



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Ко $ac: 5^{28}$ по условию ~~$2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^{26}$~~

значит $abc: 5^{28}$

Так как 2, 3, 5 - взаимно простые числа,

$$abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

значит $abc \neq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$, т.к. a, b, c натуральные

Пример, когда получается равенство:

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$\text{Тогда } abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4$$

$$\text{и } ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}; 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}; 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ca = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}; 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\text{ответ. } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$ ① Пусть α_1 - максимальная степень двойки, на
 $bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$ ② которую делится a ;
 $ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$ ③ α_2 - макс. степень 3, на которую делится a
 α_3 - макс. степень 5, на которую делится a

Аналогично введем $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ для b и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ для c .

$ab: 2^{\alpha_1 + \beta_1}$; значит $\alpha_1 + \beta_1 \geq 6$

$ab \nmid 2^{\alpha_1 + \beta_1 + 1}$ - т.к. α_1, β_1 - максимальные степени 2, входящие в a и b

Аналогично получаем:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \end{cases}$$

Тогда ~~$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$~~ сумма этих неравенств:

$$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 36$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$$

Значит $abc: 2^{18}$

Теперь для $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 & \text{из ①} \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25 & \text{из ③} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 & \text{из ②} \end{cases}$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{13 + 25 + 21}{2} = \frac{59}{2} = 29,5$$

т.к. $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$ - число целое, $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$ значит $abc: 3^{30}$

и для $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$:

$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 & \text{из ①} \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 & \text{из ②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28 & \text{из ③} \end{cases}$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq \frac{11 + 13 + 28}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

значит $abc: 5^{26}$

~~Так как 2, 3, 5 - взаимно простые,~~

~~$$abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$~~

~~$$abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$~~

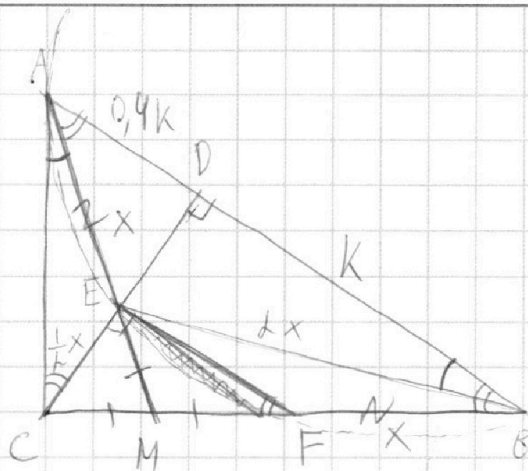
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle AEF = 180^\circ - \angle ABC - \text{из } \triangle AEFB$$

$$\angle EAB = 180^\circ - \angle AEF - \text{т.к. } AB \parallel EF \text{ (секундары } \angle E)$$

$$\angle EAB = \angle ABC$$

Также

$$\angle ACD = \angle ABC, \text{ т.к. } \angle A - \text{общий}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC; \angle D = \angle ACB = 30^\circ$$

$$\angle CAE = \angle ABE = \frac{1}{2} \angle A, \text{ т.к. } \angle ABE \text{ оп. на } \text{хорду } AE;$$

AC - касательная по условию.

$$\text{Каждо } \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{CD \cdot AD / 2}{CE \cdot EF / 2} = \frac{CD \cdot AD}{CE \cdot EF} = \frac{AD \cdot DB}{EF^2},$$

$$\triangle AEC \sim \triangle AEB, \text{ т.к. } \angle CAE = \angle EBA; \\ \angle ACE = \angle BAE.$$

$$\text{т.к. } \frac{CD}{CE} = \frac{DB}{EF} \\ \text{из подобия } \triangle CDB \text{ и } \triangle CEF (\angle D = \angle E = 30^\circ; \\ \angle F = \angle B \text{ - из паралл.)}$$

$$\text{Пусть } AE = x.$$

$$\text{Тогда } BE = 2x; EC = \frac{1}{2}x.$$

$$FB = x, \text{ т.к. } ABFE \text{ - параллелограмм}$$

$$\angle CAM = 90^\circ - \angle B, \text{ т.к. } \angle CAB + \angle CBA = \angle CAM + 2\beta \\ (\text{из } \beta = \angle CBA)$$

