



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.

По условию: $ab : 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow ab = 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot k$

$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{16} \Rightarrow bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{16} \cdot m$

$ac : 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} \Rightarrow ac = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} \cdot n ; m, n, k \in \mathbb{N}$

Рассмотрим величину $ab \cdot bc \cdot ac$:

$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{50} \cdot m \cdot n \cdot k$

$(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{50} \cdot m \cdot n \cdot k$; обе части натуральные $\Rightarrow$
можем извлечь корни

$abc = \sqrt{2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{50} \cdot m \cdot n \cdot k}$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{25} \cdot \sqrt{3 \cdot m \cdot n \cdot k}$

$a \cdot b \cdot c \in \mathbb{N} \Rightarrow$ произведение слева тоже натуральное

$\Rightarrow \sqrt{3 \cdot m \cdot n \cdot k} \in \mathbb{N} \Rightarrow 3 \cdot m \cdot n \cdot k$ — это полный квадрат,

* $3 \cdot m \cdot n \cdot k \neq$ при этом квадрат числа, кратного 3-и

(т.к. 3 уже есть). Ближайший такой квадрат —

это 9 $\Rightarrow \sqrt{3 \cdot m \cdot n \cdot k} \geq 3$

$\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{25}$

Вспомогательный пример на $abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{25}$

Пусть $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^7$; $b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7$; $c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{11}$

Тогда $abc = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^7 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7 \cdot 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{11} = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{25}$, а $ab = 2^4 \cdot 3^{12} \cdot 5^{14} : 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$;

$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{16} : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{16}$; $ac = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} : 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} \Rightarrow$ Эта тройка удовлетворяет условию
Order: $2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{25}$

1
□2
☒

3
□

4
□

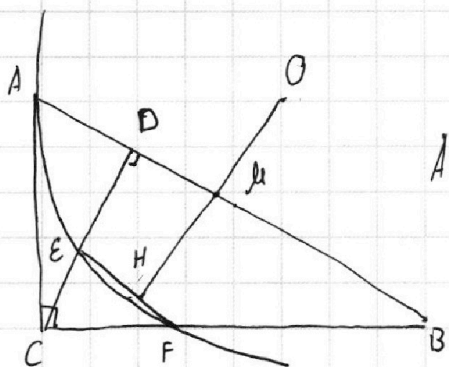
5

6

7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.



Рисунки точки O - центр галлоид окружности.

А также точки M и N — середины AB
и EF соответственно.

1) Врезок из центра окружности к

Среднее это дуги будет ей перпендикулярен, в т.к. будет являться
медианой и высотой в треугольнике равнобедренном с вершинами в
концах дуги и центре, в к-ром 2 отрезка будут равны как радиусы.

2) $\Rightarrow OM \perp AB$; $ON \perp EF$, но $AB \parallel EF \Rightarrow OM \perp EF$, но и точка O можно отложить только одну перпендикуляр на $EF =$
 $\Rightarrow O, M$ и N лежат на одной прямой.

3) Теперь пусть $AB = 13x$, тогда:

$$BD = \frac{13x}{1,3} = 10x \Rightarrow AD = AB - BD = 13x - 10x = 3x$$

$$AM = MB = \frac{1}{2} AB = 6,5 \text{ X} \quad (M - \text{середина } AB)$$

$\Rightarrow \cancel{DU = AD} \quad DU = AU - AD = 6,5x - 3x = 3,5x$ (по условию) $\frac{1}{4}$

1) Рассмотрим четырехугольник $EDMH$, в нем: $\angle EDM = 90^\circ$, $\angle DMH = 90^\circ$

$\angle ENM = 90^\circ$ (из п. 2) $\Rightarrow EDMN$ - прямоугольник $\Rightarrow DM = EN = 3,5x$.

5) H -сережина $EF \Rightarrow EF = 2EK = 4x$.

6) Высота ^{на поверхности}
отсекает ~~отсека'~~ отсекает гидрографическую трассировку,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

подобных между собой (а также ~~исходя из~~) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle CBD, k = \frac{CD}{BD},$$

А сама высота равна корню из произведения проекций катетов

$$\Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{AD \cdot BD}}{BD}$$

8) Площадь подобных относится как квадрат коэфф. пропорциональности

$$\Rightarrow S_{ACD} : S_{CBD} = k^2 = \frac{AD \cdot BD}{BD^2} = \frac{AD}{BD} = \frac{3x}{10x} = \frac{3}{10}$$

9) Важно заметить, что т.к. $\angle EFC = \angle DBC$ как соответственные

при $AB \parallel EF$ и секущей BC , то $\triangle EFC \sim \triangle CBD$ по 2-4

углы (у них ~~еще~~ общий угол DCB) $\Rightarrow k = \frac{EF}{DB} = \frac{2x}{10x} = \frac{1}{5}$

