



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача #1.

Пусть $a = 2^{x_a} \cdot 3^{y_a} \cdot 5^{z_a} \cdot v_a$; $(x_a, y_a, z_a \in \mathbb{Z}^+, v_a \in \mathbb{N})$
 $b = 2^{x_b} \cdot 3^{y_b} \cdot 5^{z_b} \cdot v_b$;
 $c = 2^{x_c} \cdot 3^{y_c} \cdot 5^{z_c} \cdot v_c$. -//-

Тогда $ab = 2^{x_a+x_b} \cdot 3^{y_a+y_b} \cdot 5^{z_a+z_b} \cdot v_a \cdot v_b \vdots 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$.

Значит, $x_a + x_b \geq 9$; $y_a + y_b \geq 10$; $z_a + z_b \geq 10$.

Аналогично, $bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \Rightarrow x_b + x_c \geq 14$; $y_b + y_c \geq 13$; $z_b + z_c \geq 13$.

$ac \vdots 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \Rightarrow x_a + x_c \geq 19$; $y_a + y_c \geq 18$; $z_a + z_c \geq 30$.

Сложив нерав-ва с x , получаем:

$x_a + x_b + x_b + x_c + x_a + x_c = 2(x_a + x_b + x_c) \geq 9 + 14 + 19 = 23 + 19 = 42$

Аналогично,

$2(y_a + y_b + y_c) \geq 10 + 13 + 18 = 41$

$2(z_a + z_b + z_c) \geq 10 + 13 + 30 = 53$

Значит, $x_a + x_b + x_c \geq 21$; $y_a + y_b + y_c \geq 20,5$ (а значит и 21, т.к. целые);

$z_a + z_b + z_c \geq 26,5$ (а значит и 27, т.к. целые).

В то же время $z_b \geq 0$, $z_a + z_c \geq 30 \Rightarrow z_a + z_b + z_c \geq 30$.

Значит, $abc = 2^{x_a+x_b+x_c} \cdot 3^{y_a+y_b+y_c} \cdot 5^{z_a+z_b+z_c} \cdot v_a v_b v_c \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Равенство достигается при $a = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{10}$; $b = 2^2 \cdot 3^2$; $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$.

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.

Дано:

$\triangle ABC$

CC — прямой

CD — высота

$AD:DB=3:1$

Окр. ω касается

BC в B ,

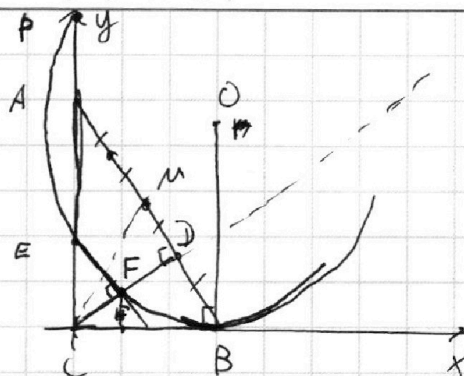
$CD \cap \omega = F$, $AC \cap \omega = E$,

$EF \parallel AB$.

Найти:

Выражение $\frac{S(CEF)}{S(ABC)}$.

$C=(0,0)$



Решение:

Пусть CM — медиана.
В т.р. CM — высота CD и является
медианой, значит $CM=CB$.

Но $CM=MB$, т.е. $\angle ACB=90^\circ$.

Значит, $\triangle CMB$ — равнобедренный,
т.е. $\angle CMB=60^\circ$.

$$AC = BC \cdot \tan 60^\circ = BC \cdot \sqrt{3}.$$

Пусть $BC=a$, радиус окружности r , $CE=x$.

