



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача 1

Если  $a:b$  и  $c:d$ , то  $ac:bd$ , значит:

$$a \cdot b \cdot c : \cancel{2^{42}} \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot 2^{12} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20} \\ = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}, \text{ значит}$$

степень в каждой из цифр 2 в  $a \cdot b \cdot c$  хотя бы 21, как и тройки хотя бы 21, иначе степени в  $a^2 b^2 c^2$  были бы более 40, при этом  $ac : 5^{30}$ , значит  $abc : 5^{30}$ , итого:

$$abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}, \text{ значит минимальное}$$

значение  $a \cdot b \cdot c$  это и есть  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ ,

пример:

$$a = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}, \text{ несложно убедиться, что это подходит и}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}.$$







|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

А вторая точка пересечения:  
 $(0; \sqrt{n^2-1} + n)$ , пусть это точка  
 $H$ , тогда  $CE \cdot CH = CB^2$ , степень  
точки  $B$ , радиальная дуга  
способом.

Тогда, т.к.  $EF$ -параллельно  
 $AB$ , то имеет одинаковый угол  
наклона:  $AB = -2x + 2$ . Пересечём  
 $AB$  и окружность в точке  
 $I$ ;  $I E F B$  - вписанная трапеция,  
значит трапеция вписанная и  
 $IE = FB$ , вернёмся к углу наклона;  
 $EF = -2x + 6$ ; и проходит через  $E$   
 $(0; n - \sqrt{n^2-1})$ ;  $b = 2n - 2\sqrt{n^2-1}$   
 $EF \Rightarrow y = -2x + 2n - 2\sqrt{n^2-1}$ , пересекая  
с  $CD$ , уравнение  
 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ , т.к.  $\angle DCB = 30^\circ$ ;  
 $\frac{\sqrt{3}}{3}x = -2x + 2n - 2\sqrt{n^2-1}$ ; пусть



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☒

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

уравнение окружности имеет  
вид  $(x-1)^2 + (y-r)^2 = r^2$ , найдем  
пересечение с AC;  $x=0$  тогда  
есть прямая  $x=0$ :

$$1 + (y-r)^2 = r^2 \Rightarrow (y-r)^2 = (r^2 - 1)$$

$y = \pm \sqrt{r^2 - 1} + r$ , но по картинке,  
только точка E и еще другая  
точка пересечения  $\Rightarrow E(0; r - \sqrt{r^2 - 1})$ .

$\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle DCB = 30^\circ$ , прямая  
CD проходит через  $(0,0)$  и  
имеет вид  $y = kx$ , где  $k$  -  
тангенс угла наклона;  $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$   
 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ , найдем пересечение с  
уравнением окружности:

$$(x-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - r\right)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}xr + r^2 = r^2$$

$$\frac{4}{3}x^2 + x(-2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}r) + 1 = 0 \quad | \cdot 3$$

$$4x^2 + x(-6 - 2\sqrt{3}r) + 3 = 0$$



|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$r - \sqrt{r^2 - 1} = t; \quad \frac{\sqrt{3}}{3} x = -2x + 2t$$

$$x = \frac{2t}{(2 + \frac{\sqrt{3}}{3})}; \quad y = \frac{2\sqrt{3}t}{(6 + \sqrt{3})}; \quad x = \frac{2\sqrt{3}t}{2\sqrt{3} + 1}, \text{ под-}$$

ставим в уравнение окружности,

т.к. это координаты точки E:

$$\left( \frac{2\sqrt{3}t}{2\sqrt{3} + 1} - 1 \right)^2 + \left( \frac{2\sqrt{3}t}{6 + \sqrt{3}} - r \right)^2 = r^2$$

$$\frac{12t^2}{(2\sqrt{3} + 1)^2} + \frac{12t^2}{(6 + \sqrt{3})^2} \quad \frac{2\sqrt{3}t}{2\sqrt{3} + 1} = a; \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$(a - 1)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{3}a - r \right)^2 = r^2$$

$$a^2 - 2a + 1 + \frac{1}{3}a^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}ar + r^2 + r^2 = 0$$

$$D = 12r^2 + 24\sqrt{3}r + 36 - 48$$

$$a = \frac{6 + 2\sqrt{3} - \sqrt{12(r^2 + 2\sqrt{3}r - 1)}}{8}$$

$$\frac{16\sqrt{3}t}{2\sqrt{3} + 1} = 6 + 2\sqrt{3} - \sqrt{12(r^2 + 2\sqrt{3}r - 1)},$$

