



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть $a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$; $b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$; $c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$

$X = a_2 + b_2 + c_2 + k$, $Y = a_3 + b_3 + c_3 + l$; $Z = a_5 + b_5 + c_5 + m$; $abc = 2^X \cdot 3^Y \cdot 5^Z \Rightarrow$

$\Rightarrow X, Y, Z \rightarrow \min$, в идеальном случае $k, l, m = 0$. Рассмотрим этот случай:

$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ a_3 + b_3 = 14 \\ a_5 + b_5 = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} b_2 + c_2 = 12 \\ b_3 + c_3 = 20 \\ b_5 + c_5 = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + c_2 = 14 \\ a_3 + c_3 = 21 \\ a_5 + c_5 = 39 \end{cases} \quad \{a_2, a_3, a_5; b_2, b_3, b_5; c_2, c_3, c_5\} \in \mathbb{N}_0$
 $\{X, Y, Z\} \in \mathbb{N}$

$(a_2 + b_2) + (b_2 + c_2) + (a_2 + c_2) = 2(a_2 + b_2 + c_2) = 8 + 12 + 14 = 34 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 = 17 \Rightarrow$

$\Rightarrow \min X = 17$. При $a_2 = 5$ $b_2 = 3$ $c_2 = 9$ $X = 17$ достигается

$(a_3 + b_3) + (b_3 + c_3) + (a_3 + c_3) = 2(a_3 + b_3 + c_3) = 14 + 20 + 21 = 55 \Rightarrow$

$a_3 + b_3 + c_3 = 27,5 \Rightarrow \min Y = 28$

При $a_3 = 8$ $b_3 = 6$ $c_3 = 14$ $Y = 28$

$(a_5 + b_5) + (b_5 + c_5) + (a_5 + c_5) = 2(a_5 + b_5 + c_5) = 12 + 17 + 39 = 68 \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 = 34 \Rightarrow$

$\Rightarrow Z_{\min} = 34$. Вводя систему ③, получаем: $c_5 = 22$ $a_5 = 12$ $b_5 = -5$ не у.

Решение $b_5 + c_5 = 17 + m$ $\Rightarrow$ ~~$b_5 = -5$ $c_5 = 22$~~

Минимальное достижимое $b_5 = 0$.

Тогда $a_5 = 12$, $c_5 = 24 \Rightarrow m = 10 \Rightarrow Z = 39$

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$ $b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0$ $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{24}$ $Z = 39$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

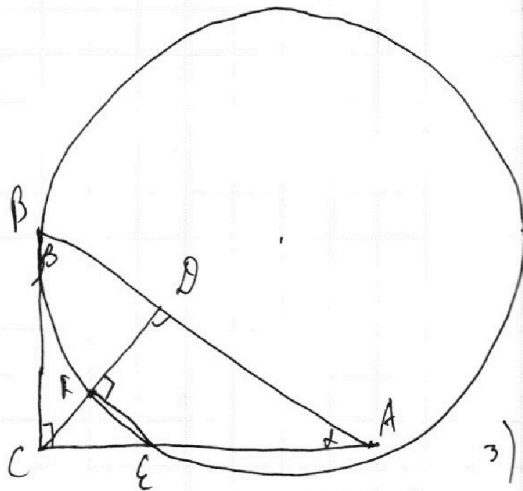
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



$$AB \parallel EF, \quad \frac{AD}{BD} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{S_{ABE}}{S_{CEF}} = ?$$

1) Пусть $AD = 5x$, $BD = 2x$.

$$CD^2 = BD \cdot AD, \quad CD = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$$

2) Так как $AB \parallel EF$, то $\angle EFD = \angle BDA$;
 $\angle FED = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

3) Из $\triangle BCD$: $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{4x^2 + 10x^2} = \sqrt{14}x$

4) Из $\triangle CDA$: $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = \sqrt{35}x$