Из точки C к окружности ω :

$$CE \cdot (2r - CE) = d^2 \quad (\text{если } AC \text{ повторно пересекает } \omega \text{ в точке } P,$$

то ω симметрично отн. центра к EP , как и AC , значит

E и P — середины AC и AP соответственно, т.е. $CP=2r-CE$).

$$E \text{ и } P, \text{ т.е. } r = \frac{CE + CP}{2} \Rightarrow CP = 2r - CE.$$

$$x \cdot (2r - x) = d^2. \quad \text{Но } r = \frac{a}{2} \Rightarrow 2r = a \Rightarrow x(a-x) = d^2 \Rightarrow x^2 - ax + d^2 = 0$$

$$\angle ECF = 90^\circ - \angle CDB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ. \quad (P = \frac{CE}{2} = \frac{x}{2}, \text{ т.е. } CP \perp EP, \text{ т.е. } CP \perp AB)$$

$$\text{т.е. } CF \perp AB \text{ и } EF \parallel AB. \quad x(F) = CF \cdot \cos 30^\circ = \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{4}.$$

$$y(F) = CF \cdot \sin 30^\circ = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{4}. \quad OF^2 = (r - \frac{x}{4})^2 + (a - \frac{x\sqrt{3}}{4})^2 = r^2.$$



На одной странице можно оформить только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐
1	2	3	4	5	6	7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи.

страница считается черновиком и не проверяется. Липа QR-кода неопыстима!

МФТИ

Задача 42 прологик.

$$\textcircled{P}^2 = \left(r - \frac{y}{x}\right)^2 + \left(a - x\sqrt{3}\right)^2 = r^2 \quad \text{или} \quad r^2 - \frac{2ry}{x} + \frac{y^2}{x^2} + a^2 - 2ax\sqrt{3} + x^2 = r^2$$

$$\frac{4x^2}{r^2} - \frac{2}{r} \cdot \frac{ax\sqrt{3}}{x} + a^2 = 0$$

$$\frac{4x^2}{r^2} - (r + a\sqrt{3}) \frac{2}{x} + a^2 = 0$$

$$4x^2 - 2rx - x^2 = 0$$

$$\frac{4x^2}{r^2} - \frac{2}{r} \cdot \frac{ax\sqrt{3}}{x} + a^2 = 0$$

$$\textcircled{M} \text{ тогда } \frac{x^2}{2} - \left(a^2 + x^2\right) \frac{2}{x} + a\sqrt{3} \frac{2}{x} + a^2 = 0$$

$\textcircled{u}$ (похожим на u)

$$x^2 - (a^2 + x^2) - 2ax\sqrt{3} + 4a^2 = 0$$

$$3a^2 - 2ax\sqrt{3} = 0$$

$\sqrt{u}$

$$x = \frac{3a}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$\text{Но } \Delta CEF \sim \Delta ABC \quad \text{с коэффициентом.} \quad \frac{CE}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{EF}{AC} = \frac{2a}{x} = \frac{\sqrt{3}a}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\frac{S(ABC)}{S(CEF)} = \frac{16}{3}.$$

Ответ: $\frac{16}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача #3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$

$$(\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot (\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = x + 5 \arccos(\cos x)$$

$$2\pi = x + 5 \arccos(\cos x)$$

$$① x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\arccos(\cos x) = x - 2\pi k$$

Значим, исходное ур-е ~~равносильно~~ становится:

$$2\pi = x + 5(x - 2\pi k)$$

$$2\pi + 10\pi k = 6x$$

$$\pi + 5\pi k = 3x$$

$$x = \pi \cdot \frac{(1+5k)}{3}$$

$$2\pi k \leq x < 2\pi k + \pi$$

$$2\pi k \leq \pi \cdot \frac{(1+5k)}{3} < 2\pi k + \pi$$

$$6k \leq 1+5k < 6k+3$$

$$k \leq 1 < k+3$$

$$-2 \leq k \leq 1$$

$$\text{Значим, } x \in \left\{ -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}.$$

$$② x \in [2\pi k - \pi; 2\pi k] \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos(\cos x) = 2\pi k - x$$