$$\text{Тогда в } \triangle AED:$$

$$\sin \beta = \frac{ED}{x}$$

$$\cos \beta = \frac{0,4k}{x}$$

$$\sin(30^\circ - \beta) = \frac{ED}{2x} \text{ из } \cos 2\beta = \frac{ED}{2x}$$

$$\cos(30^\circ - \beta) = \frac{k}{2x} \text{ из } \sin 2\beta = \frac{k}{2x}$$

$$2 \sin \beta = \frac{\sin 2\beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{k}{2x}}{\frac{0,4k}{x}} = \frac{1}{0,4} = 2,5 \quad \sin \beta = 1,25$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$EF = 1,4k - 2 \cdot 0,4k = 0,6k$ (т.к. если опустить высоту в п.б.
трапеции $AEDB$, то отсекать от основания по $0,4k$

$$\frac{AD \cdot DB}{EF^2} = \frac{0,4k \cdot k}{0,6 \cdot 0,6k^2} = \frac{0,4}{0,36} = \frac{10}{9}$$

Ответ: $\frac{10}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

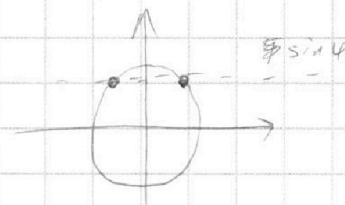
$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10} \quad \text{возьмем } \cos \text{ от обеих частей}$$

$$(1) \quad \Downarrow \\ \sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{5\pi - 9\pi + 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{-4\pi + 2x}{10}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{-2\pi + x}{5}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{-2\pi + x}{5}\right)$$



$$(*) \quad \begin{cases} x = \frac{-2\pi + x}{5} + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{-2\pi + x}{5} + 2\pi n & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Надо, чтобы $\frac{9\pi - 2x}{10}$ лежало от 0 до π включительно,
чтобы переход (1) был равносильным (т.е. возьмем $\arccos$
от $\cos \frac{9\pi - 2x}{10}$ мы получим $\frac{9\pi - 2x}{10}$)

$$9\pi - 2x \geq 0$$

$$x \leq \frac{9}{2}\pi$$

$$\frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi$$

$$-2x \leq \pi$$

$$x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9}{2}\pi\right]$$

Вернемся к системе (*)

$$\begin{cases} 5x = -2\pi + x + 10\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 5x = 5\pi + 2\pi - x + 10\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = -2\pi + x + 10\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 5x = 5\pi + 2\pi - x + 10\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(Продолжение)

$$\begin{cases} 4x = -2\pi + 10\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 6x = 7\pi + 10\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Набор корней:

I серия:

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \leq \frac{9\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$-1 \leq -1 + 5k \leq 9$$

$$0 \leq 5k \leq 10$$

$$k = 0; 1; 2$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; 2\pi; \frac{9\pi}{2}$$

II серия:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n \leq \frac{9\pi}{2} \quad | \cdot \frac{6}{\pi}$$

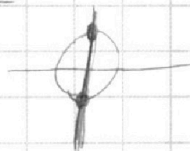
$$-3 \leq 7 + 10n \leq 27$$

$$-10 \leq 10n \leq 20$$

$$n = -1; 0; 1; 2$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$$

Корни $-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}$ являются в обеих сериях, т.к. лежат на оси симметрии



Ответ. $-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найдём коэффициент при общей внутренней касательной к окружностям. (коэффициенты равны $-k$ и k из симметрии отн. Oy)

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 = 81$$

для этого радиус одной окр-сти увеличим на 2, а другую (меньшую) сожмём до точки при этом касательная из этой точки к новой окр-сти параллельна исходной касательной

$$\begin{cases} y = kx - 9 \\ x^2 + y^2 = 49 \end{cases} \text{ — одно решение}$$

$$x^2 = 49 - (kx - 9)^2$$

$$x^2 = 49 - k^2 x^2 + 18kx - 81$$

$$(k^2 + 1)x^2 - 18kx + 32 = 0$$

$D = 0$, т.к. одно решение

$$324k^2 - 4 \cdot 32(k^2 + 1) = 0$$

$$324k^2 - 4 \cdot 32(k^2 + 1) = 0 \quad | : 4$$

$$81k^2 - 32k^2 - 32 = 0$$

$$49k^2 = 32$$

$$k = \pm \frac{4}{7} \sqrt{2}$$

Ответ $k \in \left(-\frac{21\sqrt{2}}{20}; \frac{21\sqrt{2}}{20} \right)$

при $k \in$

$$\text{при } k \in \left[-\frac{4}{7}\sqrt{2}; \frac{4}{7}\sqrt{2} \right] \text{ — касательная или не имеет общ. точек с окр-стью}$$