5) Пусть $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. $\beta + \alpha = 90^\circ$; $\angle BCD = \alpha$; $\angle DCA = \beta$; $\angle FEC = \alpha$.
 $\triangle CFE \sim \triangle CDA$ ($\angle F = \angle D = 90^\circ$ и $\angle C$ общий); $\triangle CDA \sim \triangle BCA$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3. $\cos \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \begin{cases} \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k & ① \\ \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi h & ② \end{cases} \quad \{k, h\} \in \mathbb{Z}$$

$$① \quad \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x + 20\pi k$$

$$8x = 4\pi - 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k$$

$$\text{По } ②: -5 + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k \leq 5 + \frac{\pi}{2}$$

$$-10 \leq -5\pi k \leq 10$$

$$-2 \leq \pi k \leq 2$$

$$-\frac{2}{\pi} \leq k \leq \frac{2}{\pi}$$

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то только $k=0$

уг. $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$② \quad -1 \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq 1$$

$$-10 - \pi \leq -2x \leq 10 - \pi$$

$$-5 + \frac{\pi}{2} \leq x \leq 5 + \frac{\pi}{2}$$

$$② \quad \frac{\pi}{2} - x = \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi h$$

$$5\pi - 10x = 10\pi - \pi + 2x + 20\pi h$$

$$12x = -4\pi - 20\pi h$$

$$x = -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi h$$

$$\text{По } ②: -5 + \frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi h}{3} \leq 5 + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{6} - 5 \leq -\frac{5\pi h}{3} \leq 5 + \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{2} - 3 \leq -\pi h \leq 3 + \frac{\pi}{2}$$

$$-3 - \frac{\pi}{2} \leq \pi h \leq 3 - \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2} \leq h \leq \frac{3}{\pi} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2} < 1$$

$$-\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2} < -2$$

$$-\frac{3}{\pi} > -\frac{3}{2}$$

$$\pi h < -2 \text{ не уг.}$$

$$-\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2} < -1$$

$$\pi h < -1 \text{ не уг.}$$

$$\pi h < -\frac{1}{2} \Rightarrow h = -1 \text{ уг.}$$

$$\begin{cases} h = 0 \text{ уг.} \\ x = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4.
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

~~Второе~~ Второе уравнение системы равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & ① \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 & ② \end{cases}$$

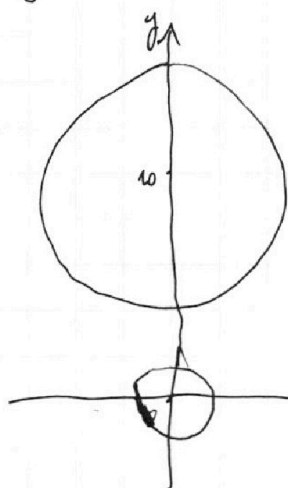
График ① - окружность с ~~центром~~ центром $(0, 0)$ и радиусом 1;
график ② - окр. с центром в точке $(0, 10)$ и радиусом 6.

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$3y = ax + 4b$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

Запишем $\frac{a}{3} = t$; $\frac{4}{3}b = v$; $\Rightarrow y = tx + v$

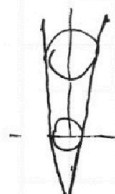


$y = 0 \cdot x = 0$ При $a = 0$: ~~невозможно~~, возьмем $b = 0$.
Тогда система имеет 4 реш. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow a = 0$ - уг.

При больших по модулю a , очевидно, найдется b , чтобы система имела 4 реш.

Рассмотрим случай, когда прямая касается одной окружности, а с другой имеет 2 точки пересечения. Тогда ~~при изменении~~ при сдвиге прямой (при изменении v) гарантированно будет случай, когда система имеет 4 реш.

Рассмотрим случай, когда прямая явл. касательной к обеим окр.
Случай 1. касание вида



- очевидно, что при сдвиге прямой вверх будет 2 реш. $\Rightarrow$ не интересует

Случай 2. касание вида



В таком случае как бы мы ни меняли v , будет максимум 2 реш.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

касание точки касания вида 2:
 $x^2 + (t x + v)^2 = 1$ - кас. к нижней ω

$$(t^2 + 1)x^2 + 2tvx + v^2 - 1 = 0$$

$$D = 0: 4t^2v^2 - 4(t^2 + 1)(v^2 - 1) = 0$$

$$t^2 - v^2 = 1$$

$$\begin{cases} t^2 - v^2 = 1 \rightarrow t^2 = v^2 + 1 \\ 36t^2 - v^2 + 20v - 64 = 0 \end{cases}$$

$$36(v^2 + 1) - v^2 + 20v - 64 = 0$$

$$7v^2 + 4v - 20 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 140 = 144$$