Значим, исходное ур-е становится:

$$2\pi = x + 5 \cdot (2\pi k - x)$$

$$4x = 10\pi k - 2\pi$$

$$x = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (5k - 1)$$

$$2\pi k - \pi \leq x < 2\pi k$$

$$2\pi k - \pi \leq \frac{\pi}{2} (5k - 1) < 2\pi k$$

$$4k - 2 \leq 5k - 1 < 4k$$

$$-2 \leq k - 1 < 0$$

$$-1 \leq k < 1$$

$$\text{Значим, } x \in \left\{ -3\pi; -\frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача #4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=3b-ax \\ \begin{cases} x^2+y^2-9=0 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3b-ax}{2} \\ y^2=\frac{9b^2-6abx+a^2x^2}{4} \\ \begin{cases} x^2+y^2-9=0 \leftarrow \text{кв.ур.} \\ x^2+y^2-12x+32=0 \leftarrow \text{кв.ур.} \end{cases} \end{cases}$$

4 корня могут быть только когда у обеих квадратичных уравнений есть 2 различных корня, и их корни не совпадают.

Их корни не совпадают: $\begin{cases} x^2+y^2-9=0 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-9=0 \\ 12x-41=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-9 \neq 0 \\ x \neq \frac{41}{12} \end{cases}$

У 1-го есть 2 корня:

$$x^2 + \left(1 + \frac{a^2}{4}\right)x^2 - \frac{3ab}{2}x + \frac{9b^2}{4} - 9 = 0$$

$$D = \frac{9a^2b^2}{4} - 4 \cdot \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) \cdot \left(\frac{9b^2}{4} - 9\right) = \frac{1}{4} \cdot (9a^2b^2 - (4+a^2)(9b^2-36)) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (9a^2b^2 - 9a^2b^2 - 36b^2 - 36a^2 + 36 \cdot 4) = 36 - 9a^2 - 9b^2 > 0.$$

У 2-го есть 2 корня:

$$\left(1 + \frac{a^2}{4}\right)x^2 - \left(\frac{3ab+24}{2}\right)x + \frac{9b^2}{4} + 32 = 0$$

$$D = \frac{9a^2b^2}{4} + \frac{2 \cdot 3ab \cdot 24}{4} + \frac{24^2}{4} - 4 \cdot \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) \cdot \left(\frac{9b^2}{4} + 32\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (9a^2b^2 + 4 \cdot 4 \cdot 9ab + 24^2 - (4+a^2)(9b^2+128)) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (4 \cdot 4 \cdot 9ab + 24^2 - 4 \cdot 9b^2 - 128 \cdot a^2 - 128 \cdot 4) = 36ab + 9b^2 - 32a^2 + 16 \cdot 9 - 16 \cdot 8 =$$

$$= 36ab - 9b^2 - 32a^2 + 16 > 0.$$

$$\begin{cases} 9b^2 > 36 \\ b^2 < 4 - a^2 \\ 9b \cdot (4a - b) > 32a^2 - 16 \end{cases}$$

Зв:

$$9b^2 - 36ab + 32a^2 - 16 < 0$$

Значит, $a^2 < 4 \Leftrightarrow |a| < 2$

$$\text{Корни: } b = \frac{36a^2 \pm 12\sqrt{16a^2+9}}{18}$$

$$D = (36a)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (32a^2 - 16) = 36 \cdot (36a^2 - 32a^2 + 16) =$$

$$= 36 \cdot (4a^2 + 16) = 12^2 \cdot (a^2 + 4)$$

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача #5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

II

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{\log_x (3^5)}{2} - 8$$

II

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$(\log_3 x)^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8 \log_3 x$$

II

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$2(\log_3 x)^5 + 7 + \frac{16}{3} \log_3 x = 0$$

возрастающая ф-ция,
т.к. функция возрастающая

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

II

$$\begin{cases} 5y > 0 \\ 5y \neq 1 \end{cases}$$

$$(\log_3 (5y))^4 + \frac{2}{\log_3 (5y)} = \frac{11 \log_{5y} (3)}{2} - 8$$

II

$$\begin{cases} 5y > 0 \\ 5y \neq 1 \end{cases}$$

$$(\log_3 (5y))^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8 \log_3 (5y)$$

II

$$\begin{cases} 5y > 0 \\ 5y \neq 1 \end{cases}$$

$$2(\log_3 (5y))^5 - 7 + 16 \log_3 (5y) = 0$$

Возрастающая ф-ция.