Потому задачу можно интер-  
претировать по-другому,

мы проводим параллельные

прямые EF, и они сходятся

окружность около  $\triangle EFB$ , причём

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

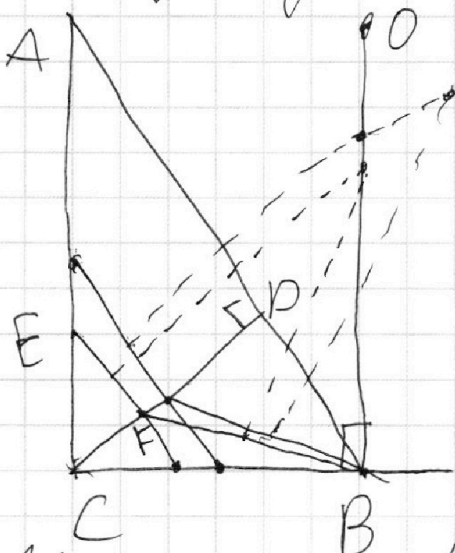
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Как мы помним треугольник у нас с углом  $30^\circ$ , то есть рассмотрим прямую



ВО, перпендикулярную СВ, на ней должны лежать центр окружности и все мы, что если будем двигать

точку F, по СВ, то пересечение окружностей будет сдвигаться дальше, а значит у нас только одна точка F подходит и несложно узнать радиус окружности:



|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = \pi + \frac{\pi}{2}$$

~~Запишем  $\arcsin(\cos x)$~~

$$\cos = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$\arcsin \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \sin^{-1} \frac{\pi}{2} - x \text{ при}$$

$$x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \text{ тогда } (\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\pi - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2\pi, \text{ что не}$$

входит в интервал ~~и не подходит~~

$$2) x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$= 2\pi - \frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2} + x$$

$$(\frac{\pi}{2} + x) \cdot 5 = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4x = 3\pi; x = \frac{3\pi}{4},$$

что подходит

$$3) x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$= 2\pi + \frac{\pi}{2} - x$$

$$(\frac{5\pi}{2} - x) \cdot 5 = x + \frac{\pi}{2}$$

$$12\pi = 6x; x = 2\pi, \text{ не подходит}$$

$$4) x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}], \text{ тогда}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sin(\arcsin(\dots$~~

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 2\pi + \frac{3\pi}{2} - x$$

$$5\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{35\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 6x = 17\pi; x = 3,5\pi,$$

что вводим

$$5) x \in \left[\frac{4\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 4\pi - x + \frac{\pi}{2}$$

$$4,5\pi - x\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) \cdot 5 = \frac{\pi}{2} + x$$

$$22\pi = 6x; x = \frac{22\pi}{6}, \text{ что вводим}$$

в интервал; т.к.  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 4,5\pi\right]$ ,  
то мы рассмотрим все

лучше

$$\text{ответ: } \frac{3\pi}{4}; x = 2\pi; x = 3,5\pi;$$

$$x = \frac{22\pi}{6}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☒

5 ☐

6 ☐

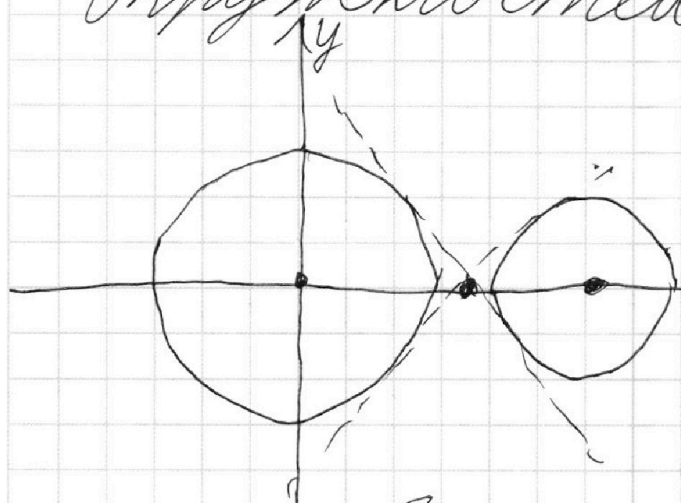
7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4  
Из второго уравнения  
либо  $x^2 + y^2 = 9$ ; либо  $(x-6)^2 + y^2 = 4$ ;  
это являются уравнениями  
окружностей: проведем

общие касатель-  
ные, симмет-  
ричные отно-  
сительно  
линии центров,  
и выедем урав-