$$-\frac{5}{6a} \in \left[-\frac{4}{7}\sqrt{2}; \frac{4}{7}\sqrt{2} \right]$$

$$-\frac{4}{7}\sqrt{2} \leq -\frac{5}{6a} \leq \frac{4}{7}\sqrt{2} \quad | \cdot -\frac{5}{6}$$

$$-\frac{20}{42}\sqrt{2} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{20}{42}\sqrt{2} \quad \text{возможное решение}$$

касательная
при $a \in \left(-\infty; -\frac{21\sqrt{2}}{20} \right] \cup \left[\frac{21\sqrt{2}}{20}; +\infty \right)$
 $\frac{1}{\frac{21\sqrt{2}}{20}} = \frac{20}{21\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{21 \cdot 2} = \frac{20\sqrt{2}}{42}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

Поработаем со 2 строчкой:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5^2 \\ x^2+y^2+18y+81-4=0 \end{cases} \quad - \text{ эквивалентно 2 строчке}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5^2 & - \text{ окр-сть с центром в } (0;0) \text{ радиуса } 5 \\ x^2+(y+9)^2=2^2 & - \text{ окр-сть с центром в } (0;-9) \text{ радиуса } 2 \end{cases}$$

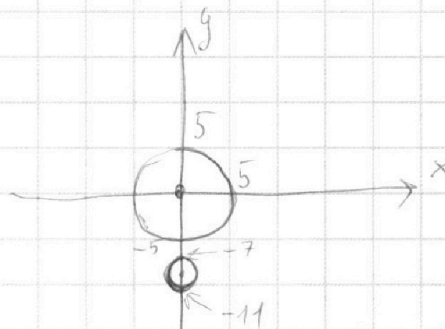
Теперь 1 строчка:

1) $a=0$

$$5x-b=0$$

$$x = \frac{b}{5} \quad \text{при } b=0 \text{ пересекает}$$

каждую окр-сть в 2 точках



2) $a \neq 0$ - поделим на a

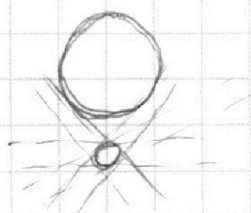
$$\frac{5x}{a} + 6y - \frac{b}{a} = 0$$

$$y = -\frac{5}{6a}x - \frac{b}{6a} \quad - \text{ прямая}$$

(изменяем коэф-ты в
множителе сдвигать вверх
или вниз)

Посмотрим при каких коэф-тах при x , если проведем лучок
прямых с числами коэф-том через одну окружность, этот

лучок не заденет, или будет касаться другой окр-сти:



какие достигая, когда коэф-т прямой
равен коэф-ту одной из окружностей
касательных к окр-ностям.

лучок не заденет ~~окр-сть~~ большую окр-сть,
когда коэф-т лежит от $-K$ до K , (K - коэф-т кас.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} \frac{1}{11^2} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = \frac{1}{3} \cdot (-2) \log_{11} 11 - 5$$

$$\log_{11} x = t$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t} - 5 \quad | \cdot t$$

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0 \quad \text{— монотонная функция, ед. решение (} t^5 \text{ и } 5t \text{ возрастают)}$$

$$\log_{11}^4 \left(\frac{y}{2} \right) + \frac{1}{\log_{11} \left(\frac{y}{2} \right)} = \log_{11} \left(\frac{y}{2} \right)^3 (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11}^4 \left(\frac{y}{2} \right) + \frac{1}{\log_{11} \left(\frac{y}{2} \right)} = \frac{1}{3} \cdot (-13) \cdot \frac{1}{\log_{11} \left(\frac{y}{2} \right)} - 5$$

$$m = \log_{11} \left(\frac{y}{2} \right)$$

$$m^4 + \frac{1}{m} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{m} - 5 \quad | \cdot m$$

$$m^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5m$$

$$m^5 + 5m + \frac{16}{3} = 0$$

m^5 и $5m$ возрастают $\Rightarrow$
функция строго монотонна $\Rightarrow$
ед. решение

$$m_0 = -t_0, \text{ где } m_0, t_0 - \text{решения}$$

значит

$$\log_{11} x = -\log_{11} y$$

$$\log_{11} xy = \log_{11} x + \log_{11} y = 0$$

$$\text{значит } xy = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{из} \\ \text{монотонности} \\ \log_{11} x \end{array} \right)$$

