



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~1
Числа a, b и c должны быть вида ^{здесь x_1, y_1, z_1 и т.д. - натуральные числа!!!}
 $a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$; $b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$; $c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$ т.к.
если у них есть ещё какие-то простые
множители, то abc точно не будет наименьшим
 $abc = 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 3^{y_1+y_2+y_3} \cdot 5^{z_1+z_2+z_3}$

При этом $ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$ и т.д. по условию
для иском: $\Rightarrow x_1+x_2 \geq 9$; $x_2+x_3 \geq 14$; $x_1+x_3 \geq 19$

Тогда $x_1+x_2+x_3 \geq \frac{2(x_1+x_2+x_3)}{2} \geq \frac{9+14+19}{2} = 21$
(знак '+' т.к. при произведении степени складываются)
 $x_1+x_2+x_3 \geq 21$

Аналогично для y и z и z и z :

$$y_1+y_2+y_3 \geq \frac{10+13+18}{2} = 20\frac{1}{2} \Rightarrow \text{и } y \text{ и } z \text{ целые} \Rightarrow y_1+y_2+y_3 \geq 21$$

$$z_1+z_2+z_3 \geq \frac{10+13+30}{2} = 26\frac{1}{2}$$

$$z_1+z_2+z_3 \geq 27$$

Чтобы abc было минимально, $x_1+x_2+x_3$,
 $y_1+y_2+y_3$, $z_1+z_2+z_3$ тоже должны быть минимально-
возможными

$$\Rightarrow x_1+x_2+x_3 = 21; y_1+y_2+y_3 = 21; z_1+z_2+z_3 = 27$$

И минимальное $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



~2. по условию:

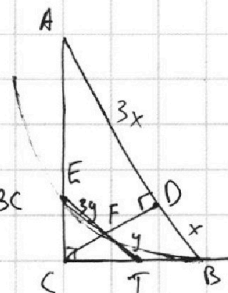
$\angle C = 90^\circ$. $CD \perp AB$

B - точка касания

$AB \parallel EF$, $\frac{AD}{BC} = \frac{3}{1}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$

$\triangle ACD \sim \triangle BCD \sim \triangle ABC$
и $\triangle ACD \sim \triangle ECF$
по 2 углам.



Пусть $T = EF \cap BC$.

Тогда TB - касательная к окр., TE - секущая

$$\Rightarrow TF \cdot TE = BT^2$$

Пусть еще $AD = 3x$ и $BD = x$ и $EF = 3y$ и $CF = y$
(Заметим, что $\frac{EF}{TF} = \frac{AD}{BD}$ из подобия $\triangle CEF \sim \triangle ACD$ по 2 углам)

$$\text{Тогда } BT = \sqrt{TF \cdot TE} = \sqrt{y \cdot (3y + y)} = 2y$$

При этом CD - высота $\triangle ABC$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{3}x$$

$$\Rightarrow \text{из } \triangle BCD: BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = 2x$$

$$\text{и } CT = \frac{y}{x} \cdot 2x = 2y \Rightarrow BT = 2y \quad 2x - 2y$$

$$\Rightarrow 2y = 2x - 2y$$

$$y = 2x$$

$\Rightarrow$ т. T - середина BC . Тогда и т. E -

середина AC

$$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC} \quad (\text{из подобия})$$

(т.к. одна высота)

$$S_{\triangle CEF} = S_{\triangle ACD} \cdot \left(\frac{CE}{AC}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot S_{\triangle ACD} \quad (\text{из подобия})$$

$$\Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{3}{16} S_{\triangle ABC}$$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~3.
 $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$. Мы знаем, что $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

Тогда $5 \arcsin(\cos x) = 5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n)$,
 где n - такое целое число, что $\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

(интервал такой, т.к. $\arcsin$ может принадлежать только ему)

$$\Rightarrow 5(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 10\pi n + 2\pi = 2\pi(5n + 1)$$

$$x = \frac{\pi}{3}(5n + 1)$$

~~$x = \frac{\pi}{3}$~~ $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}$

$$-\pi \leq -x + 2\pi n \leq 0$$

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{3}(5n + 1) + 2\pi n \leq 0$$

$$-1 \leq -\frac{5n + 1}{3} + 2n \leq 0$$

$$-3 \leq -5n - 1 + 6n \leq 0$$

$$-2 \leq n \leq 1 \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Возможные значения n : -2; -1; 0; 1.

