22}, k_{32} \dots$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = k_{12} + 8 \\ b_2 + c_2 = k_{22} + 12 \\ a_2 + c_2 = k_{32} + 14 \end{cases}$$

система имеет решение при

$$k_{12} = k_{22} = k_{32} = 0$$

$$a_2 = 5, b_2 = 3, c_2 = 9$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = k_{13} + 14 \\ b_3 + c_3 = k_{23} + 20 \\ a_3 + c_3 = k_{33} + 21 \end{cases}$$

$$a_3 - b_3 = k_{13} - k_{23} + 6$$

$$2a_3 = 14 + k_{13} - k_{23} + k_{33}$$

что бы получилось возмущать $k_{33} = 1$,
и ост. = 0

$$a_3 = 8, b_3 = 6$$

$$c_3 = 14, b_3 = 6$$

$$b_3 = 6, c_3 = 11$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = k_{15} + 22 \\ b_5 + c_5 = k_{25} + 17 \\ a_5 + c_5 = k_{35} + 19 \end{cases}$$

$$a_5 - b_5 = 22 + k_{35} - k_{15}$$

$$a_5 + b_5 = 17 + k_{15}$$

$$2b_5 = -5 + k_{15} + k_{25} - k_{35}$$

$$k_{15} = 10, \text{ ост.} = 0$$

$$b_5 = 0$$

$$a_5 = 22$$

$$c_5 = 17$$

~~a~~ = Какие либо числа не являются степенями

2, 3, 5 приведут к увелич. произв. $\Rightarrow$ их нет в мин.

возможные

$$\begin{cases} a = 2^5 \cdot 3^9 \cdot 5^{22} \\ b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0 \\ c = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17} \end{cases} \Rightarrow a b c = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 10 \arcsin(\cos(\lambda)) &= \pi - 2\lambda \\ 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= \pi - 2\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsin(t) \left(t \in [-1, 1] \right) &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ \downarrow \\ 10 \arcsin(t) &\in [-5\pi, 5\pi] \\ \pi - 2\lambda &\in [-5\pi, 5\pi] \\ \lambda &\in [-2\pi, 3\pi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \lambda &\in [-2\pi, -\pi] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= \frac{\pi}{2} - \lambda - \pi \\ 5\pi - 10\lambda - 20\pi &= \pi - 2\lambda \\ 8\lambda &= -26\pi \\ \lambda &= -2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \lambda &\in [-\pi, 0] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= \pi - (\frac{\pi}{2} - \lambda) \\ 10\pi - 5\pi + 10\lambda &= \pi - 2\lambda \\ 12\lambda &= -4\pi \\ \lambda &= -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \lambda &\in [0, \pi] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= \frac{\pi}{2} - \lambda \\ 5\pi - 10\lambda &= \pi - 2\lambda \\ 8\lambda &= 4\pi \\ \lambda &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \lambda &\in [\pi, 2\pi] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= -\pi - (\frac{\pi}{2} - \lambda) \\ -10\pi - 5\pi + 10\lambda &= \pi - 2\lambda \\ 12\lambda &= 16\pi \\ \lambda &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \lambda &\in [2\pi, 3\pi] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= \frac{\pi}{2} - \lambda + 2\pi \\ 5\pi - 10\lambda + 20\pi &= \pi - 2\lambda \\ 8\lambda &= 24\pi \\ \lambda &= 3\pi \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \lambda = -2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, 3\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \frac{-\sqrt{a^2+9}}{4} \geq \frac{3\sqrt{a^2+9}+11}{2}$$

$$7\sqrt{a^2+9}+30 \geq 0 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$2) \frac{\sqrt{a^2+9}}{4} \leq \frac{-3\sqrt{a^2+9}+11}{2}$$

$$7\sqrt{a^2+9} \leq 30$$

$$\sqrt{a^2+9} \leq \frac{30}{7}$$

$$a^2 \leq \frac{30^2}{7^2} - 3^2$$

$$a^2 \leq \frac{9}{7} \cdot \frac{11}{7}$$

$$\frac{-3\sqrt{11}}{7} \leq a \leq \frac{3\sqrt{11}}{7}$$

1 & 2 $\Rightarrow a \in \left[-\frac{3\sqrt{11}}{7}; \frac{3\sqrt{11}}{7} \right]$ - мы не можем
найти b для a реш.

