



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $a = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} \theta_a$, $b = 2^{\beta_2} 3^{\beta_3} 5^{\beta_5} \theta_b$, $c = 2^{\gamma_2} 3^{\gamma_3} 5^{\gamma_5} \theta_c$, где $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$ — целые неотрицательные, θ_a, θ_b и θ_c — натуральные, взаимно простые с 2, с 3 и с 5. Тогда из условия, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, следует, что $\alpha_2 + \beta_2 \geq 6$; аналогично, $\beta_2 + \gamma_2 \geq 14$ и $\alpha_2 + \gamma_2 \geq 16$. Тогда $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{(\alpha_2 + \beta_2) + (\beta_2 + \gamma_2) + (\alpha_2 + \gamma_2)}{2} \geq \frac{6 + 14 + 16}{2} = 18$.

Аналогично, $\alpha_3 + \beta_3 \geq 13$, $\beta_3 + \gamma_3 \geq 21$, $\alpha_3 + \gamma_3 \geq 25$, поэтому $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq \frac{13 + 21 + 25}{2} = 29\frac{1}{2}$, но α_3, β_3 и γ_3 целые, поэтому $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 30$.

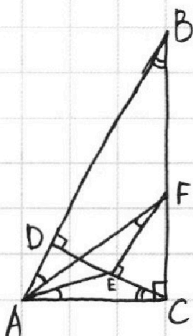
Также, из того, что ac делится на 5^{28} , следует, что $\alpha_5 + \gamma_5 \geq 28$; но $\beta_5 \geq 0$, поэтому $\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \geq 28$.

Тогда $abc = 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} 3^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} 5^{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5} \theta_a \theta_b \theta_c \geq 2^{18} 3^{30} 5^{28}$, но значение $2^{18} 3^{30} 5^{28}$ достигается при $a = 2^4 3^9 5^{12}$, $b = 2^2 3^5$, $c = 2^{12} 3^{16} 5^{16}$, значит, оно минимальное.

Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано, что $AB:BD=1,4$; но тогда $AD:BD=0,4=\frac{2}{5}$.

Поскольку $\triangle ABC$ прямоугольный, CD — его высота, опущенная на гипотенузу, $AC=\sqrt{AB \cdot AD}$ и $BC=\sqrt{AB \cdot BD}$, поэтому

$$\frac{AC}{BC} = \sqrt{\frac{AD}{BD}} = \sqrt{\frac{2}{5}}. \text{ Пусть } AC=t\sqrt{2}, \text{ тогда } BC=t\sqrt{5}, AB=t\sqrt{7}.$$

Заметим, что $\angle EAC$ — это угол между касательной AC и хордой AE окружности, поэтому он равен вписанному углу $\angle AFE$, который является накрест лежащим с $\angle FAB$ при параллельных прямых AB и FE , значит, $\angle FAB = \angle AFE = \angle EAC$. К тому же, $\angle ABC = 90^\circ$

$\angle BAC = 90^\circ - (90^\circ - \angle ACD) = \angle ACD$, поэтому $\triangle AEC \sim \triangle AFB$ по двум уг-

лам. Значит, $\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{BF}$. Поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{EC} = \frac{BC - CF}{EC} = \frac{BC}{EC} - \frac{CF}{EC} = \frac{BC}{EC} - \frac{CB}{CD} =$
 $= \frac{BC}{EC} - \frac{AB}{AC}$. Значит, $\frac{BC}{EC} = 2 \cdot \frac{AB}{AC}$, поэтому $EC = \frac{AC \cdot BC}{2AB} = \frac{t\sqrt{2} \cdot t\sqrt{5}}{2 \cdot t\sqrt{7}} = t\sqrt{\frac{5}{14}}.$

Тогда $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = \left(\frac{AD}{EC}\right)^2 = \left(\frac{AC^2}{BC \cdot EC}\right)^2 = \left(\frac{2t^2}{t\sqrt{5} \cdot t\sqrt{\frac{5}{14}}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{14}}{5}\right)^2 = \frac{56}{25}.$

