



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$ (ни точно знаем, что b чл. разложим.

и простые множители должны быть 2, 3, 5, возможно, в какой-то степени, или какой-то из

или будет еще иметь простые множители $p \neq 2, 3, 5$, то произведем не будет минимально).

Тогда т.к. $ab : 2^6$, $bc : 2^{14}$, $ac : 5^{16}$, $\alpha_1 + \beta_1 \geq 6$, $\beta_1 + \gamma_1 \geq 14$, $\gamma_1 + \alpha_1 \geq 16$, сложим эти неравенства:

$$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 36 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18, \text{ т.к. } abc : 2^{18}$$

Аналогично $\alpha_2 + \beta_2 \geq 13$, $\beta_2 + \gamma_2 \geq 21$, $\gamma_2 + \alpha_2 \geq 25 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{59}{2}$, но $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30 \Rightarrow abc : 3^{30}$

Поскольку $\gamma_3 + \alpha_3 \geq 28$ ($ac : 5^{28}$), $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28 \Rightarrow abc : 5^{28}$

$$\text{Зн. } abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

Пример a, b, c , когда $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$: $a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}$, $b = 2^2 \cdot 3^5$, $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$

при этом условие не делится ab, bc, ca на $2, 3, 5$ выполняется.

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$.

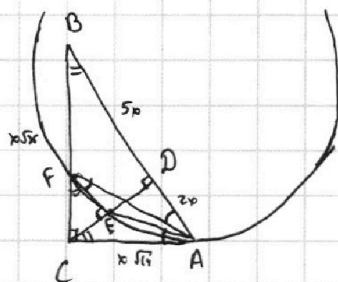
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $BD = 5x$, тогда, так $AB:BD = \frac{14}{5} = \frac{7}{5}$, $AB = 7x$
 $\Rightarrow AD = 2x$

$CD = \sqrt{AD \cdot BD} = x\sqrt{10}$, так CD — высота в прям. тр-ке
 по т. Пифагора $BC = x\sqrt{35}$, $AC = x\sqrt{14}$

Поскольку окр. касается AE в т. A ,
 $\angle CAE = \angle AFE$ по т. об угле между кас. и хордой

$\angle CBA = \angle ACD$ так $\triangle CBA$ и $\triangle CDA$ прям., углы $\angle CBA$ и $\angle ACD$ при 180° .

Тогда $\triangle CEA \sim \triangle BFA$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{CE}{BF} = \frac{EA}{FA} = \frac{CA}{BA} = \frac{x\sqrt{14}}{7x} = \frac{\sqrt{14}}{7}$

Пусть $CE = y$, тогда $BF = \frac{y \cdot 7}{\sqrt{14}} = \frac{y\sqrt{14}}{2}$

$CF = BC - BF = x\sqrt{35} - y \cdot \frac{\sqrt{14}}{2}$

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$, так $EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF = 90^\circ$

тогда $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow \frac{y}{x\sqrt{10}} = \frac{x\sqrt{35} - y \frac{\sqrt{14}}{2}}{x\sqrt{35}} \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{35} - y \frac{\sqrt{14}}{2}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow y\sqrt{14} = 2x\sqrt{35} - y\sqrt{14} \Rightarrow y\sqrt{14} = x\sqrt{35} \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\triangle CAD \sim \triangle FCE$ по 2 углам $\Rightarrow$ коэф. подобия $k = \frac{AD}{CE} = \frac{2x}{y} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

Но тогда $\frac{S_{ACD}}{S_{FCE}} = k^2 = \frac{8}{5}$

Ответ: $\frac{8}{5}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow \arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \quad (*)$$

Обл. опрег: $\sin x \in [-1; 1]$ (это всегда верно), $0 \leq \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -9\pi \leq -2x \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}\pi.$

$$(*) \cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) \Leftrightarrow \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) \Leftrightarrow \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = \pi - \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x}{5} = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ \frac{6x}{5} = \frac{7\pi}{5} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \\ x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1) \quad (2)$$

Найдем, при каком k x попадает в обл. опрег. из (1):

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \leq \frac{9}{2}\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{5}{2}k \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 2$$

Тогда $k=0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$; $k=1 \Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi$; $k=2 \Rightarrow x = \frac{9}{2}\pi.$

Найдем, при каком k x попадает в обл. опрег. из (2):

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k \leq \frac{9}{2}\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{7}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{3}k \leq \frac{10}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{5}{3} + \frac{5}{3}k \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq 1+k \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq k \leq 2$$