касание «верхней» ω

$$x^2 + (t x + v - 10)^2 = 36$$

$$x^2 + t^2x^2 + v^2 + 100 + 2tvx - 20tx - 20v - 36 = 0$$

$$(t^2 + 1)x^2 - (20t - 2tv)x + v^2 - 20v + 64 = 0$$

$$D = 0: (20t - 2tv)^2 - (t^2 + 1)(v^2 - 20v + 64) = 0$$

$$100t^2 + t^2v^2 - 20t^2v - tv^2 + 20t^2v - 64t^2 - v^2 + 20v - 64 = 0$$

$$36t^2 - v^2 + 20v - 64 = 0$$

$$v = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{7} = \left[\frac{-2}{7}; \frac{2}{7} \right] \begin{matrix} \pm \sqrt{3} \\ \pm \frac{\sqrt{51}}{7} \end{matrix}$$

Кемbridge заметить, что нас интересует прямая с меньшим по.
 углом наклона, то есть меньший по модулю t :

$$\sqrt{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$7\sqrt{3} > \sqrt{51} \Rightarrow t = \pm \sqrt{3} - \text{касание вида 1}$$

$$t = \pm \frac{\sqrt{51}}{7} - \text{касание вида 2.}$$

$$\frac{a}{3} = t \Rightarrow a = 3t = \pm \frac{3\sqrt{51}}{7}$$

$$\text{Итак, } a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup \{0\} \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty) \in \text{Ответ.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

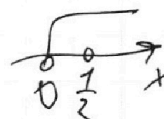
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[5]{\log_5(2x)} - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\log_5(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} + 3 - \log(2x)^3 \cdot 5^4 = 0$$

$$\textcircled{1} x > 0, x \neq \frac{1}{2};$$



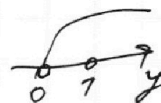
На $\textcircled{1}$: $\log_5(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} + 3 - \frac{4}{3 \cdot \log_5 2x} = 0$; $\log_5(2x) = t$

$$\textcircled{1} t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0$$

$$\log_5 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0.2 - 3$$

$$\log_5 y + \frac{4}{\log_5 y} + \frac{1}{3 \log_5 y} + 3 = 0$$

$$\textcircled{2} y > 0, y \neq 1$$



$$\log_5 y = b$$

$$\textcircled{2} b^5 + 3b + \frac{13}{3} = 0$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: t^5 + b^5 + 3t + 3b + \frac{13}{3} - \frac{13}{3} = 0$$

$$t^5 + b^5 + 3(t+b) = 0$$

$$t^5 + b^5 = (b+t)(b^4 - b^3t + b^2t^2 - bt^3 + t^4)$$

$$(b+t)(b^4 - b^3t + b^2t^2 - bt^3 + t^4 + 3) = 0$$

~~$b+t=0$~~ $\Rightarrow b+t=0: \log_5(2x) + \log_5(y) = 0$; $\log_5(2xy) = 0$
 $2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$

$$b^4 - b^3t + b^2t^2 - bt^3 + t^4 + 3 = 0$$

$$(b^2 + t^2)^2 - bt(b^2 + t^2 + bt) + 3 = 0$$



~~$b^2 + t^2 + 3 = 0$~~ Посмотрим на $\textcircled{1}$: очевидно что при отрицательных t нет решений (и при $t=0$) $\Rightarrow t > 0$.

Посмотрим на b : очевидно, что ~~корни~~ нет неотрицательных корней $\Rightarrow b < 0$

$$(b^2 + t^2)^2 - bt(b^2 + t^2 + bt) + 3 = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{2} > 0 \quad (\text{т.к. } bt < 0)$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} + 3 = 0$ - невозможно $\Rightarrow$
 единственный ответ $xy = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

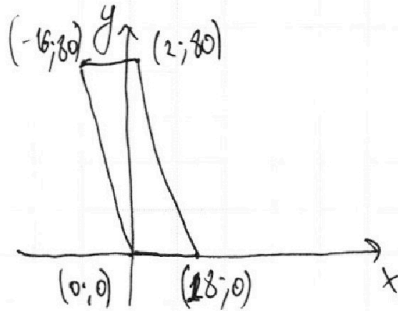
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 6

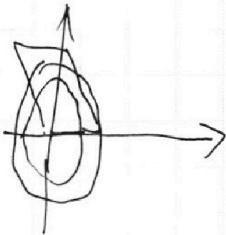


$$\begin{aligned} y_2 + 5x_2 - (y_1 + 5x_1) &= 45 \\ y_2 - y_1 + 5(x_2 - x_1) &= 45 \end{aligned}$$

Дадим каждой точке номер,
который численно равен сумме

абсциссы, умноженной на 5, и ординате. Точки, у которых
номер отличается на 45, будут удовлетворять.