* ф-ция на $0^+ \in \mathbb{R}$ отрицательная, на $+\infty$ положительная.

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

Заметим, что

если x - корень первого

$$\text{ур-я, то } y = 3^{\frac{-\log_3 x}{5}} = \frac{1}{5x}$$

- корень второго, и

покажем: если y - корень

$$\text{второго, то } x = 3^{\frac{-\log_3 (5y)}{5}} =$$

$$= \frac{1}{5y} - \text{корень первого.}$$

Докажем это:

$$\text{пусть } z = \log_3 x, v = \log_3 (5y)$$

первое ур-е:

$$2z^5 + 16z + 7 = 0$$

второе:

$$2v^5 + 16v - 7 = 0.$$

При замене $v = -z$ или $z = -v$

переходим в первое; при

замене $z = -v$ первое во второе.

Значит, по крайней мере

каждое ур-е единственное

(слева возр. ф-ция, справа 0),

но если корень первого x ,

то корень второго $\frac{1}{5x}$.

$$xy = x \cdot \frac{1}{5x} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача #6, продолжение.

Посчитаем для каждого значения $f(B)$ от 0 до 60.

количество подходящих пар (A, B) таких, что $f(A) - f(B) = 33$.

Это и будет ответ.

~~Эт~~ Выбрать B у нас есть

Пусть $f(B) = x$ тогда $f(A) = 33 + x$

Выбрать B у нас есть $K(x)$ способов.

Если $33 + x > 60$, то у нас 0 способов выбрать A ,
иначе $K(33 + x) = K(x)$.

Значит, ответ равен $\sum_{x=0}^{27} (K(x))^2 = \sum_{x=0}^9 (K(3x))^2 + \sum_{x=0}^8 (K(3x+1))^2 +$

$$+ \sum_{x=0}^8 (K(3x+2))^2 = 10 \cdot 15^2 + 9 \cdot 14^2 + 9 \cdot 14^2 + 10 \cdot 15^2 + 18 \cdot 14^2 +$$

$$= 2250 + 1764 \cdot 2 = 2250 + 3528 = 5778.$$

Ответ: 5778 способов

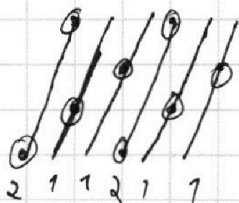
14
14

~~196~~

$$196 \cdot 9 =$$

$$= 1960 - 196$$

$$\begin{array}{r} 1960 \\ - 196 \\ \hline 1764 \end{array}$$



2 1 1 2 1 1 7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача #6, начало.

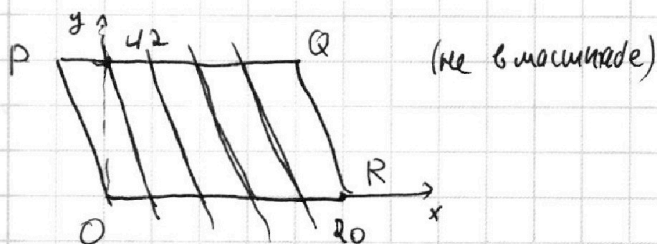
Пусть $f(A) = 3x(A) + y(A)$.

Нас ~~просят~~ просят посчитать кол-во целочисленных точек (A, B) в параллелограмме такие, что $f(A) - f(B) = 33$.

Заметим, что $\{M \mid f(M) = \text{const}\}$ — прямая ($3x + y = c \Leftrightarrow y = c - 3x$),

с углом наклона -3 . При этом сторона PQ нашего параллелограмма параллельна каждой из этих прямых,

т.е. $f(P) = f(Q) = 0$.



Значит, целочисленные решения

$f(A) = c$ будут лежать

внутри параллелограмма, если

$$1) c \in [f(O); f(R)] = [0; 60]$$

$$2) y(A) \in [y(O); y(P)] = [0; 42] \quad (\text{так как сторона } PQ \text{ параллельна оси } Oy)$$

так как стороны PQ и OR параллельны оси Ox .