Тогда $k=-1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$; $k=0 \Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi$; $k=1 \Rightarrow x = \frac{13}{6}\pi$; $k=2 \Rightarrow x = \frac{27}{6}\pi = \frac{9}{2}\pi.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi; \frac{13}{6}\pi; \frac{9}{2}\pi.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

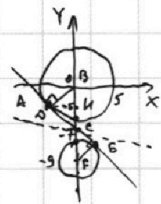
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+16y+77)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+16y+77=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+8)^2=4 \end{cases}$$



Заметим, что $x^2+y^2=25$ - окружность с центром в начале координат и радиусом 5
 $x^2+(y+8)^2=4$ - окружность с центром в т. $(0,-8)$ и радиусом 2.

$5x+6ay-b=0$ - прямая, т.е. она не может иметь с окр. более, чем 2 точки, з.н. чтобы система имела ровно 4 решения, прямая должна пересекать обе окружности в 2 точки.

Пусть $a=0$, тогда $5x=b$, при $b=0$, $x=0$, прямая имеет по 2 точки общие с каждой окружностью. $\Rightarrow a=0$ подходит

Если $a \neq 0$, то $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$, т.е. для каждого a нужно подобрать b , чтобы найти при заданном угловом коэф. свободной зам. чтобы было 4 т. пересечения.

Заметим, что если a верно, то для $-a$ тоже верно, т.к. можно взять $b' = -b$ и тогда уравн. прямой и обеих окруж. будут симм. относи. Оу

Пусть $a > 0$. Заметим, что в случае касания прямой та, что окружность оказываются на разных сторонах от нее, нет такого b , т.к. при увеличении b , прямая будет сдвигаться вниз, пересек. с верхней окр. не будет, при уменьшении, прямая будет сдвигаться вверх, пересек. с нижней окр. не будет. При этом для любого $a > 0$ (пусть a_0 - знач. a при касании) можно найти такое b , т.к. при касании с 1 окр., прямая не будет иметь общ. точек с другой, а если $a < a_0$, то можно рассмотреть случай касания с 1 окр., тогда с другой будет 2 т. пересечения, т.к. 1 угловой коэф. новой прямой будет больше, з.н. можно будет немного увеличить b (на все мень. величину) и по 2 т. пересек. будет с каждой прямой. Тогда остается найти a_0 , и $a \in (-a_0; a_0)$.

~~Найдем a_0 и b для касания с 1 окр. Т. пересечения прямой с Оу - $(0; \frac{b}{6a})$, с Ох - $(\frac{b}{5}; 0)$~~

Тогда в треугольнике ABC , AD - высота $AB = \frac{|b|}{5}$, $BC = \frac{|b|}{6a_0}$, $\angle C = \arctan \frac{5}{6a_0}$.
 $(b < 0 \Rightarrow AB = -\frac{b}{5}, BC = -\frac{b}{6a_0})$ $BD = \frac{b}{5}$. $\triangle CEF$ - прямоугол. $\triangle BDC \sim \triangle FEC$ $k = \frac{BD}{EF} = \frac{5}{2}$
 $\Rightarrow \frac{BC}{CF} = \frac{BD}{EF} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{-\frac{b}{6a_0}}{9 + \frac{b}{6a_0}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{-b}{54a_0 + b} = \frac{5}{2} \Rightarrow -2b = 270a_0 + 5b \Rightarrow 270a_0 + 7b = 0 \Rightarrow -b = \frac{270}{7}a_0$