10) А ^{из} площади относятся как $k^2 = \frac{1^2}{5^2} = \frac{1}{25} = \frac{S_{CEF}}{S_{CBD}} \Rightarrow \frac{S_{CBD}}{S_{CEF}} = \frac{100}{1}$

11) из п. 8 и 10 $\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CBD}} = \frac{S_{CBD}}{S_{CEF}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{100}{1} = \frac{30}{1}$

Ответ: $\frac{30}{1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x, \text{ воспользуемся формулой приведения:}$$

$$5 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x, \text{ теперь } \Rightarrow \text{определяем арккосинуса} \Rightarrow$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Подставим $x = \frac{\pi}{6}$ в исходное уравнение, чтобы убедиться,
что решение подходит:

$$5 \arccos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = 5 \cdot \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{А } \frac{3\pi}{2} + x = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi + \pi}{6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 5 \arccos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ подходит и это}$$

единственный корень, так как мы рассуждали равносильными
преобразованиями

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4.

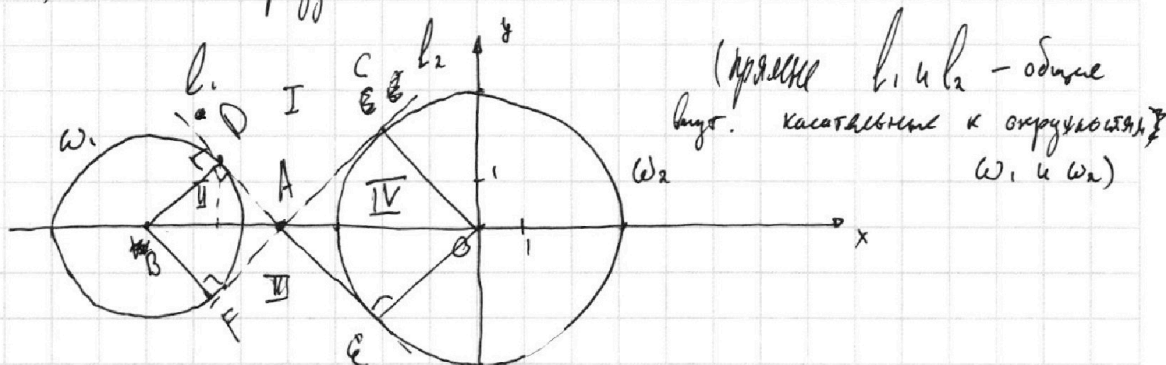
$$\begin{cases} x+3ay-4b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$$

, оба множителя равносильны на $\mathbb{R}^2$

→ эта система равносильна следующему:

$$\begin{cases} x+3ay-4b=0 \\ x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases} = \begin{cases} x+3ay-4b=0 & (1) \\ (x+7)^2+y^2=4 & (2) \\ x^2+y^2=9 & (3) \end{cases}$$

Уравнения (2) и (3) задают окружности на Oxy с в. $(-7;0)$
и $(0;0)$ и радиусами 2 и 3 соот.:



А урав (1) задаёт прямую $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{4b}{3a}$. Заметим, что возникает
такая же связь по Oy . ⇒ Пусть уравнения (1) задавало прямую l .
Сформулируем условие в том, чтобы l проходила через Γ , пересекла
 l_1 и l_2 . Если l совпадает с l_1 или l_2 , то решений максимум
2 точки (если $l=l_1$, то окруж. Γ , то l не пересекает ω_1 , а если
окруж. Γ то не пересекает ω_2 ; аналогично если $l=l_2$)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Если l касается Γ в I и III, то пересечений уже не может быть 2~~

Заметим, что если пересечений ровно 4 ($\Rightarrow$ 4 касательных окружностей и прямой), то прямая обязана касаться в II и IV, и возможно в I или III, но не в I и III одновременно.

$\Rightarrow$ чтобы она касалась в II и IV, необходимо чтобы её угол наклона был с наклоном отрезка OB был меньше чем у l_2 и больше чем у l_1 . Для этого можно выбрать наклон l_1 и l_2

~~$$l_1: Ax + By + C = 0$$~~

Тогда т.к. l кас., должны выполняться следующие равенства: для l_1 и l_2

~~$$l_2 \text{ и } l_1: \frac{|A \cdot (-4) + B \cdot 0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2$$~~

~~$$\frac{|A \cdot 0 + B \cdot 0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 3 \Rightarrow C = \pm 3\sqrt{A^2 + B^2}$$~~

~~$$\frac{|-4A + 3\sqrt{A^2 + B^2}|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2$$~~

~~$$\frac{|-4A - 3\sqrt{A^2 + B^2}|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2$$~~

Но если l проходит через точку A , которая лежит OB в отношении деления (в ту же сторону) $\Rightarrow OA = \frac{3}{5}|OB| = \frac{21}{5}$

~~$$\Rightarrow \left(-\frac{21}{5}, 0\right) \in l_1 \Rightarrow -\frac{21}{5}A + C = 0$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Значит~~ l_1 проходит через точку A и D . точка A дана (*)