Им соответствуют решения уравнения:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}(5 \cdot (-2) + 1) = -3\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3}(5 \cdot (-1) + 1) = -\frac{4\pi}{3}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{3}(0 + 1) = \frac{\pi}{3}$$

$$x_4 = \frac{\pi}{3}(5 \cdot 1 + 1) = 2\pi$$

Ответ: -3π ; $-\frac{4\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; 2π

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



~ 4.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$a = ?$ (такие, что найдётся b , при которых у системы 4 решения)

Решим задачу графически.

Второе ур-е в системе задаёт окружности:

$$x^2 + y^2 = 9$$

центр - $(0, 0)$; $r = 3$

$$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$

центр - $(6, 0)$; $r = 2$

Запомним, что у этих окружностей нет общих точек.

$ax + 2y - 3b = 0$ - прямая

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$$

Когда угол наклона этой прямой между

$\angle > 0$ (наклоном касательной) или $\frac{\pi}{2}$

$\angle$ (наклоном касательной с отриц.

знаком) и $-\frac{\pi}{2}$, система не будет иметь

4 решения ни при каком b , т.к. у прямой с окружностями будет от 0 до 2 точек пересечения

найдем $\angle$ - угол наклона общей касательной к окружностям, придем внутренней. ($\angle > 0$)

см. рис: A, B - т. касания O_1 и O_2 - центры окр.

$$O = O_1, O_2 \cap AB$$

$$\angle = \angle BOO_2 \Rightarrow -\frac{\alpha}{2} = \text{tg } \angle = \text{tg } \angle BOO_2$$

$$b = O_1 O_2 = OO_1 + OO_2 = \frac{AO_1}{\sin \angle} + \frac{BO_2}{\sin \angle} = \frac{AO_1 + BO_2}{\sin \angle} = \frac{2+3}{\sin \angle} = \frac{5}{\sin \angle}$$

$$\sin \angle = \frac{5}{b} \Rightarrow \text{tg } \angle = \frac{5}{\sqrt{b^2 - 25}}$$

$$\text{tg } \angle \in (-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}) \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{b^2 - 25}} \in (-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$$

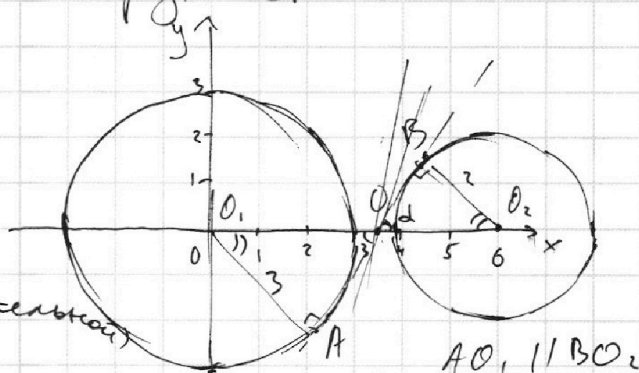
$$\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{\alpha}{2} < \infty \Rightarrow -\frac{10}{\sqrt{11}} > a > -\infty$$

$$a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}})$$

Также в ответе будет $a \in (\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty)$, т.к. график симметричен относительно осей $\Rightarrow$ у второй внутр. кас.

угол наклона = $-\angle$

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}) \cup (\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~5.
xy - ?

$$243 = 3^5$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_3 3 = \log_{5y} (3^5) - 8$$

пусть $a = \log_3 x$ и $b = \log_3 5y$

$$\frac{1}{a} = \log_x 3; \frac{1}{b} = \log_{5y} 3$$

Тогда используя различные преобразования
логарифмов получим:

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8; \quad b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8$$

Упростим: $2a^5 + 16a + 7 = 0; a \neq 0$ (*)

" $2b^5 + 16b - 7 = 0; b \neq 0$

$f(a) = 2a^5 + 16a + 7$ ↑ т.к. это сумма возрастающих
функций

⇒ ур-е $2a^5 + 16a + 7 = 0$ имеет 1 корень на $\mathbb{R}$

⇒ единственно возможное число x
удовлетворяет ур-ю $a = \log_3 x$

Аналогичные рассуждения можно провести
для $5y$ " $f(b)$

x и y - единственные ⇒ xy тоже.