$BC = \frac{270}{7} \cdot \frac{90}{14} = \frac{45}{7}$, ~~Найдем a_0 и b для касания с 1 окр.~~ $AB = \frac{54a_0}{7}$, $AD = \sqrt{\frac{45^2}{49} - 5^2} = \frac{5}{7}\sqrt{81-49} = \frac{5}{7}\sqrt{32} = \frac{10}{7}\sqrt{2}$
 $\Rightarrow \frac{5}{7}\sqrt{32} = \frac{10}{7}\sqrt{2}$. Вычислим высоту AD из $\triangle ABC$: $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{5 \cdot \frac{54a_0}{7} \cdot \frac{5}{6a_0}}{\frac{45}{7}} = \frac{10}{9}\sqrt{2}$
 т.е. коэф. $2 = \frac{10}{9}\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{81-49} = 5\sqrt{32} = \frac{5}{9}\sqrt{32} \Rightarrow 2(-\frac{10}{9}\sqrt{2}; -\frac{5}{9}\sqrt{2})$
 $-\frac{5}{9}\sqrt{2} = -\frac{5}{6a_0} \cdot (-\frac{10}{9}\sqrt{2}) + \frac{45}{7} \Rightarrow \frac{50}{54a_0} = \frac{45}{7} \Rightarrow \frac{50}{54a_0} = \frac{45}{7} \Rightarrow a_0 = \frac{25\sqrt{2}}{26} \cdot \frac{63}{45 \cdot 9 - 35\sqrt{2}}$
 Ответ: $(-\frac{25 \cdot 63\sqrt{2}}{26 \cdot (45 \cdot 9 - 35\sqrt{2})}; \frac{25 \cdot 63\sqrt{2}}{26 \cdot (45 \cdot 9 - 35\sqrt{2})})$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x \frac{1}{121} - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \frac{1}{3} \cdot (-2) \log_x 11 - 5$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 + \frac{2}{3} \log_x 11 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3 \log_{11}^4 x - 16 \log_x 11 + 15 = 0 \Leftrightarrow 3 \log_{11}^4 x - \frac{16}{\log_{11}^4 x} + 15 = 0$$

$$2. \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y} (11^{-13}) - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5$$

$$\Leftrightarrow 3 \log_{11}^4 (0,5y) + 16 \log_{0,5y} 11 + 15 = 0 \Leftrightarrow 3 \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{16}{\log_{11}^4 (0,5y)} + 15 = 0$$

$$\text{Заметим, что если } xy = 2, \text{ то } y = \frac{2}{x} \Rightarrow \log_{11} 0,5y = \log_{11} \frac{1}{x} = -\log_{11} x$$

$$\Rightarrow 3 \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{16}{\log_{11}^4 (0,5y)} + 15 = 3 \log_{11}^4 x + \frac{16}{\log_{11}^4 x} + 15 = 0, \text{ т.е. если есть}$$

x , удовлетвор. условию, то $xy = 2$ возможно.



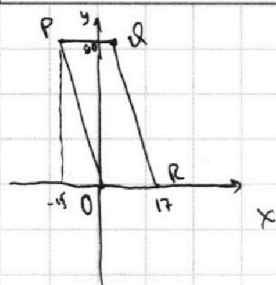
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что $-90 \leq y_2 - y_1 \leq 90$, $-32 \leq x_2 - x_1 \leq 32$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

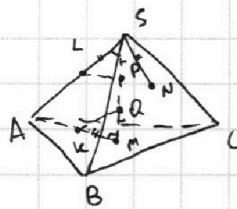
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



МФТИ



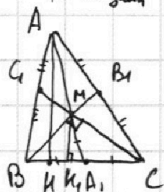
а) $SP = MQ$, тогда расца ствель точки S и M относително Ω

deg $S = SL^2 = SP \cdot SA$ (г.к. камен), deg $M = M_k^2 = m_a \cdot m_p$ (г.к. камен, б.к.)

Ho $MQ = SP$, $MP = SQ \Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow SL = MK$, $\angle LSP = \angle KMQ \Rightarrow \angle KMQ = \angle LSP$

→ $\triangle ASA - p/s$, т.е. $AM = AS = 20$, но $AA_1 = \frac{3}{2} AM$ (та же самая длина т. пересечения)

всего ребра в оттоке 21 от вершины) $\Rightarrow AA_1 = 30$. Расс. тр-к ABC



$AN = 20 \Rightarrow MA_1 = 10$, но $BC = 20$ но $AC = 20 \Rightarrow MA_1 = BA_1 = A_1C = 10$, $\angle BMC = 90^\circ$ (медиана равна половине стороны, к кот. проведена)

Поскольку $\frac{AM}{AA_1} = \frac{1}{3}$, отсюда высота из A к BC равна: $\frac{M_{BC}}{AM} = \frac{1}{3}$

$$S_{ABC} = 180 \Rightarrow \frac{Ak \cdot Bx}{2} = 180 \Rightarrow Ak = 18 \Rightarrow Mk_1 = 6 \Rightarrow S_{B_{Mk_1}} = \frac{Bx \cdot Mk_1}{2} = 60$$

ho $S_{BAC} = \frac{BM \cdot MC}{2}$ ($\angle BAC = 30^\circ$) $\Rightarrow BM \cdot MC = 120$, ho $BM = \frac{2}{3}BB_1$, $MC = \frac{2}{3}CC_1$

$$\rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{9}{4} BA \cdot AC = 270, \text{ тогда } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 270 = 8100.$$