$$a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{11}}{7} \right) \cup \left(\frac{3\sqrt{11}}{7}; +\infty \right) - \text{можно.}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{11}}{7} \right) \cup \left(\frac{3\sqrt{11}}{7}; +\infty \right)$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 100 - 36) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{ax + 4b}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

Графики этих функций - окружности, кото-
рые не пересекаются, т.к. расстояние
между центрами = 10, а сумма радиусов 7

что бы было и реши нужно, что бы
в обоих урав при подстановке y было ≥ 0

$$1) x^2 + \left(\frac{ax + 4b}{3}\right)^2 - 1 = 0$$

$$9x^2 + a^2x^2 + 8abx + 16b^2 - 9 = 0$$

$$(a^2 + 9)x^2 + 8abx + 16b^2 - 9 = 0$$

$$D_1 = a^2 - (a^2 + 9)(16b^2 - 9) = 9a^2 + 81 - 16a^2b^2$$

$$D_1 = 16a^2b^2 - (a^2 + 9)(16b^2 - 9) = 9a^2 + 81 - 9 \cdot 16b^2 > 0$$

$$\frac{a^2 + 9}{9} > 16b^2$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + 9}}{3} < b < \frac{\sqrt{a^2 + 9}}{3}$$

$$2) x^2 + \left(\frac{ax + 4b - 30}{3}\right)^2 - 6^2 = 0$$

$$9x^2 + a^2x^2 - 2ax(4b - 30) + (4b - 30)^2 - 18^2 = 0$$

$$D_1 = a^2 - (a^2 + 9)(4b - 30)^2 - 18^2 =$$

$$= a^2 \cdot 18^2 + 9(4b - 30)^2 + 9 \cdot 18^2 > 0$$

$$6^2a^2 - (4b - 30)^2 + 18^2 > 0$$

$$9a^2 + 9 > (4b - 15)^2$$

$$-3\sqrt{a^2 + 9} < 4b - 15 < 3\sqrt{a^2 + 9}$$

$$\frac{-3\sqrt{a^2 + 9} + 15}{4} < b < \frac{3\sqrt{a^2 + 9} + 15}{4}$$

Рассмотрим случай когда
условия от D_1 и D_2 не пересекаются.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Решение: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_5^3(x) - \log_5 x^3(625) + 3 = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{1}{3 \log_5(2x)} + 3 = 0$$

$$3 \log_5^5(2x) - 23 + 9 \log_5(2x) = 0$$

$$\log_5^4(y) + 4 \log_5^3(y) - \log_5^3(0,2) + 3 = 0$$

$$\log_5^4(y) + \frac{1}{\log_5(y)} + \frac{1}{3 \log_5(y)} + 3 = 0$$

$$3 \log_5^5(y) + \frac{1}{\log_5} 23 + 9 \log_5(y) = 0$$

$$3 \log_5^5(2x) + 3 \log_5^5(y) + 9 (\log_5(2x) + \log_5(y)) = 0$$

$$(\log_5(2x) + \log_5(y)) (\log_5^4(2x) - \log_5^3(2x) \cdot \log_5(y) + \log_5^2(2x) \cdot \log_5^2(y) - \log_5(2x) \cdot \log_5^3(y) + \log_5^4(y) + 3) = 0$$

$$\begin{cases} \log_5(2x) + \log_5(y) = 0 \rightarrow \log_5(2xy) = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \quad xy = \frac{1}{2} \\ \log_5^4(2x) - \dots + \log_5^4(y) + 3 = 0 \rightarrow \text{н.к. всегда больше 0} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}.$$