Теперь сложим ур-я (*): $\Rightarrow 2(a^5 + b^5) + 16(a + b) = 0$
 $2(a + b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$

$a + b = 0$

$\log_3 x + \log_3 5y = 0$

$\log_3 (5xy) = 0$

$5xy = 1$

$xy = 0,2$

... решать не надо,
т.к. уже нашли единственные

возможные значения xy .
Заметим ещё, что x и y , при
которых ур-я * имеют реше-
ния, точно есть, т.к.
'исключения 0ДЗ' в виде $x=1$ и $y=1$
- не корни.

Ответ: $xy = 0,2$. (больше значений xy нет)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

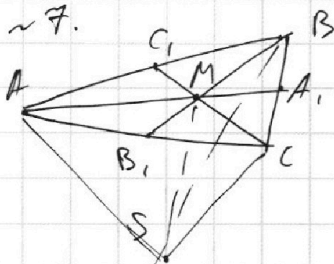
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

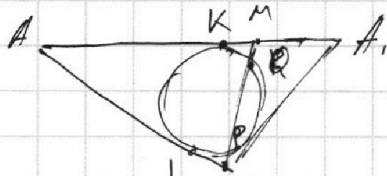
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 7.



Рассмотрим $\triangle ASA_1$:



$$SP = MQ$$

сфера в сечении S представляет собой окружность, вписанную в $\triangle ASA_1$

По т. об отрезках делят о кас. и секущей:

$$SP \cdot SQ = SL^2; \quad MQ \cdot MP = KM^2$$

Но по условию $SP = MQ$

$$\Rightarrow SL^2 = KM^2; \quad SL = MK$$

При этом $AK = AL$ (касая. из одной точки)

Получим, что $AS = AL + SL = AK + KM = AM$

$$\Rightarrow AM = AS = 12. \quad \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 18$$

Тогда $AA_1M = 18 - 12 = 6 = AA_1B = AA_1C$

$\Rightarrow \triangle BMA_1$ и $\triangle CMA_1$ - р/б $\triangle$

$\Rightarrow$ т. A_1 равноудалена от т. B, M и C

$\Rightarrow A_1$ это центр ок. окр. в $\triangle BCM$

$$R = A_1M = 6$$

$\Rightarrow \angle M$ в этом $\triangle$ опирается на диаметр

$$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} BM \cdot CM$$

Также т.к. медианы делят треугольник ABC на 6 равных $\triangle$ попарно, $\Rightarrow S_{\triangle BMC} = S_{\triangle A_1BM} + S_{\triangle CA_1M}$

$$= 2 \cdot S_{\triangle BMC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{3} = \frac{90}{3} = 30.$$

$$\Rightarrow BM \cdot CM = 2 S_{\triangle BCM} = 60$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 &= AA_1 \cdot \frac{3}{2} BM \cdot \frac{3}{2} CM = \\ &= \frac{9}{4} AA_1 \cdot BM \cdot CM = \frac{9}{4} \cdot 18 \cdot 60 = 2430 \end{aligned}$$

Ответ: а) 2430

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~78 (н.а. на другом листе)

$SN = 4$, ~~NO = 5~~ $NO = 5$ (где O - центр сферы)

$\Rightarrow$ По т. Пифагора из ΔSON :

$$SO = \sqrt{NO^2 + SN^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

$$OK = ON = 5$$

$$KO \perp ABC \Rightarrow KO \perp BC$$

$$NO \perp BC \Rightarrow NO \perp BC$$

$$\Rightarrow BC \perp (NOK)$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } F = BC \cap NOK \Rightarrow KF \perp BC$$

$\Rightarrow \angle KFN$ - мин. угол двугр. угла при ребре BC (т.е. искомого угла)

Пусть AM - высота основания

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC; \quad AM = \frac{2 \cdot 90}{12} = 15$$

$$\frac{KF}{AM} = \frac{A_1K}{AA_1}$$

из подобия ΔA_1KF и ΔA_1AH
по углам



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

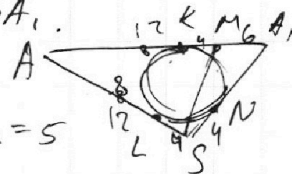
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~н.д. см. а) от на другой странице!)~~