нения видов  $y = kx + b$  и  $y = -kx + b$ ,  
т.к. углы наклона симметричны  
и их пересечение лежит  
на  $x=0$ ; подставим  $kx + b$ ,  
в уравнения, тогда у уравнений  
только одно решение:

$$x^2 + (kx + b)^2 = x^2 + k^2 x^2 + 2kbx + b^2 = 4$$

$$x^2(k^2 + 1) + 2kb \cdot x + b^2 - 4 = 0$$

$$D = 4k^2 b^2 - 4(k^2 + 1)(b^2 - 4) = 0$$

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Известное, что эта точка лежит  
на радикальной оси этих окружностей  
то есть:  $b+2(b-3)(b+3) = b+4(4-b)(b-6)$

$$\cancel{b^2} - 9 = \cancel{b^2} - 10b + 24$$

$$\cancel{b} = 3,4 \quad \cancel{b^2} - 3b = \cancel{b^2} - 10b + 24$$

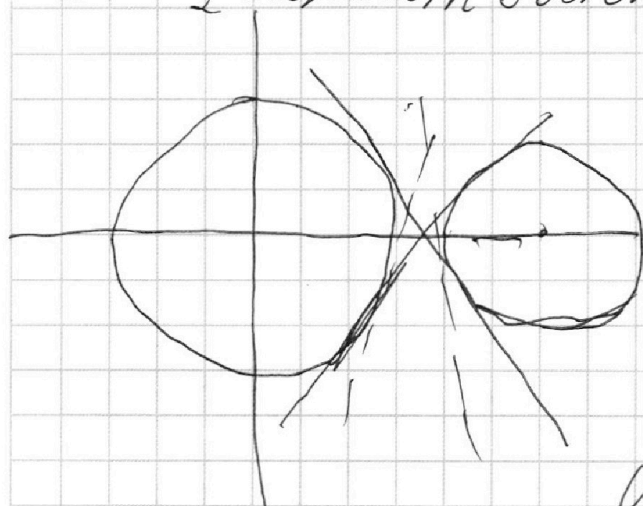
$$7b = 24; b = \frac{24}{7}; 9k^2 - b^2 = 9;$$

$$9k^2 - 9 = b^2 = \frac{576}{49} \text{ или } \left(\frac{24}{7}\right)^2 : 9$$

$$k^2 = \frac{24^2}{49} + 1$$

$$k = \sqrt{\frac{576}{49} + 1}, \text{ а теперь заметим,}$$

что  $0 < x + 2y - 3b \Rightarrow y = -\frac{a}{2} + 1,5b$ ,  
и  $\frac{a}{2}$  лежит в интервале  $[-k; k]$ , т.к.



если угол наклона  
больше  $k$ , то  
даже проводя  
касательную с  
таким наклоном,

она не будет пересекать

вторую окружность:

Ответ:  $[-2k; 2k]$ , где  $k = \sqrt{\frac{576}{49} + 1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 4k^2b^2 - 4k^2b^2 + 16k^2 - 4b^2 + 16 = 0$$

$$16k^2 - 4b^2 + 16 = 0; 4k^2 - b^2 + 4 = 0$$

$$(x-b)^2 + kx + b$$

$$D = 4k^2b^2 - 4k^2b^2 + 36k^2 - 4b^2 + 36 = 0$$

$$9k^2 - b^2 + 9 = 0$$

$$(x-b)^2 + (kx+b)^2 = 4$$

$$x^2 - 12x + 36 + k^2x^2 + 2kbx + b^2 = 4$$

$$x^2(k^2+1) + x(2kb-12) + b^2+32 = 0$$

$$D = (2kb-12)^2 - 4(k^2+1)(b^2+32) =$$

$$= 4k^2b^2 - 48kb + 144 - 4k^2b - 128k^2 -$$

$$- 4b^2 - 128 = 0$$

$$128k^2 + 4b^2 + 48kb - 16 = 0$$

$$9k^2 - b^2 + 9 = 0$$

$$32k^2 + b^2 + 12kb - 4 = 0$$

$$b^2 = 9k^2 + 9, \text{ причём}$$

в левом можно найти, на графике

это координаты пересечения

этих кривых:



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



## Задача 5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log x^2 \cdot 243 - 8$$

$$\log_3 x = a \Rightarrow \log_x 3 = \frac{1}{a}; \log x^2 \cdot 243 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a}.$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{2,5}{a} - 8 \quad | \cdot a$$

$$a^5 + 8a + 3,5 = 0.$$

$$5y = t \Rightarrow \log_3^4 t + 2 \log_t 3 = \log_t (3^{11}) - 8$$

$$\log_3 t = b \Rightarrow b^5 - 3,5 + 8b = 0$$

$$\begin{cases} a^5 + 8a + 3,5 = 0 \\ b^5 + 8b - 3,5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^5 + 8a = -3,5 \\ b^5 + 8b = 3,5. \end{cases}$$