ответ. 1.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит $AB = 14$.

$$AB = \sqrt{18^2 + 14^2} = \sqrt{324 + 196} = \sqrt{520} \text{ — по Т. Пифагора для } \triangle AHB.$$

$$AC = \sqrt{18^2 + 34^2} = \sqrt{324 + 1156} = \sqrt{1480}$$

$$AB = 2\sqrt{130}$$

$$AC = 2\sqrt{370}$$

Найдём B_1B и C_1C . Для этого заметим, что $MA_1 = A_1B = A_1C = 10$

значит $\angle BMC = 90^\circ$

Тогда можно записать Т. Пифагора для $\triangle C_1MB$ и $\triangle B_1MC$:

$$\begin{cases} MB^2 + C_1M^2 = C_1B^2 \\ B_1M^2 + MC^2 = B_1C^2 \end{cases}$$

$$\text{Обозначим } y = \frac{1}{3} C_1C, \quad C_1B = \frac{AB}{2} = \sqrt{130} \\ x = \frac{1}{3} B_1B \quad ; \quad B_1C = \frac{AC}{2} = \sqrt{370}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 130 \\ x^2 + 4y^2 = 370 \end{cases} \text{ — подет.}$$

$$5(x^2 + y^2) = 500$$

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$\begin{cases} 3x^2 = 30 \\ 3y^2 = 270 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 10 \\ y^2 = 90 \end{cases}$$

$$x = \sqrt{10}, \quad y = 3\sqrt{10} \text{ — т.к. отрезки имеют неотрицат. длину}$$

$$C_1C = 3y = 9\sqrt{10}$$

$$B_1B = 3x = 3\sqrt{10}$$

$$A_1A \cdot B_1B \cdot C_1C = 30 \cdot 9\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 3 \cdot 10^2 = 8100$$

Ответ: 8100.

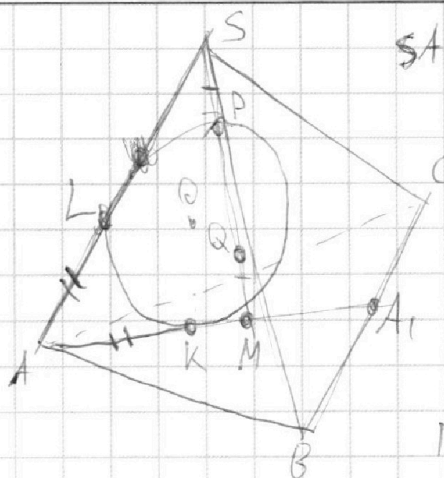
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$SA = BC = 20$$

O - центр окружности Ω

~~Рассмотрим~~

а) $AL = AK$ - как отрезки касательных
из одной точки

Посчитаем степеней точки S отн. окружности Ω :

$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

Посчитаем степеней M отн. Ω :

$$MK^2 = MQ \cdot MP$$

$\uparrow$
MK - кас. по условию

$SP = MQ$ - по условию; $SQ = MP$, т.е.