~~log~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$(y_2 - y_1) : 5$$

$$y_2 - y_1 = 5k$$

$$-80 \leq y_2 - y_1 \leq 80$$

$$-16 \leq k \leq 16$$

$$x_2 - x_1 + k = 9$$

$$x_2 - x_1 = 9 - k$$

Если $y_1 : 5$, то мы хотим решить задачу
для парам. с коорд. $O'(0,0)$, $R'(28,0)$, $P'(-16,16)$,
 $Q'(2,16)$.

$$\text{т. е. } y_2 : 5 \quad \text{и} \quad \frac{80}{5} = 16$$

$$\text{и урав. } x_2 - x_1 + k = 9$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$9x^2 + a^2x^2 + 2a(4b-30)x + (4b-30)^2 - 324 = 0$$

$$\dots (4b-48)(4b-12) = 0$$

$$D_1 = a^2(16b^2 - 240b + 500) - (9+a^2)((4b-30)^2 - 324) =$$

$$D_1 = a^2(4b-30)^2 - (9+a^2)((4b-30)^2 - 324) =$$

$$= -9(4b-30)^2 + 9 \cdot 324 + 324a^2 > 0$$

$$9x^2 + (2x+16)^2 - 9 = 0$$

$$(9+a^2)x^2 + 8abx + 16b^2 - 9 = 0$$

$$D_1 = a^2 \cdot 16b^2 - (9+a^2)(16b^2 - 9) =$$

$$= -9 - 16b^2 + 81 + 9a^2 > 0 \Rightarrow -16b^2 + 9 + a^2 > 0$$

$$a^2 + 9 > 16b^2$$

$$D_1 = a^2(4b-30)^2 - (9+a^2)((4b-30)^2 - 324) =$$

$$= -9(4b-30)^2 + 324 \cdot 9 + 324a^2 =$$

$$= -(4b-30)^2 + 324 + 36a^2 = -16b^2 + 240b + 500 + 324 + 36a^2 > 0$$

$$-(2b-15)^2 + 81 + 9a^2 > 0$$

$$a^2 + 9 > \frac{(2b-15)^2}{9}$$

$$16b^2 < a^2 + 9$$

$$\begin{cases} b^2 < \frac{a^2 + 9}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2b-15)^2 < 9a^2 + 81 \end{cases}$$

$$-3\sqrt{a^2+9} < 2b-15 < 3\sqrt{a^2+9}$$

$$-\frac{\sqrt{a^2+9}}{4} < b < \frac{\sqrt{a^2+9}}{4}$$

$$\frac{-3\sqrt{a^2+9}+15}{2} < b < \frac{3\sqrt{a^2+9}+15}{2}$$

$$\frac{-3\sqrt{a^2+9}+15}{2} \geq 3\sqrt{a^2+9} \frac{\sqrt{a^2+9}}{4}$$

$$30 \geq 7\sqrt{a^2+9}$$

$$\frac{900}{49} \geq a^2 + 9$$

$$\frac{900-441}{49} \geq a^2$$

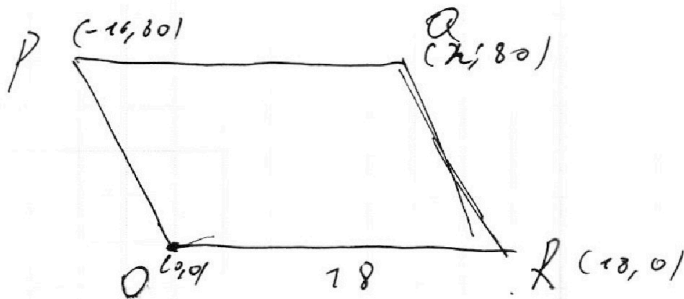
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$5x_2^2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$16^2 + 80^2 = (-16 + 80)^2 - 2 \cdot 16 \cdot 80 = 96^2 - 2560$$