Ответ: $\frac{56}{25}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

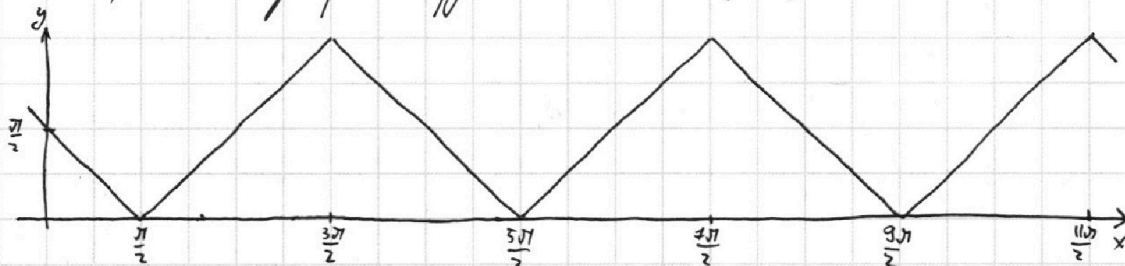
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

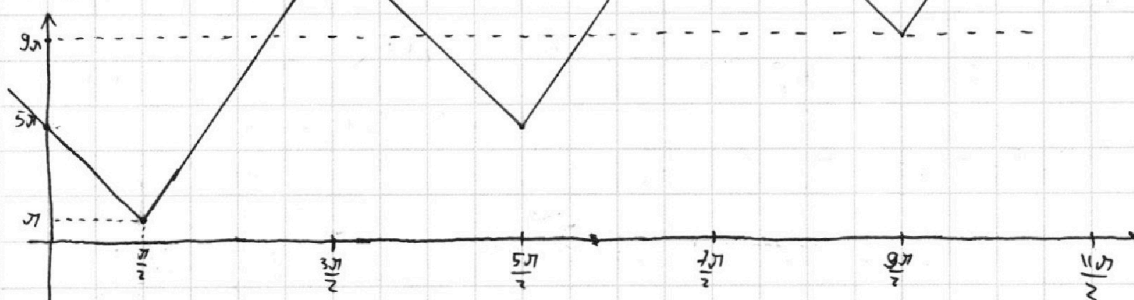
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что график функции $\arccos(\sin x)$ — бесконечная ломаная:



Здесь чередуются отрезки с наклоном -1 и 1 . Тогда у функции $10\arccos(\sin x) + 2x$ график — тоже бесконечная ломаная, но чередуются отрезки с наклоном -8 и 12 :



В локальной максимуме $x = -\frac{\pi}{2}$ функция ~~равна~~ $10\arccos(\sin x) + 2x$ равна 9π . Значит, эта функция принимает значение 9π в 5 точках — это точка $-\frac{\pi}{2}$, пересечение прямой $y = 12(x - \frac{\pi}{2}) + \pi$ с прямой $y = 9\pi$, пересечение прямой $y = -8(x - \frac{5\pi}{2}) + 5\pi$ и прямой $y = 9\pi$, пересечение прямой $y = 12(x - \frac{5\pi}{2}) + 5\pi$ и прямой $y = 9\pi$, а также точка $\frac{9\pi}{2}$. Первое из пересечений задаётся $12x - 5\pi = 9\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6}$, второе — $-8x + 25\pi = 9\pi \Leftrightarrow x = 2\pi$, третье — $12x - 25\pi = 9\pi \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{6}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{9\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



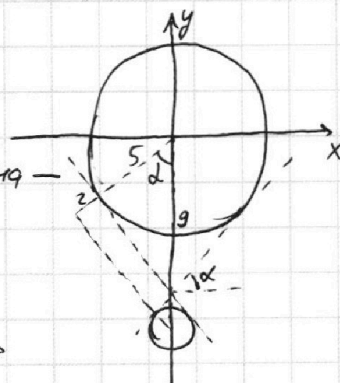
Заметим, что $x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+9)^2 - 4 = 0$. Поэтому график уравнения $(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$ — это объединение двух непересекающихся окружностей — одна с центром в $(0,0)$ и радиусом 5, другая с центром в $(0,-9)$ и радиусом 2. Две заданного а уравнение $5x + 6ay - b = 0$ задаёт семейство всех прямых с наклоном $-\frac{5}{6a}$, если $a \neq 0$, и семейство вертикальных прямых, если $a = 0$. Необходимо найти такие a , при которых какая-то прямая из семейства пересекает каждую из окружностей в 2 точках. $a = 0$ подходит при $b = 0$; если $a \neq 0$, то наклон $-\frac{5}{6a}$ должен быть больше ~~или~~ по модулю, чем модуль наклона любой касательной к окружностям, пересекающей их по 2 точкам.