Точки с одинаковым номером будут образовывать эллипс на
координатной плоскости



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

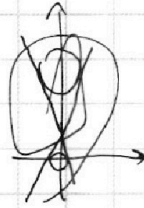
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

случай 2: касание всегда



Пусть прямая касается одной окр., а с другой имеет 2 т. пер.
Тогда очевидно, что, изменив b , можно так, чтобы с первой окр.
было 2 т. пер., со второй остав. 2 т.

случай 3: касание всегда  В таком случае, как бы мы
ни изменяли b , ~~для~~ если с какой-то b будет 2 т. пер., то с дру-
гой будет 0 т. пер. Найдём ~~эти~~ крит. точки

касание φ с ~~вершиной~~ ω :

Запишем $\frac{a}{3} = t, \frac{4b}{3} = v$

$$x^2 + (tx + v)^2 = 1$$

$$(t^2 + 1)x^2 + 2tvx + v^2 - 1 = 0$$

$D=0:$ $4t^2v^2 - 4(t^2 + 1)(v^2 - 1) = 0$

$$t^2v^2 - t^2v^2 + t^2v^2 + 1 = 0$$

$$t^2v^2 - t^2v^2 + t^2v^2 + 1 = 0$$

$$t^2 - v^2 + 1 = 0$$

$$t^2v^2 - t^2v^2 + t^2v^2 + 1 = 0$$

касание φ с вершиной ω : $x^2 + (tx + v - 10)^2 = 36$

$$x^2 + t^2x^2 + v^2 + 100 + 2tvx - 20tx - 20v - 36 = 0$$

$$(t^2 + 1)x^2 + (2t - 20t)v + v^2 - 20v + 64 = 0$$

$D=0:$ $(2t - 20t)^2 - 4(t^2 + 1)(v^2 - 20v + 64) = 0$

$$100t^2 + t^2v^2 - 20t^2v - t^2v^2 + 20t^2v - 64t^2 - v^2 + 20v - 64 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k \quad \{k; n\} \in \mathbb{Z}$

$5\pi - 10x = \pi - 2x + 20\pi k$

$8x = 4\pi - 20\pi k$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k$

$\odot -1 \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq 1$

$-10 \leq \pi - 2x \leq 10$

$\pi - 10 \leq 2x \leq \pi + 10$

$\frac{\pi}{2} - 5 \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 5$

2) $\frac{\pi}{2} - 5 \leq -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi n \leq \frac{\pi}{2} + 5$

$\frac{5\pi}{6} - 5 \leq -\frac{5}{3}\pi n \leq \frac{5\pi}{6} + 5$

$\frac{\pi}{2} - 3 \leq -\pi n \leq \frac{\pi}{2} + 3$

$-\frac{\pi}{2} + 3 \leq \pi n \leq 3 - \frac{\pi}{2}$

$-\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi} \leq n \leq \frac{3}{\pi} - \frac{1}{2}$

$n = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$

$10 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \pi + \frac{2\pi}{3}$

$10 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} - \text{верно}$

$10 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{2\pi}{3}$

$0 \neq 0 - \text{верно}$

~~не подходит~~

$\frac{\pi - 2x}{10} \in [-1, 1]$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi n$

$\frac{\pi}{2} - x = \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi n$

$5\pi - 10x = 10\pi - \pi + 2x + 20\pi n$

$12x = -9\pi - 20\pi n$

$x = -\frac{3\pi}{4} - \frac{5}{3}\pi n$

1) $\frac{\pi}{2} - 5 \leq \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k \leq \frac{\pi}{2} + 5$

$-9 \leq -\frac{5}{2}\pi k \leq 5$

$-2 \leq \pi k \leq 2$

$-\frac{2}{\pi} \leq k \leq \frac{2}{\pi}$

$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2};$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 1 \text{ не угод.}$