$$x_2 - x_1 / 4x = 34$$

$$x_1 - y_1 = 0$$

$$5x_2 + y_2 = 45$$

$$y_2 = 45 - 5x_2$$

$$y_2 \geq 0 \quad x_2 \leq 9$$

$$y = \frac{ax+4b}{3} = \frac{ax}{3} + d$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{a^2 x^2}{9} + \frac{2}{3} axd + d^2 = 0$$

$$9x^2 + a^2 x^2 + 8axb + 16b^2 = 0$$

$$9x^2 + (ax+4b-30)^2 = 324$$

$$9x^2 + a^2 x^2 + 2(4b-30)(ax) + (4b-30)^2 = 324$$

$$(9+a^2)x^2 + 8axb + 16b^2 = 0$$

$$\Delta/4 = 16a^2 b^2 - (16b^2)(9+a^2) = 16a^2 b^2 - 16b^2 a^2 - 144b^2 + 87 + 9a^2 = 9a^2 + 87 - 144b^2 > 0$$

$$x^2 + \frac{(ax+4b-30)^2}{9} = 36$$



$$9x^2 + (a^2 x^2 + 16b^2 + 500 - 60ax - 240b + 8axb) = 324$$

$$(9+a^2)x^2 + (4ab-30a)x + 16b^2 - 240b + 576 = 0$$

$$\Delta/4 = 16a^2 b^2 - 240a^2 b + 1800a^2 - 16a^2 b^2 + 240ab + 24^2$$

$$\begin{aligned} 20^2 - 18^2 &= \\ &= 40 \cdot 4 = \\ &= 160 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 48 \cdot 12 &= \\ &= 24^2 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{x} + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \quad b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$$

$$\cancel{a^4 - b^4} \quad a^4 - b^4 - \frac{13}{3a} - \frac{13}{3b} = 0$$

$$(a-b)/(a+b)/(a^2+b^2) - \frac{13}{3} \left(\frac{a+b}{ab} \right) = 0$$

$$(a+b) \left((a-b)/(a^2+b^2) - \frac{13}{3ab} \right) = 0$$

$$\cancel{a^4 - b^4} \quad a^4 - 13a - 13b + 9a + 9b = 0$$

$$a^4 + b^4 + 9a + 9b = 0$$

$$(a+b)/(a^4 - ab^3 + a^2b^2 - a^3b + b^4 + 9) = 0$$

$$a = -b$$

$$a^4 - ab^3 + a^2b^2 - a^3b + b^4 + 9 > 0$$

$$\log_5(2x) = -\log_5(4)$$

$$\log_5(2x4) = 0$$

$$x4 = \frac{1}{2}$$

$$a^4 + b^4 - ab(b^2 + a^2) + a^2b^2 + 9 = 0$$

$$(a^2 - b^2 - ab)/(a^2 + b^2) + a^2b^2$$

$$(a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2 - ab((a+b)^2 - ab) - ab(b^2 + a^2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$y_2 - y_1 : 5$$

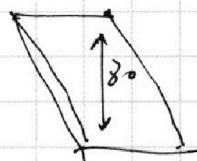
$$(y_2 - y_1) = 5(\cancel{x_2} \rightarrow x_2 - x_1 + 9 - x_2 + x_1)$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 5k \quad 0 \leq k \leq 76$$

$$3(x_2 - x_1) + 5k = 45$$

$$x_2 - x_1 + k = 9$$

$$x_2 - x_1 \geq 9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a & b = k_1 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ b & c = k_2 2^{22} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ a & c = k_3 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{aligned}$$

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{34} \cdot 3^{51} \cdot 5^{68} = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$$

$$a b c = 2^{22} \cdot 3^{27} \cdot 5^{35} \cdot \sqrt{3 k_1 k_2 k_3}$$

$$a b c = \sqrt{3 k_1 k_2 k_3} \cdot \min = 3$$

$$a b c = 2^{12} \cdot 3^{27} \cdot 5^{35}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot k_1 \\ b &= 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \\ c &= \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ b_2 + c_2 = 22 \\ a_2 + c_2 = 24 \end{cases} \quad \begin{aligned} & \frac{12}{2} \cdot \frac{27}{2} \\ & b_2 - a_2 = -2 \end{aligned}$$