Как видно из рисунка, если этот модуль наклона — $\operatorname{tg} \alpha$, то $\cos \alpha = \frac{2+5}{9} = \frac{7}{9}$. Тогда ~~тогда~~

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\left(\frac{9}{7}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{81}{49} - 1} = \frac{4\sqrt{2}}{7}. \text{ Значит, } \left|\frac{5}{6a}\right| > \frac{4\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \frac{6|a|}{5} \geq \frac{7}{4\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ |a| < \frac{35}{24\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Ответ: $-\frac{35}{24\sqrt{2}} < a < \frac{35}{24\sqrt{2}}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^2} \frac{1}{121} - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6 \log_{11}^{-1} x = -\frac{2}{3} \log_{11}^{-1} x - 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x - \frac{16}{3} = 0. \text{ Обозначим } \log_{11} x = t, \text{ тогда } t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0.$$

Более того, $t^5 + 5t$ возрастает, бывает сколь угодно малым и сколь угодно большим, поэтому у уравнения $t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$ ровно одно решение.

$$\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^2} (11^{-13}) - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4\left(\frac{y}{2}\right) + \log_{11}^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) = -\frac{13}{3} \log_{11}^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) - 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{11}^5\left(\frac{y}{2}\right) + 5 \log_{11}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{16}{3} = 0. \text{ Обозначим } \log_{11} \frac{y}{2} = s, \text{ тогда } s^5 + 5s + \frac{16}{3} = 0.$$

$s^5 + 5s$ возрастает, бывает сколь угодно малым и сколь угодно большим, поэтому у $s^5 + 5s + \frac{16}{3} = 0$ тоже только одно решение. Но если

$s^5 + 5s + \frac{16}{3} = 0$, то $-s^5 - 5s - \frac{16}{3} = 0$, поэтому $(-s)^5 + 5(-s) - \frac{16}{3} = 0$. Поэтому корни $t^5 + 5t - \frac{16}{3}$ и $s^5 + 5s + \frac{16}{3}$ противоположные, а значит,

$$\log_{11} x + \log_{11} \frac{y}{2} = 0. \text{ Отсюда } \log_{11} \frac{xy}{2} = 0, \frac{xy}{2} = 1 \text{ и } xy = 2.$$

Ответ: 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A'(6x_1, y_1)$ и $B'(6x_2, y_2)$. Тогда $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{(1, 1)}$.
Значит, $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{(1, 1)} = 48$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

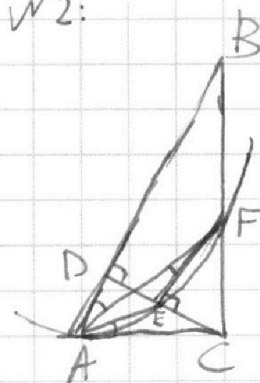
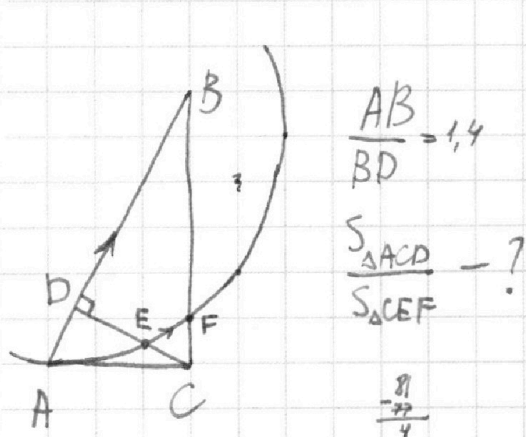
~~ab, bc, ac: $100k = 2^{10}$~~ M1: $a = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5}$, $b = 2^{\beta_2} 3^{\beta_3} 5^{\beta_5}$

$c = 2^{\gamma_2} 3^{\gamma_3} 5^{\gamma_5}$ ~~$\alpha_2 + \beta_2 \geq 6$, $\alpha_2 + \gamma_2 \geq 16$, $\beta_3 + \gamma_3 \geq 14$~~
 $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{6+16+14}{2} = 18$ ~~$\alpha_2 = 0, \beta_2 = 6$~~

$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 6 \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \gamma_2 - \beta_2 = 10$, т.к. $\gamma_2 + \beta_2 = 14 \Rightarrow \gamma_2 = 12, \beta_2 = 2, \alpha_2 = 4$

Далее аналогично.