8) Гломерулы N-7. Кремниевые сферы с на-7640, $SN = SL \Rightarrow SL = 6$

Folge $AL = 14$, $AK = 14$, $KM = 6$

Рис. 0-3. Среда, точка $OL \perp LS \Rightarrow OLS$ -прямая $n-k \rightarrow OS = 10$

Аналогично $OM = 10$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

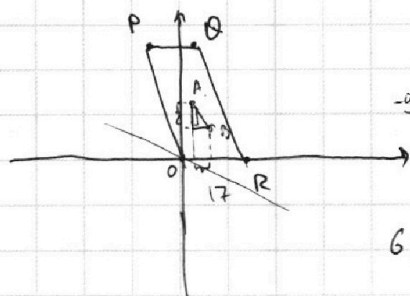
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} a \cdot A &= 5 \\ -15a &= 50 \\ a &= -\frac{10}{3} \\ -6a &= 20 \\ -6a + 10a &= 20 \end{aligned}$$



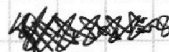
$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$-90 \leq y_2 - y_1 \leq 90$$

$$y_2 - y_1 : 6$$

$$0, 6, 12$$

$$6x + y =$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

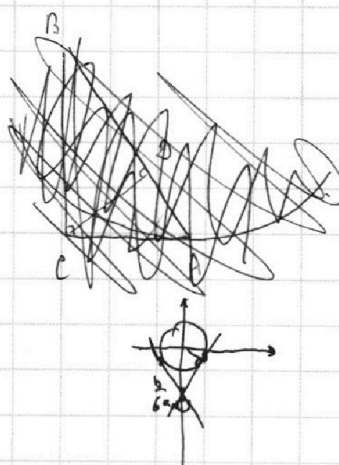
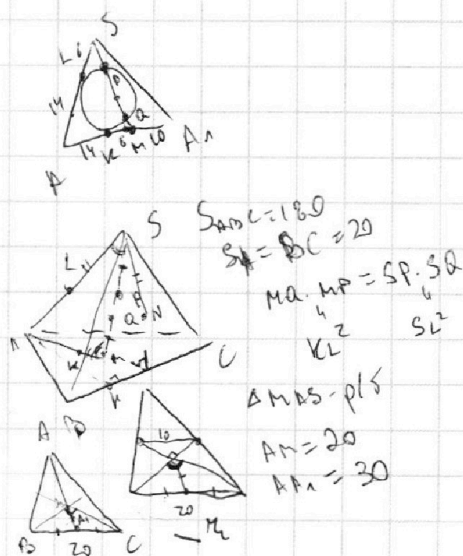
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} 11 &= \log_{11}^4 \frac{1}{121} = 5 \\ \log_{11}^4 x - 6 \log_{11} 11 &= -\frac{2}{3} \log_{11} 11 - 5 \\ 3 \log_{11}^4 x - 16 \log_{11} 11 + 15 &= 0 \\ 3 \log_{11}^4 x - \frac{16}{\log_{11} x} + 15 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{11}^4(0,5) + \log_{0,5} 11 &= \log_{0,125} 3 (11^{-13}) - 5 \\ \log_{11}^4(0,5) + \log_{0,5} 11 &= -\frac{13}{3} \log_{0,5} 11 - 5 \\ 3 \log_{11}^4(0,5) + 16 \log_{0,5} 11 + 15 &= 0 \\ t &= 0,5 \\ 3 \log_{11}^4(t) + 16 \log_{11} t + 15 &= 0 \\ 3 \log_{11}^4 t + \frac{16}{\log_{11} t} + 15 &= 0\end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11}$$

$$bc: 2^{14} 3^{21} 5^{11}$$

$$ac: 2^{16} 3^9 5^{28}$$

$$a = 2^{d_1} 3^{d_2} 5^{d_3}$$

$$b = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$$

$$c = 2^{d_1} 3^{d_2} 5^{d_3}$$

$$d_1 + a_1 \geq 6, d_2 + a_2 \geq 13, d_3 + a_3 \geq 11$$

$$a_1 + b_1 \geq 14, a_2 + b_2 \geq 21, a_3 + b_3 \geq 13$$

$$d_1 + d_2 \geq 16, d_2 + d_3 \geq 25, d_1 + d_3 \geq 28$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq \frac{59}{2} \geq 29.5, d_1 + a_2 + b_3 \geq 28$$