$$a_2 - b_2 = 14 - 12 = 2$$

$$a_2 + b_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 5 \quad b_2 = 3 \quad c_2 = 9$$

$$\begin{aligned} a_3 + b_3 &= 14 \\ a_3 + c_3 &= 20 \\ a_3 + c_3 &= 22 \end{aligned}$$

$$a_3 - b_3 = 2 \quad a_3 = 8 \quad b_3 = 6 \quad c_3 = 14$$

$$\begin{aligned} a_5 + b_5 &= 12 \\ a_5 + c_5 &= 17 \\ a_5 + c_5 &= 39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_5 &= -5 \\ a_5 - b_5 &= 22 \\ a_5 + b_5 &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 12 + x_5 \\ b_5 + c_5 = 17 + y_5 \\ a_5 + c_5 = 39 + z_5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_5 - b_5 &= 12 + 2x_5 - y_5 \\ a_5 + b_5 &= 12 + x_5 \\ a_5 &= 12 + \frac{x_5 + 2x_5 - y_5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ b_2 + c_2 = 22 \\ a_2 + c_2 = 24 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 5 \quad b_2 = 3 \quad c_2 = 9$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 14 \\ b_3 + c_3 = 20 \\ a_3 + c_3 = 21 \end{cases} \Rightarrow a_3 - b_3 = 1 \Rightarrow 2a_3 = 15 \quad 15 \neq 2$$

$$\Rightarrow a_3 - b_3 = 2 \quad a_3 = 8 \quad b_3 = 6 \quad c_3 = 14$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



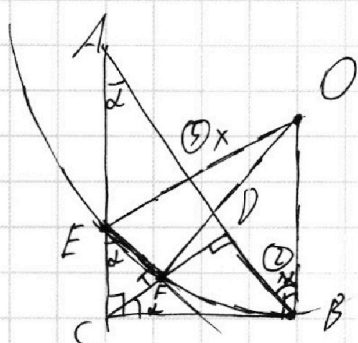
$$10 \arcsin(\cos(x)) = \pi - 2x$$

$$10 \cdot \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - 2x \quad \arcsin \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{20\pi}{2} - 20x = \pi - 2x$$

$$8x = \frac{5\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$



$$AB \parallel EF$$

$$AD:DB = 5:2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$$

$$CD^2 = 5x \cdot 2x = 10x$$

$$CD = x\sqrt{20}$$

$$S_{CEF} = \frac{EF \cdot CF}{2}$$

$$\frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD} = k$$

$$S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{EF \cdot CF}{2k^2}$$

$$a = x_1 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_4$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 + x_2 \\ a_2 + c_2 = 13 + z_2 \\ b_2 + c_2 = 12 + y_2 \end{cases}$$

$$a_2 - b_2 = 2 + 4z_2 + z_2 - 4z_2 + z_2$$

$$a_2 = 3 + \frac{x_2 - 4z_2 + z_2}{2}$$

$$a_2 = 3$$

$$b_2 = 8 + x_2 - 5 = 3$$

$$b_2 + c_2 = 12 + y_2 = 3 + 4z_2 = 3$$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$$

$$x \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 10\left(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi k\right)$$

$$5\pi - 20x - 20\pi k = \pi - 2x$$

$$2x = \frac{5\pi}{8} - 20\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{16} - \frac{5}{2}\pi k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 22 \\ b_5 + c_5 = 77 \\ a_5 + c_5 = 39 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_5 - b_5 &= 22 & a_5 + b_5 &= 22 \\ a_5 + b_5 &\geq a_5 - b_5 & \Rightarrow & -10 \geq 0 \end{aligned}$$