$\frac{3}{4} < \frac{3}{2}$

$-\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi} < -1$

$-\frac{3}{\pi} > -\frac{3}{2} \Rightarrow -1 \text{ не угод.}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

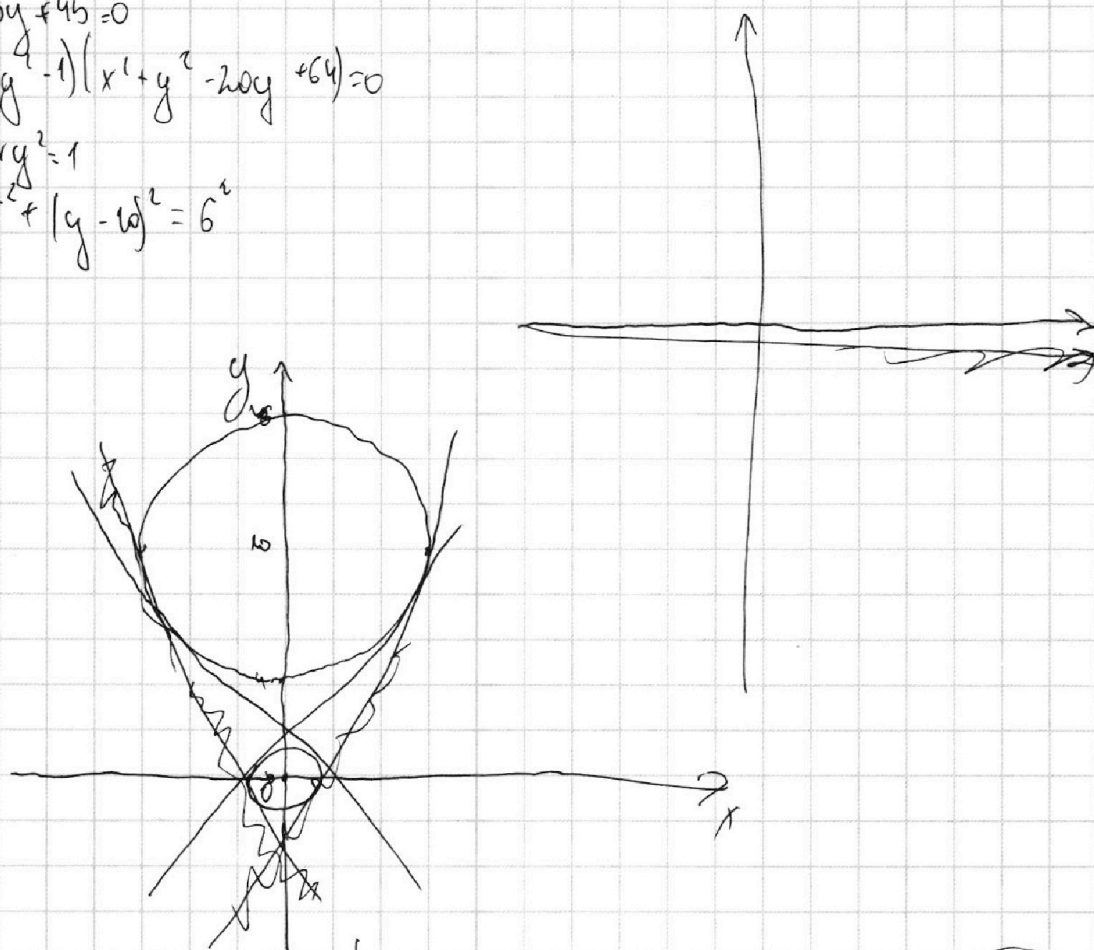
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2ay + 6y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 3)^2 = 6^2 \end{cases}$$



$a=0$: при, например, $b=0$, система имеет 4 рееш $\Rightarrow \underline{a=0}$ - уг.

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

при $(a \rightarrow \infty \text{ или } a \rightarrow -\infty)$ очевидно, найдется b , чтобы все
большее по модулю a , темна имела 4 рееш.