Посчитаем кол-во ~~таких~~ решений $f(A) = c$ внутри параллелограмма ($c \in [0; 60]$)

~~и $f(A) = 3x + y = c, y \in [0; 42], x \in [0; 20]$~~ Пусть это кол-во будет $K(c)$.

$$y = c - 3x, \quad 3x + y = c, \quad y \in [0; 42], \quad x \in [0; 20]$$

$$y = c - 3x; \quad x \in \left[\frac{c}{3} - 14; \frac{c}{3} \right]. \quad \text{Значит, это кол-во}$$

равно кол-ву целых точек на $\left[\frac{c}{3} - 14; \frac{c}{3} \right]$, т.е. 15 при $c : 3$, иначе 14.

$$K(c) = \begin{cases} 15, & c : 3 \\ 14 & \text{иначе} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9) = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 32 + 9 - 12x &= 0 \\ 41 &\neq 12x \\ x &\neq \frac{41}{12} \end{aligned}$$

$$y = \frac{3b - ax}{2}$$

$$\left| \frac{3b - ax}{2} \right| < 2$$

$\frac{1}{4}$

$$(x^2 + t - 9) = 0$$

$$t < 9$$

$$x^2 + t - (2x + 32) = 0$$

$$D/4 = 36 - 32 - t = 4 - t$$

$$t < 4$$

$$t < 4$$

$$y^2 = \frac{9b^2 - 6abx + a^2x^2}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кола недопустима!

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ xy+z &= b \\ x+z &= c \end{aligned}$$

$$x+y+z = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\frac{9+14+19}{2} = \frac{23+19}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

5x

$$2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{21}$$

$$\frac{10+13+18}{2} = \frac{10+31}{2} = \frac{41}{2} = 20,5$$

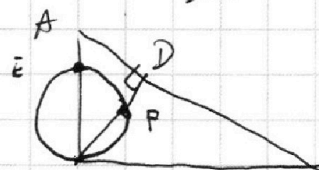
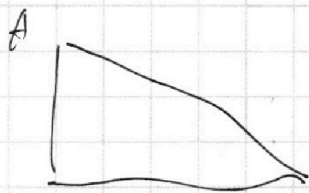
$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$b = 2^2 \cdot 3^2$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{16/7}$$

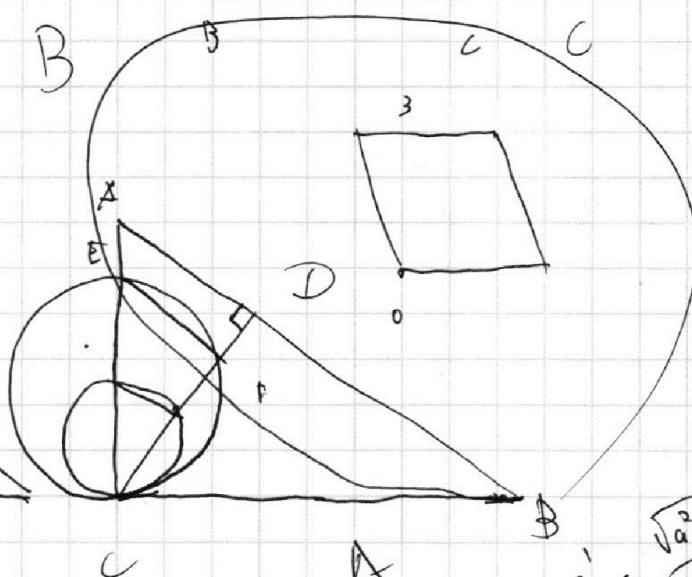
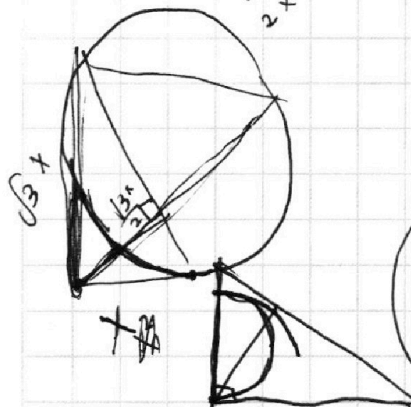
$$3 \cdot 3 + 11$$

$$\frac{10+13+30}{2} = \frac{40+13}{2} = \frac{53}{2} = 26,5 (2+)$$



$$\frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot x} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2}$$