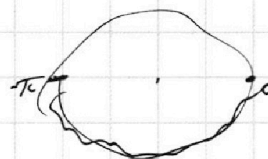
$$\frac{\pi}{2} - 2x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} a_5 + b_5 &= 22 \\ b_5 + c_5 &= 77 \\ a_5 + c_5 &= 39 \end{aligned}$$

$$a_5 = 22; b_5 = 0; c_5 = 17$$

$$\begin{aligned} a &= 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 22 \\ b &= 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 77 \\ c &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 39 \end{aligned}$$

$$abc = 2 \cdot 3 \cdot 5$$



$$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\sqrt{3} \quad 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$$

$$\arcsin \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] = 10 \cdot \arcsin \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi$$

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\sin(10 \arcsin(\cos(x))) = \sin(\pi - 2x) = \sin(2x)$$

$$\sin(\dots) - \sin(2x) = 0$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) =$$

$$= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) -$$

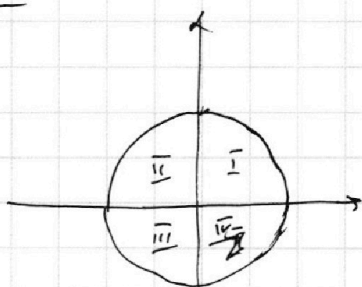
$$2 \cos\left(\frac{10 \arcsin(\cos(x)) + 2x}{2}\right) \sin(\dots) = 0$$

$$= (\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)) =$$

$$10 \arcsin(\cos(x)) + x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$= 2 \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$10 \arcsin(\cos(x)) - x = \pi k$$



$$1) x \in \mathbb{I} \quad \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$1) x \in [-2\pi; -\pi]$$

$$\frac{\pi}{2} - x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$10 \left(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi\right) = \pi - 2x$$

$$425\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$x = 424\pi$$

$$2x = 848\pi$$

$$x = 424\pi$$



$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - x - 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



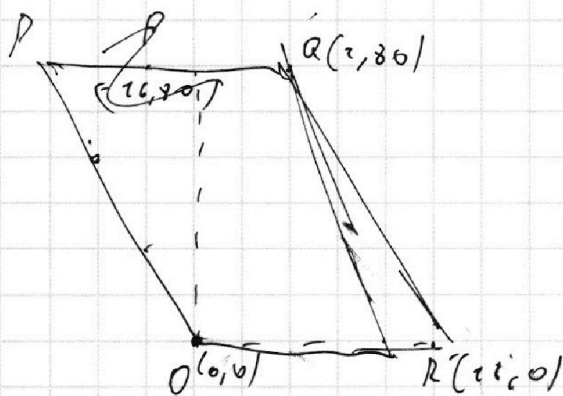
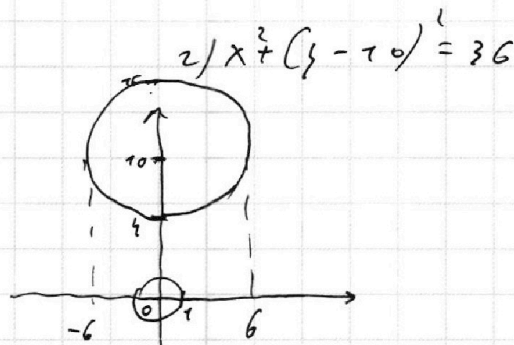
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 100 - 36) = 0 \end{cases} \quad \text{2 река.}$$

$$x^2 + y^2 - 20y + 100 - 36$$

$$x^2 + (y - 10)^2 - 36$$

$$1) x^2 + y^2 - 36 = 0$$

$$y = \frac{2x + 4}{3}$$



$$5x_2 + y_2 - 5x_1 - y_1 - 15 = 0$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 15$$