$f(x) = x^5 + 8x$  — нечётная

функция,  $f'(x) = 5x^4 + 8 > 0$  и

возрастающая, значит:

$a^5 + 8a = -3,5$ , то при  $b = -a$ ;  $b^5 + 8b = 3,5$ ,

причём из возрастания такое  
в точности, значит  $a = -b$ .

$$a = \log_3 x; b = \log_3 t$$

$$\log_3 x = -\log_3 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 x + \log_3 t = 0 \Rightarrow \log(xt) = 0 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow xt=1 \Rightarrow 5xy=1; xy=0,2$ , что  
достигается независимо  
на ОДЗ, например так  $x=3;$   
 $t=\frac{1}{3}; y=\frac{1}{15}$ .  
Ответ:  $0,2$

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

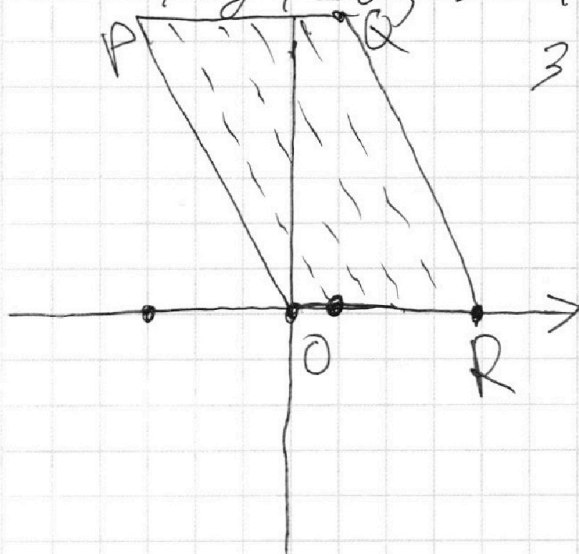
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6

Попробуем найти сколько клеток  
в параллелограмме удовлетворяет

$$3x_1 + y_1 = 0; \quad 3x_1 + y_1 = 1 \dots$$



$$3x_1 + y_1 = a; \quad y_1 = 3x_1 + a,$$

это прямые

PO имеет вид

$$y = -3x_1, \text{ значит}$$

внутри есть прямые

$$y = -3x_1; \quad y = -3x_1 + 1;$$

$$; \quad y = -3x_1 + 2 \dots \quad y = -3x_1 + 20, \dots -3x_1 + 60$$

$$PO \rightarrow y = -3x_1; \quad a \quad QR = -3x_1 + 20.$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33;$$

$$3x_2 + y_2 = 33 + 3x_1 + y_1, \text{ то есть}$$

значения  $3x_2 + y_2$  принимаются

значения от 0 до 60; так же

как  $x_1 + y_1$ , применим:  $y = -3x_1 + a$ ,

если  $a = 0$ , то значения  $y$  нас будет

4 значений



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☒

7  
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит, из этого следует, что  
решения у 6  $[0; 42]$ , что очевидно  
из графика:  $y = -3x_1 + a$ ; если  
 $a \in \mathbb{Z}_3$ , то решений 15, т.к.  $a = 3k$  и  
 $x_1 = k \Rightarrow y = 0$  и так  $x_1$  на 3  
повышаем как с нуля раз до 42  
и будет 15 решений, а аналогич-  
ным методом; если  $a \in 1$ , то  
 $y$  это 1, 4... 40 - их 14 и если  
 $a \in 2$ , то их 14, значит  
 $a = 0 \Rightarrow 15$ ;  $a = 1 \Rightarrow 14$ ;  $a = 2 \Rightarrow 14$ ...  
 $a = 60 \Rightarrow 15$  и у нас образуются  
пары  $(a = 0; a = 33)$ ;  $(a = 1; 34)$  ...  $(27; 60)$   
это пары при которых  
 $3x_2 + y_2 = 3 + 3x_1 + y_1$ , всего пар  
28; 10, при которых  $a$  кратно  
3 и 18 при которых не кратно,  
тогда если  $a = 0$  и  $a = 33$ , то

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Это  $15 \cdot 15 = 225$  пар, если  $a=1$  и  
 $a=34$ , то это  $14 \cdot 14 = 196$  пар и всего  
пар  $10 \cdot 225 + 18 \cdot 196$ , всего  
пар с обоими  $a$  кратными  
трём, и по 10 и в каждой по 225  
решений, а в не кратных 3  
и будет 18 пар  $a$  и  $a+33$ , и в каж-  
дой 196 способов выбрать  
Ответ:  $10 \cdot 225 + 18 \cdot 196$ .