$$\text{значит } MK^2 = SL^2$$

$$MK = SL$$

~~МК~~

$$AM = AK + MK = AL + SL = AS = 20$$

$$AA_1 = 30, \text{ т.е. } \frac{AM}{AA_1} = 2 - \text{ по св-ву медианы}$$

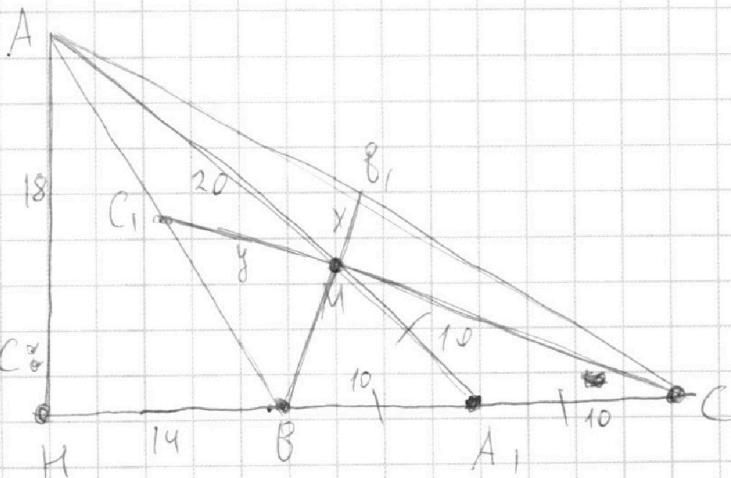
h_A - высота из точки A

$$S_{ABC} = \frac{h_A \cdot BC}{2}$$

$$180 = \frac{h_A \cdot 20}{2}$$

$$h_A = 18$$

Рассмотрим $\triangle ABC$



$$\text{В } \triangle AHA_1 \text{ по т. Пифагора } HA_1 = \sqrt{30^2 - 18^2} = 6\sqrt{5^2 - 3^2} = 24$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

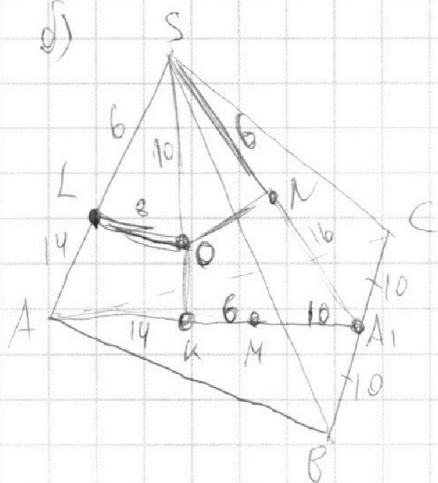
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

9)



$SL = SN$ как отрезки касательных из M

$$SL = 6$$

$$AL = 14$$

$$AK = AL = 14$$

$$KM = 6 \quad \text{т.к.} \quad AM = 20$$

$$SO = \sqrt{SL^2 + LO^2} = 10$$

$$AN = KA_1 = 16 - \text{как отрезки кас.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos(90-2\beta) = \frac{1}{2x}$$

$$\cos \beta = \frac{0,4}{x}$$

$$\sin 2\beta = \frac{1}{2x}$$

$$\sin \beta = \frac{0,2}{x}$$

$$\sin(90-2\beta) = \frac{0,4}{2x}$$

$$2 \sin \beta \cos \beta = \frac{1}{2x}$$

$$2 \sin \beta = \frac{1}{0,4x}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{0,8x}$$

arccos - угол по косинусу

$$\frac{\sin \beta}{\sin(90-2\beta)} = 2$$

$$\frac{\sin 2\beta}{\cos \beta} = \frac{1}{2 \cdot 0,4}$$

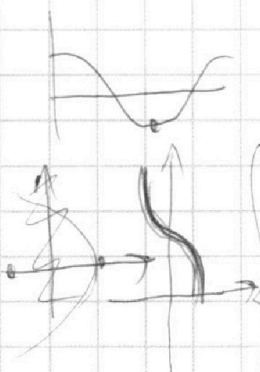
$$2 \sin \beta = \frac{1}{0,4x}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{0,8x}$$

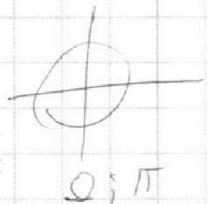
$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{0,4x}$$

$$\frac{7}{6} - \frac{5}{3} = \frac{7-10}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{3} = \frac{17}{6}$$



$$\begin{cases} \sin 2\beta = \frac{1}{2x} \\ \cos \beta = \frac{0,4}{x} \\ \frac{\sin \beta}{\cos 2\beta} = 2 \end{cases}$$



$$0,4 \cdot 0,7$$

$$1 - \frac{1}{28}$$

$$10 \arccos(\sin x) = 8\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{8\pi - 2x}{10}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{8\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9}{10}\pi + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(-\frac{4\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{21} 3 \cdot 121 - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = \frac{1}{3} \cdot 11 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \log_x 11 - 5$$