Необходимо высчитать критические точки - точки касания
случай 1: касание вна



- очевидно что сдвинув
красную линию $\uparrow$ вверх
будет 4 рееш $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не интересет



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$36t^2 - v^2 + 20v - 64 = 0$$

$$\begin{cases} 36t^2 - v^2 + 20v - 64 = 0 \\ t^2 - v^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad v^2 = t^2 + 1$$

~~138~~

$$t^2 = v^2 - 1$$

(По рисунку $v > 0 \Rightarrow v = \sqrt{t^2 + 1}$)

меняется лишь знак перед a) (Рассмотрим случаи $t > 0$. При $t < 0$ и).

$$36(v^2 - 1) - v^2 + 20v - 64 = 0$$

$$35v^2 + 20v - 70 = 0$$

$$7v^2 + 4v - 14 = 0$$

$$D = 4 + 140 = 144; \quad v = \frac{-2 \pm 12}{7} = \begin{cases} -2 \\ \frac{10}{7} \end{cases}$$

$$t^2 = v^2 - 1$$

$$v = -2: t^2 = 4 - 1 = 3$$

$$t = \pm \sqrt{3}$$

$$v = \frac{10}{7}: t^2 = \frac{100}{49} - 1 = \frac{51}{49}$$

$$t = \pm \frac{\sqrt{51}}{7}$$

из пол.

Нас интересует такие t , при кот. тангенс угла касания пря-
мой меньше $\Rightarrow$ $\frac{a}{3} = t$; $\sqrt{3} < \frac{\sqrt{51}}{7}$ $\Rightarrow \sqrt{3} < \frac{\sqrt{51}}{7}$

$$\Rightarrow t = \pm \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$7\sqrt{3} > \sqrt{51}$$

$$-7\sqrt{3} < -\sqrt{51}$$

$$a = 3t = \pm \frac{3\sqrt{51}}{7};$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{a_2} 3^{a_3} 5^{a_5} \quad b = 2^{b_2} 3^{b_3} 5^{b_5} \quad c = 2^{c_2} 3^{c_3} 5^{c_5}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ a_3 + b_3 = 14 \\ a_5 + b_5 = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} b_2 + c_2 = 12 \\ b_3 + c_3 = 20 \\ b_5 + c_5 = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + c_2 = 14 \\ a_3 + c_3 = 21 \\ a_5 + c_5 = 39 \end{cases}$$

$$X = a_2 + b_2 + c_2 = 14$$

$$Y = a_3 + b_3 + c_3 = 21$$

$$Z = a_5 + b_5 + c_5 = 39$$

$$(a_2 + b_2) + (b_2 + c_2) + (a_2 + c_2) = 2(a_2 + b_2 + c_2) = 8 + 12 + 14 = 20 + 14 = 34$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = 17$$

$$(a_3 + b_3) + (b_3 + c_3) + (a_3 + c_3) = 2(a_3 + b_3 + c_3) = 14 + 20 + 21$$

$$(a_5 + b_5) + (b_5 + c_5) + (a_5 + c_5) = 2(a_5 + b_5 + c_5) = 12 + 17 + 39 = 12 + 56 = 68$$

$$a_5 + b_5 + c_5 = \frac{68}{2} = 34$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = \frac{34}{2} = 17 \in \mathbb{N}$$

И.к. $X = a_2 + b_2 + c_2 = 17 \in \mathbb{N}$ и $Z = a_5 + b_5 + c_5 = 39 \in \mathbb{N}$ то $\min$

$X = 17$, $\min$ $Z = 39$. Заметим, что $a_3 + b_3 + c_3 = 21 \notin \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow$, так как $X \in \mathbb{N}$, то $\min X = 17$. Осталось только проверить

Пример. $a_2 = 5$ $b_2 = 3$ $c_2 = 9$ $X = 17$

$$a_5 = 14$$

$$c_5 = 22$$

$$a = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^9$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22}$$

$a_3 + b_3 + c_3 = 21$ $a_3 + b_3 = 2$ $a_3 = 0$ $b_3 = 2$ $c_3 = 19$

$$Y = 28$$

Z : $a_5 - a_3 = 5$ $a_5 + c_5 = 39$ $\Rightarrow$ можно взять $\min b_5 \Rightarrow b_5 = 0$; тогда $Z = 39$