B



$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{\sqrt{b^2 - h^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{b^2 - h^2} = 3\sqrt{a^2 - h^2}$$

$$b^2 - h^2 = 9a^2 - 9h^2$$

$$b^2 = 9a^2 - 8h^2$$

$$9a^2 - b^2 = \frac{8a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} 9x-y &= \frac{8xy}{x+y} \\ 9x^2 + 9xy - 9x - y^2 &= 8xy \\ 9x^2 &= y^2 \\ 3x &= y \end{aligned}$$

$$b = a/3$$

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$h^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2\pi = x + 5(2\sqrt{3}k - x)$$

$$4x = 10\sqrt{3}k - 2\sqrt{3}$$

$$4x = 2\sqrt{3} \cdot (5k - 1)$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (5k - 1)$$

$$5k - 1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (5k - 1) \leq 2\sqrt{3}k$$

$$4k - 1 \leq 5k - 1 \leq 4\sqrt{3}k$$

$$\begin{aligned} 5k - 1 &\leq 4\sqrt{3}k \\ 5k - 1 &\leq 4\sqrt{3}k \\ k &\leq 1 \end{aligned}$$

$$2\sqrt{3} = x + 5(x - 2\sqrt{3}k)$$

$$2\sqrt{3} \cdot (1 + 5k) = 6x$$

$$2\sqrt{3}k \leq x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (1 + 5k) \leq 2\sqrt{3}k + \sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3}k \leq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}k \leq 2\sqrt{3}k + \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{3}k \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{1}{3} \sqrt{3}k + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-2 \leq k \leq 1 \quad -2, -1, 0, 1$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \leq \frac{1}{3} \sqrt{3}k$$

$$-2 \leq k$$

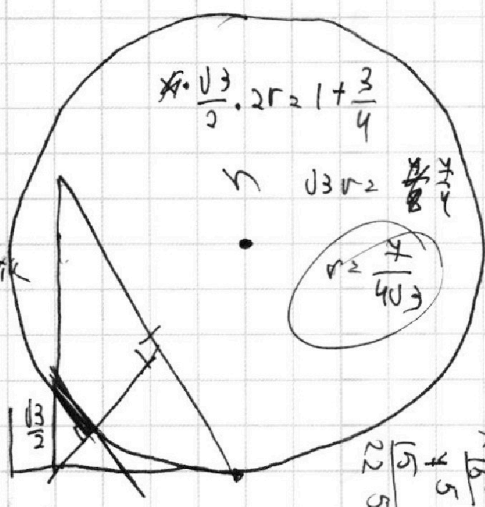
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} +$$

$$h \cdot \sqrt{h^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{h + \sqrt{3} - \sqrt{h^2 + 2\sqrt{3}h - 1}}{4}$$

$$8h - 8\sqrt{h^2 - 1} = \sqrt{3}h + 3 - \sqrt{3h^2 + 6h\sqrt{3} - 3}$$

$$(8 - \sqrt{3})h$$

$$2\sqrt{3} = x + 20\sqrt{3} - 5x \quad 4x = 18\sqrt{3}$$



$$-2\sqrt{5} + 4 - 16u = \left(\frac{\sqrt{4}}{4\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{196}{64 \cdot 3} = \frac{49}{16 \cdot 3}$$

$$= \left(\frac{14-3}{8\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{121}{64 \cdot 3} + \frac{25 \cdot 3}{64 \cdot 3} = \frac{250}{64 \cdot 3}$$