$$1 - 2 \cdot \frac{1}{0,64x^2} = 2$$

$$\frac{1}{0,8x} = 2 - 2 \cdot \frac{1}{0,64x} \quad | \cdot 2$$

$$2^2 - \frac{2}{0,64} - 0,8 = 0$$

$$2^2 =$$

$$\begin{matrix} 170 \\ 970 \\ 19-? \end{matrix}$$

$$\frac{1}{2} \log_x a = \log_x a$$

$$\log_x a^2 = 2 \log_x a$$

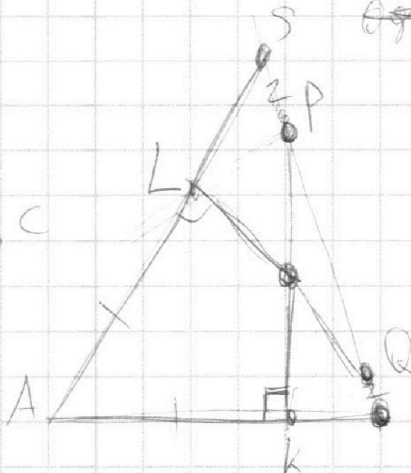
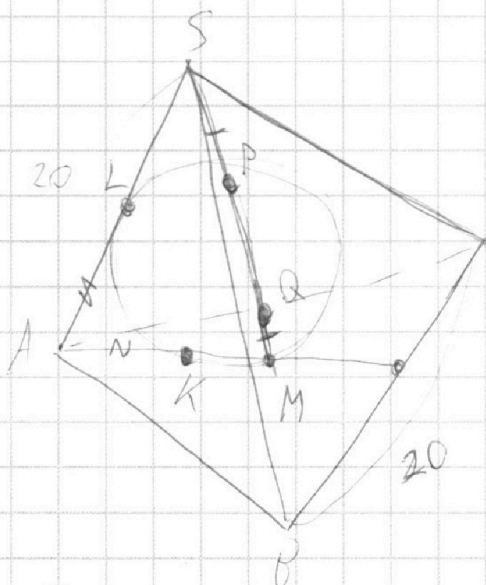
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

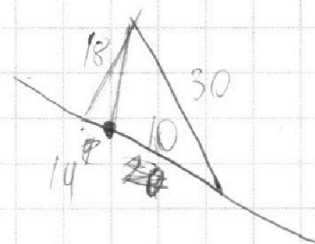
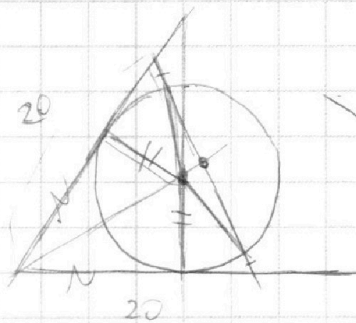


$$S_{ABC} = 180$$

$$SA = BC = 20$$

$$\frac{20 \cdot 18}{2}$$

$$h =$$



$$3 \cdot 6$$

$$3 \cdot 10$$

$$m_{grana} = 30$$

$$h = 18$$

$$6 \cdot 3 \quad 6 \cdot 5$$

$$\sqrt{340}$$

$$\sqrt{186 + 324}$$

$$\sqrt{520}$$

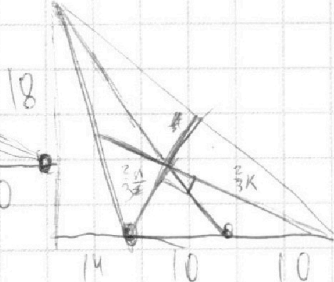
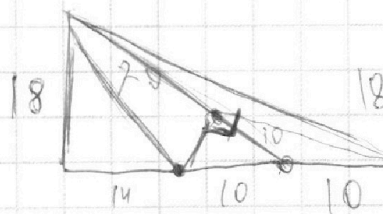
$$AL = AK$$

$$SL \cdot SA = SP \cdot SQ$$

$$\parallel$$

$$MP \cdot MQ =$$

$$MK \cdot MA$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{\cos 2\beta}{\sin \beta} = \frac{\frac{ED}{2x}}{\frac{ED}{x}} = \frac{1}{2}$

$\frac{1 - 2\sin^2 \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{2}$

$\frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{0,64l^2}}{\frac{1}{0,8l}} = \frac{1}{2}$

$1480 =$

$0,8l(1 - \frac{2}{0,64l^2}) = \frac{1}{2}$

$0,8l - \frac{16}{0,64l} = \frac{1}{2} \cdot l$

$0,8l^2 = 1 + \frac{16}{0,64} = \frac{0,1}{0,04}$

$0,8l^2 = 1 + \frac{10}{4}$

$\frac{8}{10} l^2 = \frac{14}{4}$

$l^2 = \frac{140}{32} = \frac{70}{16} = \frac{35}{8}$

$l = \sqrt{\frac{35}{8}}, (l > 0)$

$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$, т.к. β - угол прилежащ. Δ