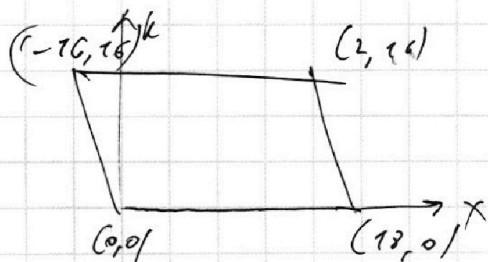
$$1) y_2 \geq y_1 \quad y_2 - y_1 : 5$$

$$x_2 - x_1 \leq 9$$

$$5(x_2 - x_1)$$

$$y_2 - y_1 = 5k$$

$$-16 \leq k \leq 16$$



$$x_2 - x_1 + k = 5$$

$$-6 \leq x_2 - x_1 \leq$$

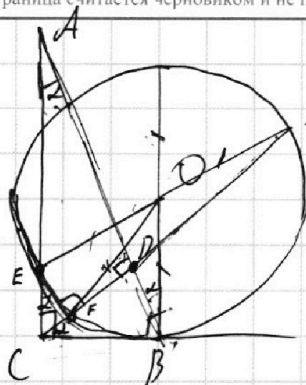
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD = 5x$$

$$DB = 2x$$

$$CD = x\sqrt{10}$$

$$\sin(\alpha) =$$

$$CB = \sqrt{4x^2 + 10x^2} =$$

$$CB = x\sqrt{14}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot \frac{2}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$CF = EF \cdot \sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{DB}{CB} = \frac{2x}{x\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$CF = EF \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{2}{11}}$$

$$\begin{cases} 10x - 2y + 4b = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + (1 - 10)^2 = 6^2 \end{cases} \quad y = \frac{4b + 10x}{3}$$

$$x^2 + \frac{16b^2 + 80bx + 100x^2}{9} = 1$$

$$5x^2(5 + 10)x^2 + 80bx + 16b^2 - 9 = 0$$

$$D = 64a^2b^2 - 4(144b^2 - 81 + 16a^2b^2 - 9a^2) =$$

$$= -4 \cdot 144b^2$$

$$D/4 = 144b^2 - (144b^2 - 81 + 16a^2b^2 - 9a^2) =$$

$$= -16a^2b^2 + 9a^2 + 81 \geq 0$$

$$a^2 \leq 9$$

$$-3 \leq a \leq 3$$

$$- (144b^2 + 9a^2 - 81)$$

$$81 \geq 144b^2 + 9a^2$$

$$x^2 + \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 = \sin^2(\alpha) = \frac{2}{7}$$

$$a^2 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3 = 0$$

$$a^4b^3 + 3 - ab(a^2 + b^3 + a^2b^2 + 3) = 0$$

$$(a^2 - b^2)^2 + 3a^2b^3 + 3 - ab(a^2 + b^3) = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 + 3 - ab(a^2 + b^3) = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - 5ab)^2 + ab(a^2 + b^3 + 3)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^1(2x) - 3 \log_{2x}(5) = \log_{8x}^3(625) - 3$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\log_5^1(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \log_{2x}^3(5) + 3 = 0$$

$$\log_5^3(2x) - \frac{4}{3} \log_5^2(2x)$$

$$t^3 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} - 3$$

$$t^3 - \frac{3+1}{3t} + 3 = 0$$

$$3t^4 - 4t - 1 = 0$$

$$\log_5 \begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_5^1(y) + \frac{4}{\log_5(y)} = -\frac{7}{3} \log_5(y) - 3$$

$$y^4 + \frac{4}{y} + \frac{1}{3y} + 3 = 0$$

$$y^4 + \frac{13}{3y} + 3 = 0$$

$$3y^5 + 9y + 13 = 0$$

$$\begin{cases} 3(t^5 + y^5) + 9(y - t) = 0 \\ t^5 + y^5 + 3(y - t) = 0 \end{cases}$$

$$(a^5 + b^5)(a^2 - ab + b^2) =$$

$$\begin{aligned} &= a^7 - a^4b + a^3b^2 + b^5a^2 - ab^4 + b^5 \\ &= a^7 + a^4b^2 - a^2b^3 - ba^4 + a^3b^2 + b^5a^2 - ab^4 + b^5 \\ &= a^7 + b^5 \end{aligned}$$

$$(t+y)(t^4 - t^3y + t^2y^2 - ty^3 + y^4) + (y-t) = 0 \quad (a+b)(a^2 - ab + b^2) =$$