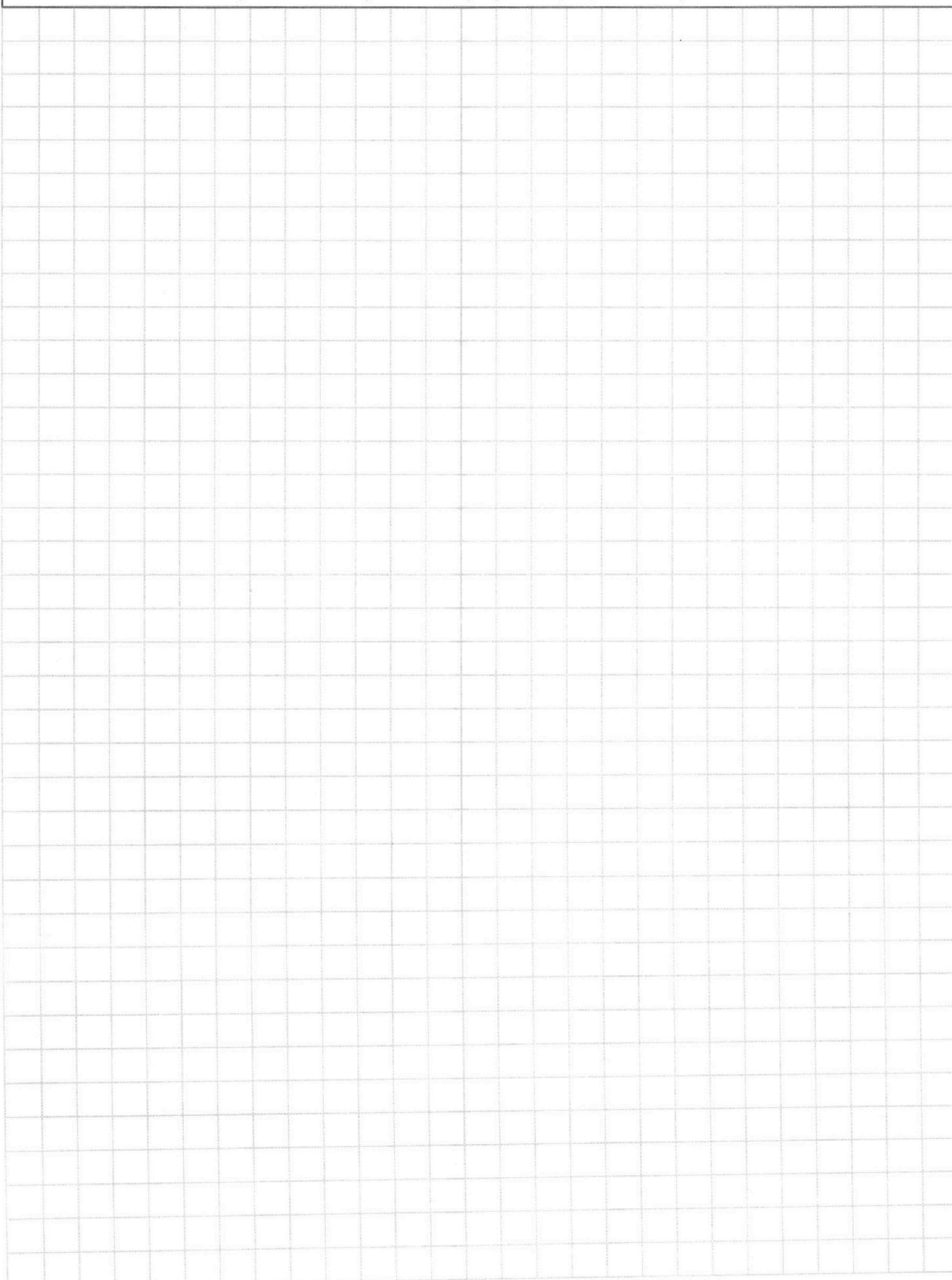


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







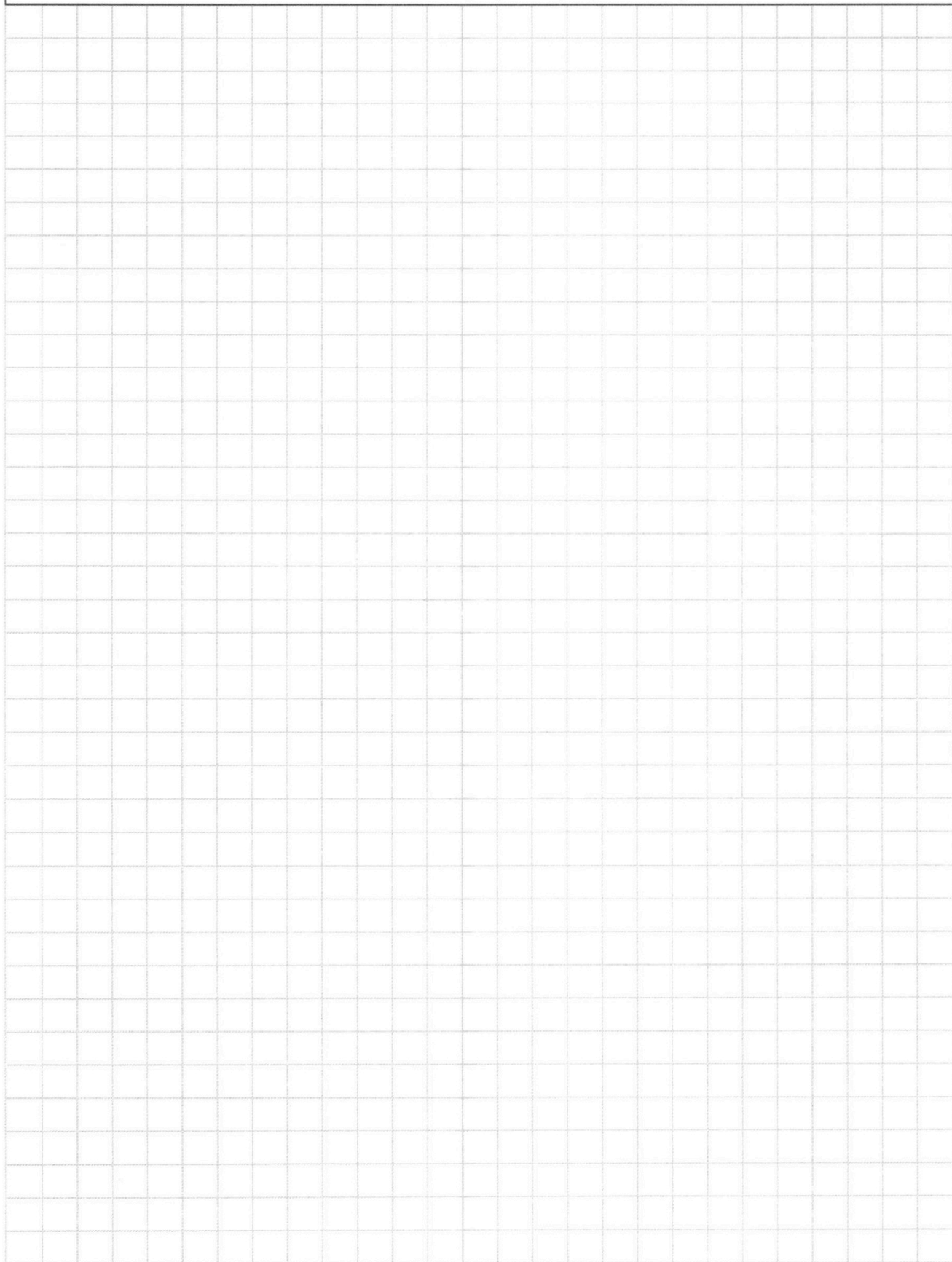
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