$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{0,64 \cdot \frac{35}{8}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{0,08 \cdot 35}} =$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{2,8}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{28}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{14}}$

$0,4k = x - \cos \beta$

$x =$

$5x + 6ay - b = 0$

$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y - 77) = 0$

$q^2 + 2 \cdot 8y + 81$

$x^2 + (y + 9)^2 = 4$

$a \neq 0$

$\frac{5}{a}x + 6y - b = 0$

$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6}$

$-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6}$



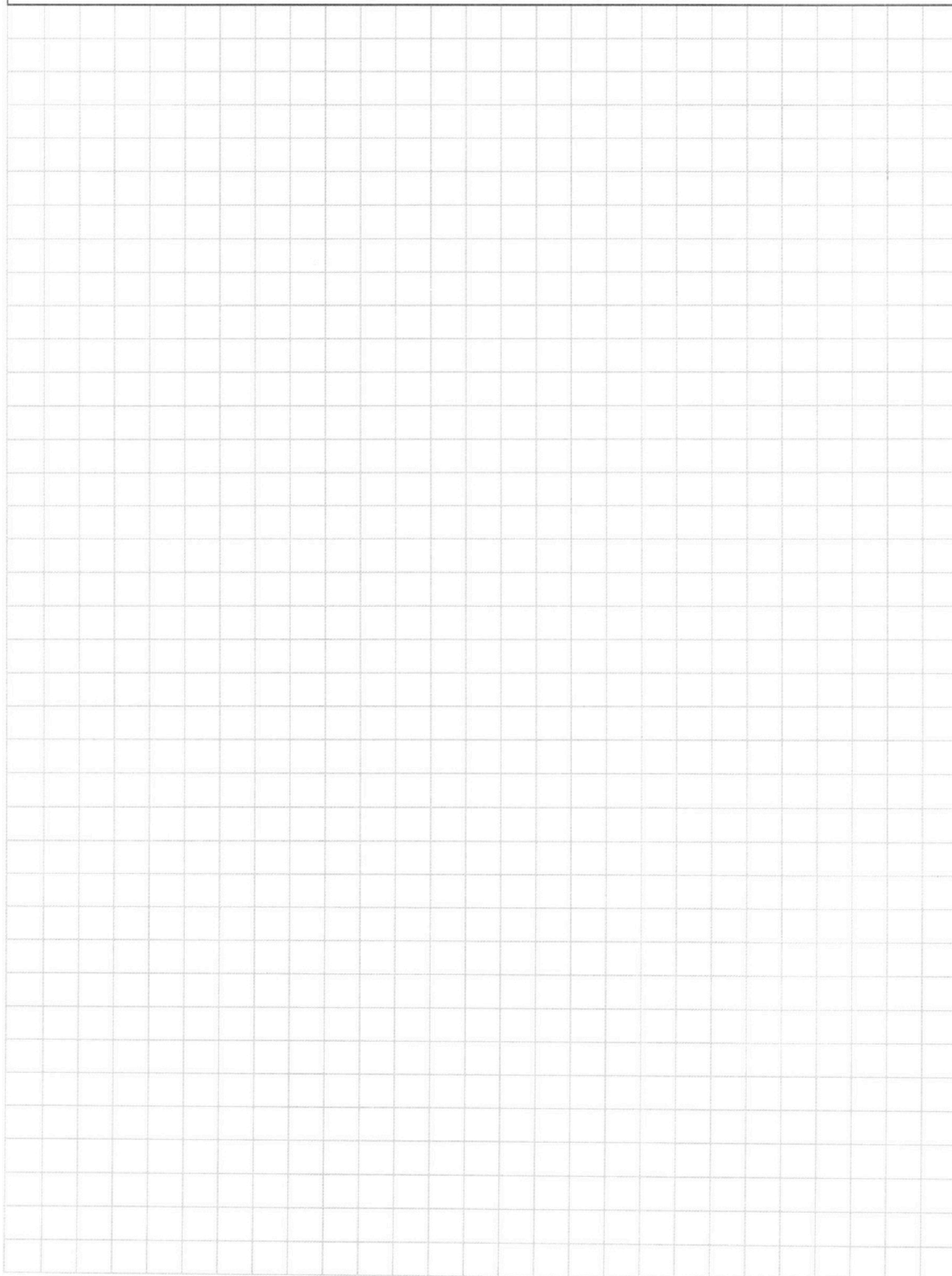
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring geometric diagrams and calculations.