$a_5 = 17$, $c_5 = 22$ $a = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^{17}$ $b = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^0$ $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22}$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(b+f)(g(b^3-b^2f+b^4f^2-bf^3+f^4)+3)=0$$

$$b=-f: \log_5 y = -\log_5(2x) \Rightarrow y = \frac{1}{2x} \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$$

$$(b^3+f^4)^2 - b^4(b^2+f^2) + 3b^2f^2 - b^2f^2$$

$$x^2 - btz - 3 = 0 \quad z = b^4 + 1$$

$$r = \frac{b^4 \pm \sqrt{b^4 + 4n}}{2}$$

$$\textcircled{+}: b^3 + f^4 = \frac{b^4 + \sqrt{b^4 + 4n}}{2}$$

$$2b^4 + 2f^4 - b^4 = \sqrt{b^4 + 4n}$$

$$16b^4 + 16f^4 + b^4 + 8b^2f^2 - 4b^3f - 4bf^3 = b^4 + 4n$$

$$b^4 + f^4 + 2b^2f^2 - b^4(b^2 + f^2)$$

$$(b^2 + f^2)^2 - (b^2 + f^2)(b^4 + f^4) - 6 = 0$$

$$b^4 + f^4 = n$$

$$2n^2 - n^3 + n^4 - 6 = 0 \quad n^4 - 3n^2 + 6 = 0$$

$$(b^2 + f^4)^2 - b^2f^2 - b^4(b^2 + f^4) - 3 = 0$$

$$b^3 + f^3$$

$$b^2f^4 = b^4 + f^4 - b^4$$

$$(b^2 + f^4)^2 - b^4(b^2 + f^4)$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - x}{2}}$$

$$x^2 - x - 2y^2 = 0$$

$$(b^2 + f^2)^2 - b^4(b^2 + f^2 + b^4) + 3 = 0$$

$$(b^2 + f^4)^2 - b^2f^2 - b^4(b^2 + f^4) - 3 = 0$$

$$x^2 - y^2 - xy - 3 = 0$$

$$8 = y^2 + 4y^2 + 4n - 5y^2$$

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{5y^2 + 4n}}{2}$$

$$b^4f^4 = b^4 = n$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} + 3 - \log_{(2x)^3} 5^4 = 0$$

пусть: $\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} + 3 - \frac{4}{3} \log_{(2x)} 5 = 0$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} + 3 - \frac{4}{3 \log_5(2x)} = 0 \quad \log_5(2x) = t$$

$$t^5 - 3 + 3t - \frac{4}{3} = 0 \quad 3t^5 + 9t - 13 = 0$$

$$3 \log_{2x} 5 + \log_{2x} 625 = \frac{3}{\log_5 2x} + \frac{4}{3 \log_5 2x} = \frac{13}{3 \log_5 2x}$$

$$\log_{2x}^4 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 + 3 \log_{2x} 5 - 3$$

$$\frac{1}{\log_{2x}^4 5} = \frac{13}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$13 \sqrt[5]{5} - 3 \sqrt[4]{5} - 1 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \log_y 5 - 3 \quad \log_5 y = b$$

$$b^4 + \frac{13}{3} + 3 = 0 \quad \frac{4}{\log_5 y} + \frac{1}{3 \log_y 5} = \frac{13}{3 \log_y 5}$$

$$3b^5 + 13 \quad 3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$$3(b^5 + t^5) + 9(b + t) = 0$$

$$-t^5 + bt$$

$$\begin{array}{r} 3b^5 + 13 \\ - 3b^4 + 13t^5 \\ \hline -b^4 + 13t^5 \\ -b^4 + 13t^5 \\ \hline -b^4 + 13t^5 \\ -b^4 + 13t^5 \\ \hline -b^4 + 13t^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -b^5 + t^5 \quad | \quad b + t \\ -b^5 + b^4t \quad | \quad b^4 - b^3t \\ \hline -b^4 + t^5 \\ -b^4 - b^3t \\ \hline b^3t + t^5 \\ -b^3t + b^2t \\ \hline -b^2t + t^5 \\ -b^2t + b^2t \\ \hline -b^2t + t^5 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

МФТИ



1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. $\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$x = \frac{10}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \begin{cases} \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k & (1) \\ \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi h & (2) \end{cases}$$

$$\{k, h\} \in \mathbb{Z} \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$(1) \quad \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k$$

$$-\frac{6\pi}{3}$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x + 20\pi k$$

$$8x = 4\pi - 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k$$

$$-\frac{\pi}{2}$$