$$a_1 + d_1 + b_1 \geq 30$$

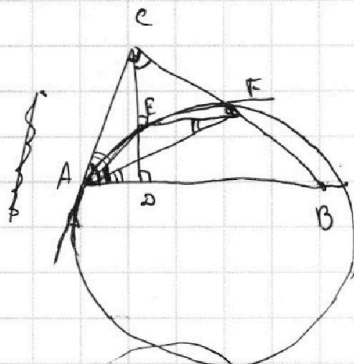
$$d_1 + d_2 + b_1 \geq 18$$

$$abc \geq 2^{16} 3^{30} 5^{28}$$

$$a = 2^4 3^8 5^{13}$$

$$b = 2^2 3^5 5^{10}$$

$$c = 2^2 3^{17} 5^{15}$$



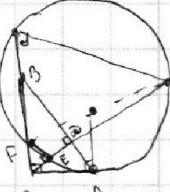
$$\frac{AD}{BD} = \frac{14}{19} = \frac{7}{5}$$

из подобия

$$BA \cdot DA = BC^2$$

$$\triangle ACD \sim \triangle CFE$$

$$CD = \sqrt{10}$$



$$\begin{aligned} & \angle A \leq \angle C \leq \angle B \\ & -5 \leq -20 \leq 10 \\ & 0 \leq 9 - 20 \leq 10 \\ & 10 \leq 9 - 20 \leq 10 \\ & 0 \leq 9 - 20 \leq 10 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ b^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

$$5x + 6ay = b$$

$$y = 0$$

$$x = \frac{b}{5}$$

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

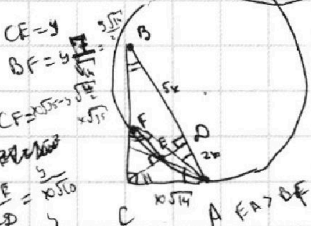
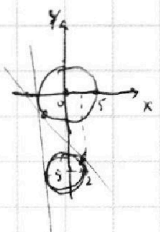
$$b = 0$$

$$5x = b$$

$$x = \frac{b}{5}$$

$$b = 0$$

Случай $a=0$. Тогда $5x = b$.
Если $b=0$, то $x=0$.
Если $b \neq 0$, то $x = \frac{b}{5}$.
Если $a \neq 0$, то $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$.



$$\triangle CEA \sim \triangle BFA$$

$$\sqrt{3} = \frac{CA}{BA} = \frac{CE}{BF} = \frac{EA}{FA}$$

$$10 \cos \alpha \cos (\sin \alpha) = 9a - 2p$$

$$\sin \alpha \in (0, \pi) \Rightarrow \sin \alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in (0, \pi) \Rightarrow \alpha \in (0, \pi)$$

$$\sin \alpha = \cos \left(\frac{9\pi}{10} - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \left(\pi - \left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} \right) \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{10} - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{5} - \frac{4\pi}{10} \right) \right) = \sin \left(\frac{\pi}{5} - \frac{4\pi}{10} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - p = \frac{9\pi}{10} - \frac{\pi}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - p = \frac{\pi}{5} - \frac{4\pi}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{4}{5}x = \frac{4\pi}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{6}{5}x = -\frac{14\pi}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x = \frac{\pi}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{5}x = \frac{7}{10} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 5\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7}{6} + 5\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} - \frac{4\pi}{10} + 2\pi k \\ x = \pi + \frac{4\pi}{10} - \frac{\pi}{5} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{5} = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi k \\ \frac{6\pi}{5} = \frac{14\pi}{10} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 5\pi k \\ x = \frac{7}{6} + 5\pi k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & k=4n \\ & x = -\frac{\pi}{2} + 10\pi n \\ & k=1, n=1 \\ & x = \frac{7}{6} + 10\pi n \end{aligned}$$

$$2\pi n$$

$$k=4n+2$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 10\pi n + 5\pi = \frac{9\pi}{2} + 10\pi n$$

$$k=4n+3$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 10\pi n + \frac{15\pi}{2} = 7\pi + 10\pi n$$

$$\frac{2x\sqrt{35} - 5\sqrt{14}}{2\sqrt{7}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$20\sqrt{35} - 5\sqrt{14} = 5\sqrt{14}$$

$$10\sqrt{35} = 10\sqrt{14}$$

$$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{14}{35}}$$

$$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ADC$$

$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ADC}} = k^2 = \frac{8}{5}$$

$$k = \frac{AD}{CE} = \frac{20}{5} = 4$$