Diagrams:

- Top left: A circle with points A, B, C on its circumference. A line segment connects A and B, passing through C.
- Top right: A circle with points A, B, C on its circumference. A line segment connects A and B, passing through C.
- Middle left: A circle with points A, B, C on its circumference. A line segment connects A and B, passing through C.
- Middle right: A circle with points A, B, C on its circumference. A line segment connects A and B, passing through C.
- Bottom left: A circle with points A, B, C on its circumference. A line segment connects A and B, passing through C.
- Bottom right: A circle with points A, B, C on its circumference. A line segment connects A and B, passing through C.

Equations and Calculations:

- $\log_{11} x + \log_{11} y = \log_{11} xy$
- $\frac{EF}{AD} = \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD}$
- $\frac{AC}{BD} = 1,4$
- $\frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{1}$
- $\frac{y}{y+x} = \frac{EF}{1,4}$
- $\frac{2y}{2y+x} = \frac{EF}{1}$
- $\frac{y}{x} = ?$
- $\frac{y}{y+x} = \frac{EF}{1,4}$
- $\frac{2y}{2y+x} = \frac{EF}{1}$
- $\frac{AC}{BD} = 1,4$
- $\frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{1}$
- $\frac{y}{y+x} = \frac{EF}{1,4}$
- $\frac{2y}{2y+x} = \frac{EF}{1}$
- $\frac{y}{x} = ?$
- $\frac{y}{y+x} = \frac{EF}{1,4}$
- $\frac{2y}{2y+x} = \frac{EF}{1}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^6 \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

н.ч. $abc = ?$

$$abc: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$abc \cdot 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$a: 2$$

$$\begin{cases} x+y=13 \\ y-x=4 \\ 2y=17 \end{cases}$$

$$a = 2^2$$

$$b = 2^4$$

$$c = 2^{12}$$

$$a: 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3}$$

$$b: 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3}$$

$$c: 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3}$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{1}{6t} - 5 \quad \log_6 x = t$$

$$x = 11^t$$

$$6 \leq d_1 + \beta_1$$

$$13 \leq d_2 + \beta_2$$

$$14 \leq \beta_1 + d_1$$

$$25 \leq d_2 + d_2$$

$$16 \leq d_1 + \beta_1$$

$$21 \leq \beta_2 + d_2$$

$$t^5 - 6 + \frac{1}{6} + 5t = 0$$

$$t^5 + 5t - \frac{35}{6} = 0$$

$$t = 18$$

$$\frac{1}{36}$$

$$6t^5 + 30t - 35 = 0$$

$$18 = \frac{6+14+16}{2} \leq d_1 + d_1 + \beta_1$$

$$2, 4, 12$$

$$29 \leq \frac{13+21+25}{2} \leq d_2 + \beta_2 + d_2$$

$$6, 7, 19$$

$$26 = \frac{24+28}{2} \leq d_3 + \beta_3 + d_3$$

$$d_2 + d_2 + \beta_2 = 29$$

$$\beta_2 \leq 14$$

$$\beta_2 \leq 14$$

$$d_2 \leq 16$$

$$46 + 13 = 59$$

$$25 + \beta_2 \leq d_2 + d_2 + \beta_2 = 29$$

$$21 + d_2 \leq d_2 + d_2 + \beta_2 = 25$$

$$30$$

$$d_2 \leq 8$$

$$d_2 + d_2 + \beta_2 = 30$$

$$\leq \leq \leq$$

$$\beta_2 + 25$$

$$d_2 + 21$$

$$d_2 + 13$$

$$\beta_2 \leq 5$$

$$d_2 \leq 9$$

$$d_2 \leq 17$$

$$d_3 + d_3 + \beta_3 = 26$$

$$d_3 + 21$$

$$d_3 + 13$$

$$\beta_3 + 28$$

$$d_3 \leq 5 \quad d_3 \leq 13$$

$$5, 9, 17$$

$$31$$

$$4, 9, 17$$

$$\beta_2 \leq d_2$$