Продолжим 'рассматривать' $\triangle ASA_1$.
из условия н. В следует, что
окружность с радиусом $r = r_{сфера} = 5$
вписана в $\triangle ASA_1$; K, L и N — точки касания
 $SN = 4$. $AS = 12$; $AA_1 = 18$.
 $\angle(ABC; SBC) = \angle AA_1S$ т.к. из н.д. ясно,
что т.к. сфера касается граней в т. M и N и ребра AS
в т. L ,



то $AA_1 \perp BC$ и $SA_1 \perp BC$
Поэтому $\angle AA_1S$.

$$LS = SN = 4 \Rightarrow AL = 12 - 4 = 8 = AK$$

$$\Rightarrow MK = 12 - 8 = 4;$$

$$A_1M = A_1N = KM + A_1M = 4 + 6 = 10. \Rightarrow A_1S = 4 + 10 = 14$$

$\Rightarrow$ стороны треугольника = 12; 14; 18.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$a\beta: 2^{\circ} 3' 5''$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{15}$$

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{50}$$

$$a = 2^x, 3^y, 5^z,$$

$$x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_2 + x_3 \geq 14$$

$$x_1 + x_3 \geq 19$$

$$\frac{9 + 14 + 19}{2}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{10 + 13 + 18}{3} = 20,5$$

$$\frac{10 + 13 + 30}{2} = \frac{53}{2} = 26,5$$

$$f = \cos x; \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

5. $\text{C}_2\text{H}_5\text{COOH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{C}_2\text{H}_5\text{COO}^- + \text{H}^+$

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{6} + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{6} = \cos x$$

$$\arcsin(\cos x) =$$

$$\arcsin t = \arccos(\sqrt{1-t^2})$$

$$\frac{S_{\triangle EBF}}{S_{\triangle ADB}} = \left(\frac{EF}{AD}\right)^2$$

$$\frac{\sum ABC}{\sum CEF} = 7.1$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$$

$$CO = \sqrt{3}x$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y = ax + 36$$

$$B\tau^2 = TF, TF \approx$$

$$= 4(x-y)^2 = y \cdot 4y^2 = 4y^3$$

$$y^2 = \frac{x^2}{-2} + 36$$

- прилаг

$\frac{9}{-2}$ - показываю
наклон
прямой

$$A_2 \frac{9}{-2} = \frac{2}{10} = \frac{2}{30}$$

$$0,02 = 6 = \frac{5}{100}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}$$

~~$$\left(-\infty, -\frac{5\sqrt{11}}{11} \right) \cup \left(\frac{5\sqrt{11}}{11}, \infty \right)$$~~

$$\frac{a}{2} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$\frac{\sqrt{4}}{6} \triangle \times \frac{5}{6} \times$$