$133 = 140 - 7 = 7 \cdot 19$



$\angle EAC = \angle AFE = \angle FAB$

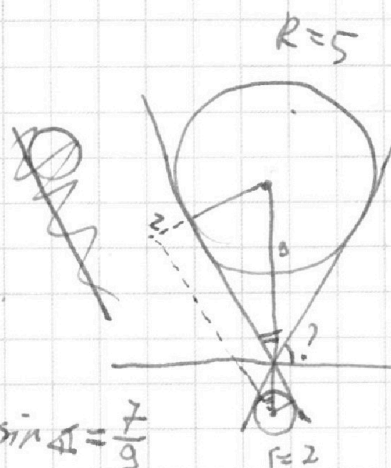
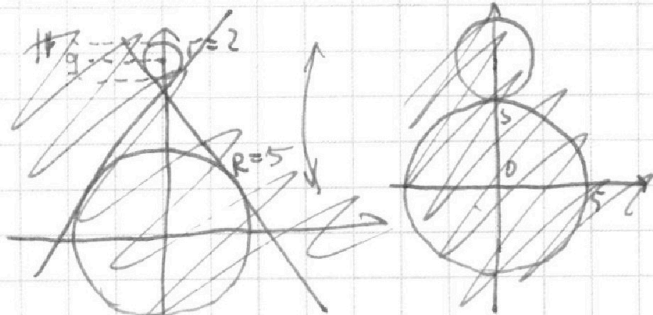
$\frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$

$AC = \sqrt{AB \cdot AD}$, $BC = \dots$

$\frac{AC}{BC} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

~~W3: $10\sqrt{1-x^2} = 2x$~~ W4

$x^2 + y^2 + 18y + 77 = x^2 + (y+9)^2 - 4$



~~$\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{7}{9}$~~
 $\cos \alpha = \frac{7}{9}$
 $\tan \alpha = \sqrt{\frac{81}{49} - 1} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

Далее: $4+5+4+5+5+5+6 = 34$

$4+4+5+5$ тоже больше нуля!
 $+5 = 23/34$

$|a| > \frac{4\sqrt{2}}{7}$
 $|a| > \frac{2\sqrt{2}}{21}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_{11} x - 6 \log_{11}^{-1} x = -\frac{2}{3} \log_{11}^{-1} x - 5$

$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$

$3t^5 + 15t - 16 = 0$

возрастают, корни между 0 и 1

$\log_{11} \frac{1}{2} + \log_{11}^{-1} \frac{1}{2} = -\frac{13}{3} \log_{11}^{-1} \frac{1}{2} - 5$

$s^5 + 5s + \frac{16}{3} = 0$

Сумма корней $3t^5 + 15t - 16 = 0$ и $3s^5 + 15s + \frac{16}{3} = 0$ — ?

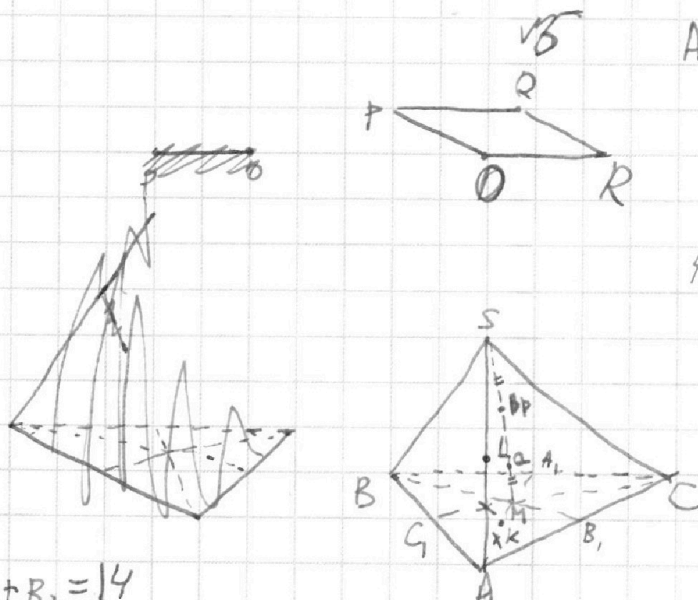
Отрицательна, сумма — 0.

$\log_{11} \frac{1}{2} + \log_{11} x = 0$

$\log_{11} \frac{xy}{2} = 0$

$\frac{xy}{2} = 1$

$xy = 2$



$A'(6x_1, y_1), B'(6x_2, y_2)$

$\overrightarrow{A'B'} \cdot (1, 1) = 48 = (4\sqrt{3})^2$

Еще раз перенесем координаты (вернем на дистантальную), и всё?