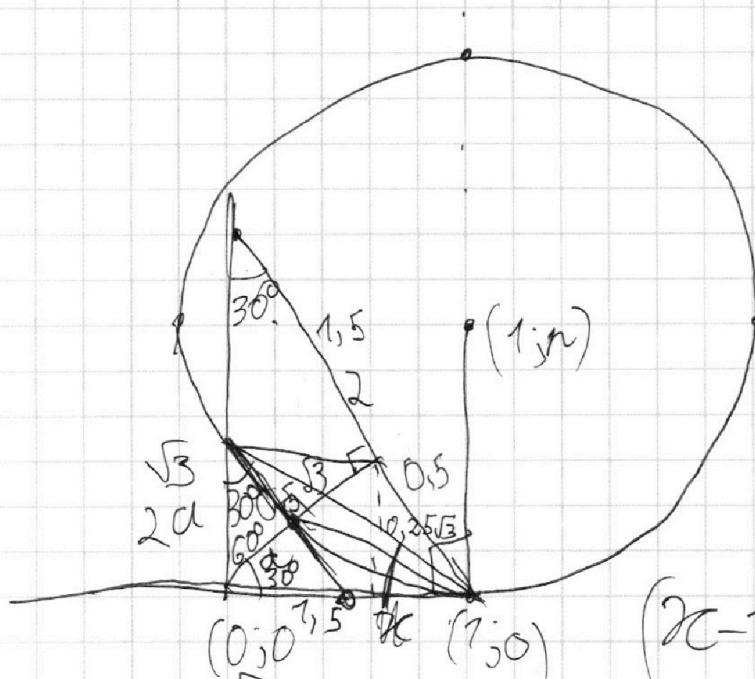
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{2}a : \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad x = 0$$