$$= \frac{\sqrt{11}}{6}$$

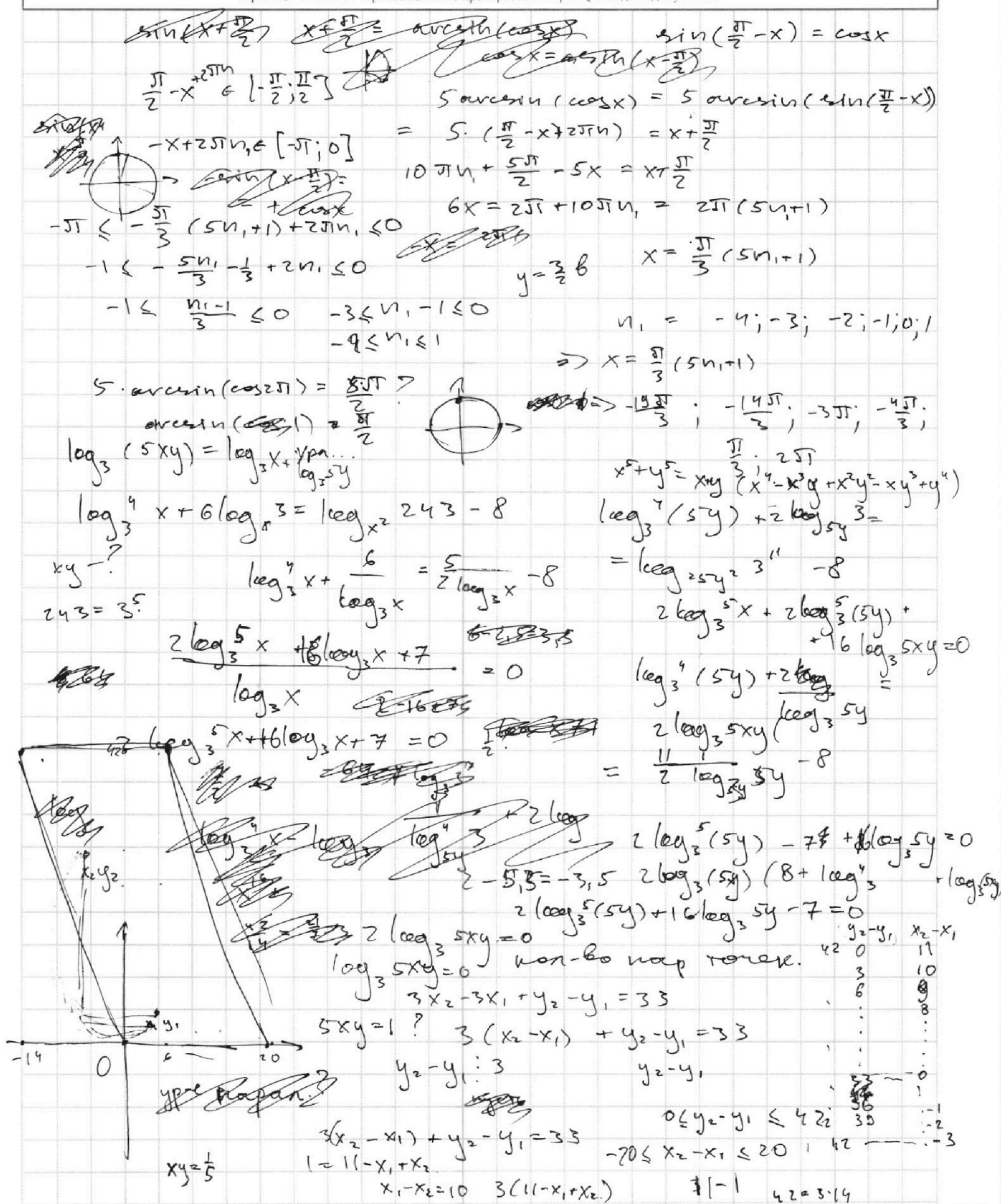
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical solution on grid paper, featuring various geometric diagrams and calculations.

Diagrams:

- Top left: A 3D diagram of a tetrahedron with vertices A, B, C, D and internal points M, N, K, L.
- Top right: A triangle with vertices A, B, C and internal points M, N, K, L.
- Middle left: A triangle with vertices A, B, C and internal points M, N, K, L.
- Middle right: A triangle with vertices A, B, C and internal points M, N, K, L.
- Bottom left: A circle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.
- Bottom right: A triangle with vertices A, B, C and internal points M, N, K, L.

Equations and Calculations:

- $18^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 18 \cdot \cos \alpha = 12^2$
- $AM = AS = 12$
- $AK = 18$
- $SN = 4$ $BC = 12$
- $r = 5$
- $S_{ABC} = 90$
- $AM = \frac{2 \cdot 90}{12} = 15$
- $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A$
- $9^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos \angle A = 6^2$
- $\cos \angle A = \frac{81 + 49 - 36}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{94}{14 \cdot 9}$
- $S_{BAM} = 18 \cdot \sin \angle BAM = \frac{90}{6} = \frac{30}{2} = 15$
- $\sin \angle BAM = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$
- $S_{BEM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot \cos 2\alpha$
- $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $BM = 2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{6}}{2}} \cdot 6 = 12 \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{6}}{2}}$
- $CM = 12 \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{6}}{2}}$
- $BB_1 \cdot CC_1 = 144 \cdot \frac{9}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{11}{36}} \sqrt{1 + \frac{11}{36}} = 81 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{11}{36}} = \frac{5}{6} \cdot 81 \cdot 2 = 5 \cdot 27$
- $12, 14, 18$
- 110
- $6 \cdot 18 = 55$
- $3 \cdot 18$

Text:

- Don't you dare
- очень плохой ответ
- или нулевая
- помогла?