$\alpha_3 + \beta_3 = 14$

$\beta_3 + \gamma_3 = 21$

$\Rightarrow \gamma_3 - \alpha_3 = 7, \gamma_3 + \alpha_3 = 25 \Rightarrow \gamma_3 = 16, \alpha_3 = 9, \beta_3 = 5$

$\alpha_5 + \beta_5 = 11$

$\beta_5 + \gamma_5 = 13$

$\Rightarrow \gamma_5 - \alpha_5 = 2, \gamma_5 + \alpha_5 = 28 \Rightarrow \gamma_5 = 15, \alpha_5 = 13, \beta_5 = -2$

$\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 = 28$ А это достигается!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

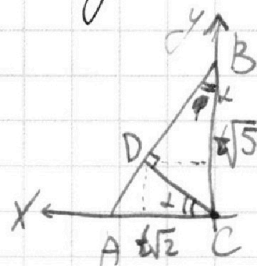


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Решение задачи 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7~~

Пусть $a = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} \theta_a$, $b = 2^{\beta_2} 3^{\beta_3} 5^{\beta_5}$



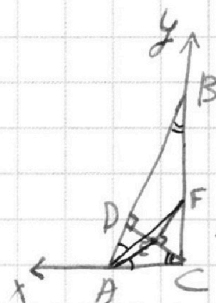
$$D(t\sqrt{2}\cos^2\alpha, t\sqrt{5}(1-\cos^2\alpha))$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{5}{7}} \Rightarrow D\left(\frac{5}{7}\sqrt{2}t, \frac{2}{7}\sqrt{5}t\right)$$

$$E = \gamma D = \left(\frac{5}{7}\sqrt{2}\gamma t, \frac{2}{7}\sqrt{5}\gamma t\right)$$

$$F = \gamma B = (0, \sqrt{5}\gamma t)$$

$$\cos\angle FAC = \frac{\vec{EA} \cdot \vec{CA}}{EA \cdot CA} = \frac{\left(1 - \frac{5}{7}\gamma\right) \cdot 2t^2}{\sqrt{\left(\frac{2}{7}\sqrt{5}\gamma t\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{7}\gamma\right)^2 \cdot 2t^2} \cdot \sqrt{2}t}$$



$\triangle AEC \sim \triangle AFB$

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{BF}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{EC} = \frac{BC - CF}{EC}$$

$$= \frac{BC}{EC} - \frac{CF}{EC} = \frac{BC}{EC} - \frac{CB}{CD} =$$

$$\frac{BC}{EC} - \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{BC}{EC} = 2 \frac{AB}{AC} \quad EC = \frac{AC \cdot BC}{2AB}$$

~~Решение задачи 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7~~

$$EC = \frac{t\sqrt{2} \cdot t\sqrt{5}}{2 \cdot t\sqrt{7}} = t\sqrt{\frac{5}{14}}$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = \left(\frac{AD}{EC}\right)^2 = \frac{(AC^2)^2}{(BC \cdot EC)^2} = \left(\frac{2t^2}{t\sqrt{5} \cdot t\sqrt{\frac{5}{14}}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{14}}{5}\right)^2 = \frac{56}{25}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} \theta_a$, $b = 2^{\beta_2} 3^{\beta_3} 5^{\beta_5} \theta_b$, $c = 2^{\gamma_2} 3^{\gamma_3} 5^{\gamma_5} \theta_c$, где $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$ — целые неотрицательные, θ_a, θ_b и θ_c — натуральные, взаимно простые с 2, с 3 и с 5. Тогда из условия, что abc делится на $2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{26}$, следует, что $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 6$; аналогично, $\beta_2 + \gamma_2 \geq 14$ и $\alpha_2 + \gamma_2 \geq 16$. Тогда $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \frac{(\alpha_2 + \beta_2) + (\alpha_2 + \gamma_2) + (\beta_2 + \gamma_2)}{2} \geq \frac{6}{2} + \frac{14}{2} + \frac{16}{2} = 18$.

Аналогично, $\alpha_3 + \beta_3 \geq 13$, $\beta_3 + \gamma_3 \geq 21$, $\alpha_3 + \gamma_3 \geq 25$, поэтому $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq \frac{13 + 21 + 25}{2} = 29\frac{1}{2}$, но поскольку α_3, β_3 и γ_3 целые, то $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 30$. И, аналогично, $\alpha_5 + \beta_5 \geq 11$, $\beta_5 + \gamma_5 \geq 13$, $\alpha_5 + \gamma_5 \geq 28$, значит, $\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \geq \frac{11 + 13 + 28}{2} = 26$.

Тогда $abc = 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} 3^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} 5^{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5} \theta_a \theta_b \theta_c \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \cdot 1$.

Менее покажем, что abc может быть равно $2^{18} 3^{30} 5^{26}$.