$$\frac{a}{0.5\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

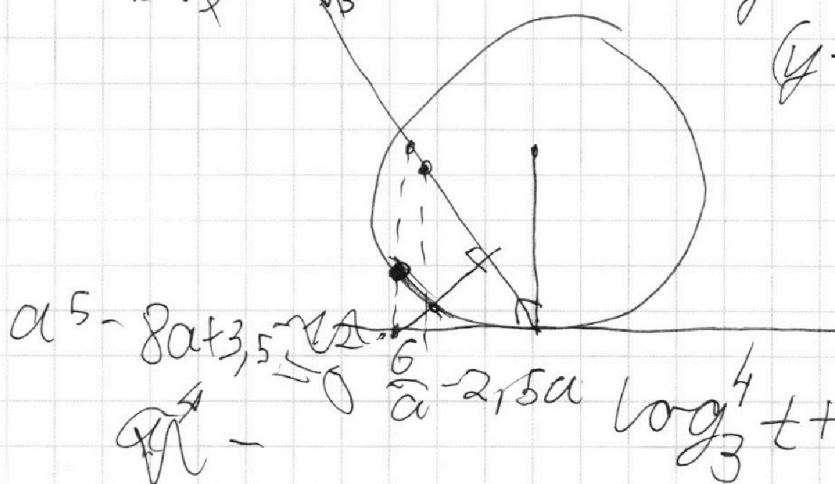
$$(x-1)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

$$1 + y^2 - 2ry + r^2 = r^2$$

$$y^2 - 2ry + 1 = 0$$

$$(y-r)^2$$

$$5y = t$$



$$a^5 - 8a + 3.5 = 0$$

$$a^4 - 8a + 3.5 = 0$$

$$\frac{6}{a} - 2.5a$$

$$\log_3^4 t + 2 \log t + 3 = \log_t^{3.5}$$

$$\log_{\frac{a}{3}} a = a$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a} - 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 18$$

$$28 + 14$$

W

$$a^2 b^2 c^2 : 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3$$

$$2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$$

$$a + b = 9$$

$$a + b + c = 24$$

$$a + c =$$

$$a + b + c = 48 - 24 = 24$$

$$b + c = 14$$

$$c = 15 \quad b = -1$$

$$a + c = 19$$

$$a = 10$$

$$b - a \quad a - b = 5$$

$$a + b \geq 9$$

$$b = 2$$

$$a = 2^7 \cdot 3^7$$

$$a + b = 10$$

$$a = 4 \quad c = 12$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$b + c = 14$$

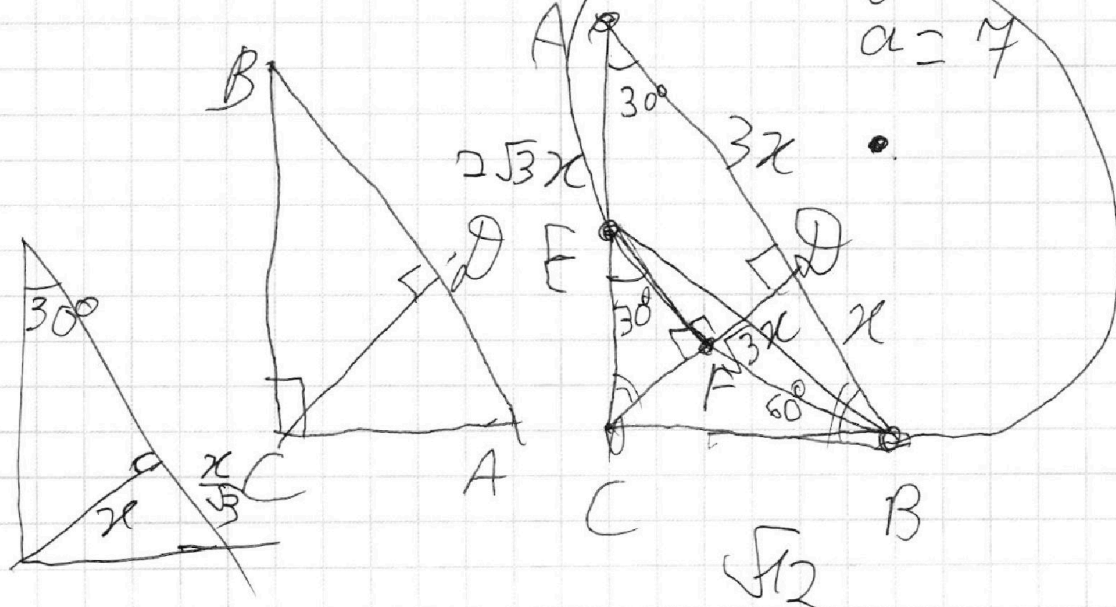
$$24$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11}$$