$$\begin{aligned} 5 \arccos(\cos x) &= x + \frac{\pi}{2} \\ 5\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) &= x + \frac{\pi}{2} \\ 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} &= x + 5 \arccos(\cos x) + \frac{\pi}{2} \\ 2\sqrt{3} &= x + 5 \arccos(\cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) x \in [0, \pi] \quad \arccos(\cos x) &= x \\ 2\sqrt{3} &= 6x \\ x &= \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) x \in [\pi, 2\pi] \\ \arccos(\cos x) &= 2\pi - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h-t)^2 + (1-\sqrt{3}t)^2 &= h^2 \\ h^2 - 2th + t^2 + 1 - 2\sqrt{3}t + 3t^2 &= h^2 \\ 4t^2 - 2(h+\sqrt{3})t + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D/4 &= (h+\sqrt{3})^2 - 4 = h^2 + 2\sqrt{3}h - 1 \\ t &= \frac{h+\sqrt{3} \pm \sqrt{h^2 + 2\sqrt{3}h - 1}}{4} \end{aligned}$$

$$t = \frac{h+\sqrt{3} - \sqrt{h^2 + 2\sqrt{3}h - 1}}{4}$$

$$t = \frac{h+\sqrt{3} - \sqrt{h^2 + 2\sqrt{3}h - 1}}{4} \quad 2\sqrt{3} = x + 5x - 20\sqrt{3}$$

$$3) x \in [2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}] \quad \arccos(\cos x) = x - 2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} = x + 5x - 10\sqrt{3} \quad \text{or} \quad 12\sqrt{3} = 6x \quad x = 2\sqrt{3}$$

$$4) x \in [3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}] \quad \arccos(\cos x) = 4\sqrt{3} - x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x > 0 \quad x \neq 1$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 (243) - 8$$

$$(\log_3 x)^4 + 6 \log_x 3 = \frac{\log_x 243}{2} - 8$$

$$243 = 3^5$$

$$\log_3 x)^4$$

$$a^t = b$$

$$b^{1/t} = a$$

$$\left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^4 + 6 \log_x 3$$

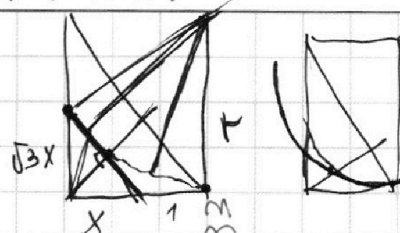
$$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{(\log_3 x)} = \frac{2 \cdot 15}{\log_3 x} - 8$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{10}{t} - 8$$

$$t^5 + 6 - 10 + 8t = 0$$

$$t^5 + 8t - 4 = 0$$

$$t^5 = 4 - 8t$$



$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 9 \\ f(4) &= 3(4) - 9 = 3 \\ f(1) &= 3(1) - 9 = -6 \\ \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{1}{\sqrt{13}} &= \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{1}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{1 + 3x^2}{2\sqrt{3x}} \end{aligned}$$

$$5t^5 + 30 - 2 + 40t = 0$$

$$5t^5 = 28 - 40t$$

$$\log_3(5y)^4 + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{4 \log_{5y}(3^{11})}{2} - 8$$

$$(\log_3 x)^4 + 6 \log_x 3 = \log_x^2 (243) - 8$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{\log_x 243}{2} - 8$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5 \log_x 3}{2} - 8$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8$$

$$2t^5 + 12 - 5 + 16t = 0$$

$$2t^5 = 16t - 7$$

$$-2t^5 = 16t + 7$$

$$2(x + \log_3 5)$$

$$x = \log_5 3$$

$$2 \cdot (\log_5 3)^5$$

$$2 \log_3(5y)^4 + \frac{4}{\log_3(5y)} = \frac{11}{\log_3(5y)} - 16$$

$$2u^5 + 4u - 11u + 16u = 0$$

$$\begin{cases} 2u^5 + 7 + 16u = 0 \\ 2t^5 - 7 + 16t = 0 \end{cases}$$

$$u = t$$

$$2u^5 + 7 + 16u = 0$$

$$2x^5 + 16x = 7$$

$$2x^5 + 16x - 7 = 0$$

$$x \approx \frac{7}{16}$$

$$u + t = 0$$