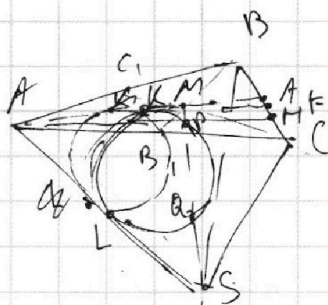
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AM = \frac{180}{12} = 15$$

$$SP = MQ$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$$

$$S_{ABC} = 90$$

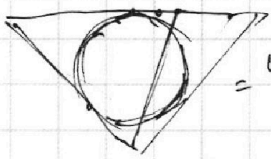
$$AS = BC = 12$$

$$(2b-c)(2c-b)$$

$$AK = AL$$

$$SL^2 = SQ \cdot SP =$$

$$= SQ \cdot MQ = MP \cdot MQ =$$



$$(2a+2b-c)(2a+2c-b) = 4a^2 + 2ab + 2ac + 5bc - 2c^2 - 2b^2$$

$$\Rightarrow \triangle ASM - p.s. AM = AS$$

$$\Rightarrow AM = BC$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} \cdot BC = 18$$

$$4AA_1^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$$

$$4CC_1^2 = 2(BC^2 + AC^2) - AB^2$$

$$4BB_1^2 = 2(BC^2 + AB^2) - AC^2$$

$$AB^2 + AC^2 = 4 \cdot 38^2 + 12^2 = 21$$

$$= 18^2 + 1024$$

$$5bc - 2c^2 - 2b^2 = ?$$

$$t = \log_3 x$$

$$\begin{matrix} 1 & \times & -1 & \times & 36 \\ \frac{1}{2} & \times & -\frac{1}{2} & \times & 39 \\ 7 & \times & -7 & \times & 42 \end{matrix}$$

$$t \neq 0 \quad \frac{7}{2} \times -\frac{7}{2} \times$$

$$t^2 + 16t + 7 = 0$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0$$

$$2b^5 + 16b + 7 = 0$$

$$2(a^5 + b^5) + 16(a + b) = 0$$

$$(a+b)(2a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + 16 = 0$$

$$2 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$42 \geq y_2 + y_1 \geq -42$$

$$3(x_2 + 14) + y_2 - 42 = 33$$

$$\begin{cases} 3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33 \\ y_1 \leq -3x_1 + 60 \\ y_2 \leq -3x_2 + 60 \\ y_1 \geq -3x_1 \\ y_2 \geq -3x_2 \end{cases}$$

$$y_1 \leq -3x_1 + 60$$

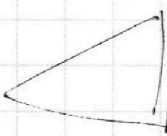
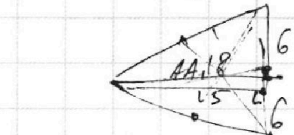
$$42 \geq y_1 \geq 0$$

$$y_2 \leq -3x_2 + 60$$

$$42 \geq y_2 \geq 0$$

$$y_1 \geq -3x_1$$

$$y_2 \geq -3x_2$$



$$5 \arcsin(-1) = -\frac{5\pi}{2}$$

$$\log_3 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 \cdot 8$$

$$t^4 + \frac{5}{t} - \frac{5}{2}t + 8 = 0$$

$$8a^5 + 16 = 8(a^5 + 2)$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0$$

$$2b^5 + 16b + 7 = 0$$

$$y = -3x + 60$$

$$y = -3x + 60$$

$$y = -3x + 60$$

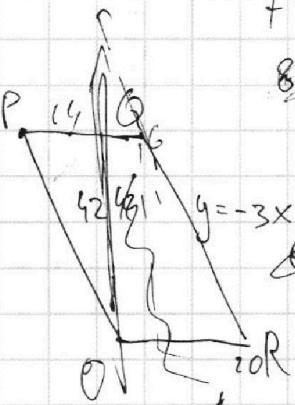
$$y = -3x + 60$$

$$y = -3x + 60$$

$$y = -3x + 60$$

$$y = -3x + 60$$

$$y = -3x + 60$$



$$y_1 \leq -3x_1 + 60$$

$$y_1 \leq -3x_1 + 60$$

$$y_1 \leq -3x_1 + 60$$

$$y_1 \leq -3x_1 + 60$$

$$y_1 \leq -3x_1 + 60$$