$$a + c = 18$$

$$b = 3 \quad c = 11$$

$$a = 7$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} D &= 12n^2 + 24\sqrt{3}n + 36 - 48 = \\ &= 12(n^2 + 2\sqrt{3}n - 1) \end{aligned}$$

$$x = \frac{6 + 2\sqrt{3} \pm \sqrt{12(n^2 + 2\sqrt{3}n - 1)}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= \frac{\sqrt{3}}{3}x = -6 \sqrt{n^2 + 2\sqrt{3}n - 1} + 6\sqrt{3} + 6 = \\ &= \sqrt{n^2 + 2\sqrt{3}n} + \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

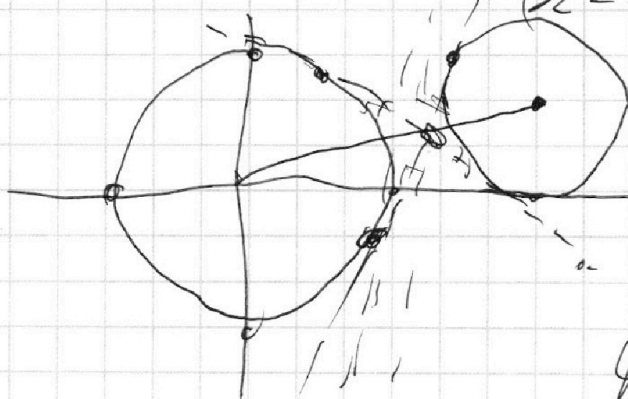
$$\sin x = \sqrt{\cos}$$

$$ax + 2y - 36 = 0$$

$$\sqrt{3} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\cos 3x$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$



$$5 \arcsin(\cos x) = x \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$y = \frac{a}{2}x + \frac{36}{2}$$

$$(-4, 12) \quad (6, 42)$$

$$x_1 y_1$$

$$3x_1 - y_1 = 33 + 3x_2 - y_2$$

$$1 -$$

$$\sin x = t$$

$$t = \arcsin x$$

$$\arcsin t = x$$

$$(0, 0) \quad (20, 0)$$

$$(2)$$



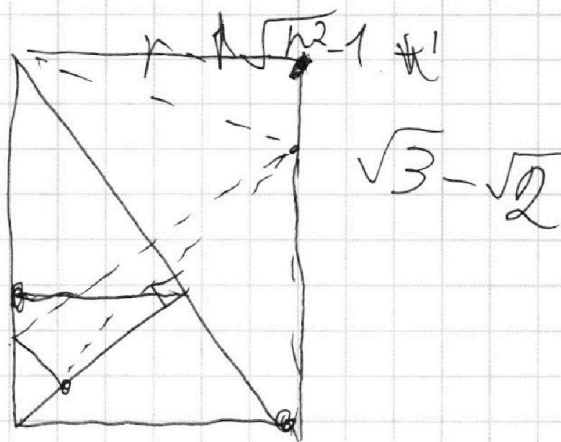
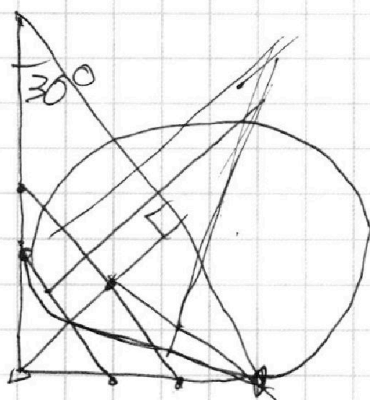
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

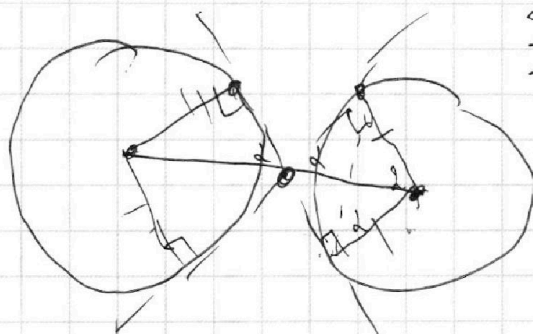
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x_1 - y_1 = 0$$

$$x + \frac{\pi}{2} = 5(x - \frac{\pi}{2})$$



$$3\pi = 4x$$

$$424$$

$$14$$

$$\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{x}{4}$$