OB в отношении радиусов (в углу между ADB и AEO)

$$\Rightarrow OA = \frac{3}{5} OB = \frac{21}{5}, AB = \frac{2}{5} OB = \frac{14}{5}$$

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = \frac{196}{25} - 4 = \frac{96}{25}$$

$$AD^2 = (x_d - x_a)^2 + (y_d - y_a)^2$$

(*) OB в отношении радиусов (в углу между ADB и AEO)

$$\Rightarrow AB = \frac{2}{5} \cdot BO = \frac{14}{5}$$

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{96}{25}} = \frac{\sqrt{96}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$$\Rightarrow \tan DAB = \frac{BD}{AD} = \frac{2}{\frac{4\sqrt{6}}{5}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \Rightarrow \tan DAO = -\frac{5}{2\sqrt{6}} = \text{угл наклона } l_1$$

$$\text{Угол наклона } l_2 = \tan \angle BAF = \tan \angle DAB = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{Угол наклона прямой } l = -\frac{1}{3a}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{2\sqrt{6}} < -\frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{5}{2\sqrt{6}} < \frac{1}{3a} < -\frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{15}{2\sqrt{6}} < \frac{1}{a} < -\frac{15}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{2\sqrt{6}}{15} < \frac{15}{2\sqrt{6}} < a < \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{15}{2\sqrt{6}}; \frac{2\sqrt{6}}{15}\right)$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. Воспользовавшись свойствами логарифмов, преобразуйте оба равенства:

1) $\log_3(6x) - 2 \log_{36} 4 = \log_{36} 343 - 4$ 2) $\log_3 y + 6 \log_3 y = \log_3 7^5 - 4$

$\log_3 6x - \frac{2}{\log_3 6x} = \frac{3}{2 \log_3 6x} - 4$

$\log_3 6x - \frac{4}{2 \log_3 6x} + 4 = 0$

$\frac{2 \log_3^5 6x + 4 \cdot 8 \log_3 6x - 4}{2 \log_3 6x} = 0$

Сделаем замену $t = \log_3(6x)$:

$\frac{2t^5 + 8t - 4}{2t} = 0$

, обозначим это выражение за $f(t)$
 $f'(t) = \frac{(2t^5 + 8t - 4)' \cdot 2t - (2t)'(2t^5 + 8t - 4)}{4t^2} = \frac{10t^4 + 10t - 2t^5 - 16t + 4}{4t^2} =$
 $= \frac{-4t^5 + 10t^4 + 14}{4t^2} = \frac{6t^5 + 14}{4t^2}$ при $t > 0$ $f'(t) > 0$

$\Rightarrow f(t)$ возрастает. А при $t < 0$ очевидно решение нет
т.к. $2t^5 + 8t - 4 < 0$

$\Rightarrow$ Единственное решение есть, решение единственно. $t = -$

2) Аналогично получаем что ~~решения~~ y корней, то он единственны

Замечем что если $\log_3 6x = t = \log_3(6x)$ - корень, то

$-\log_3 y = -t$ - корень второе $\Rightarrow \log_3(6x) = -\log_3 y$

$\log_3 6xy = 0 \Rightarrow 6xy = 1 \quad xy = \frac{1}{6}$ Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1
2
□

3
□

4
□

5

6

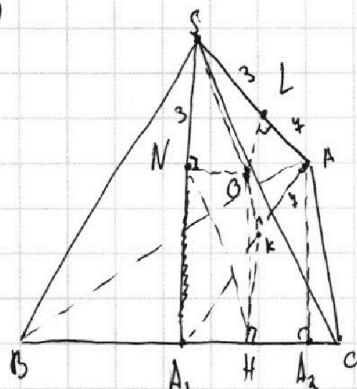
7
☒

7
☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

48)



Решения только 0-го уровня

1) $SN = SL$ как отрезки касательных к окружности

$$\Rightarrow SL = 3 \Rightarrow LA = 4$$

2) Аналогично $AK = AL = 4$

3) Вычислительные ресурсы на BC и K и A

$$2) AA_2 = \frac{2 S_{ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 60}{10} = 12$$

4 continuous tasks H₁, A₂
A task ~~task~~

3) у подобия $\Delta A_1 K H$ и $\Delta A_1 A A_2 \Rightarrow \frac{KH}{AA_2} = \frac{A_1 K}{A_1 A}$
 $\Rightarrow KH = \frac{AA_2 \cdot A_1 K}{A_1 A} = \frac{12 \cdot 8}{15} = \frac{4 \cdot 8}{5} = 6,4$

4) $\angle OAK$ ~~равен~~ $\frac{1}{2} \angle$ точки N, O, K и H лежат на 6 окружности

мощности $\Rightarrow 2 \notin S(BC)A = 2 \angle \text{ОПР}$

$$\angle g \angle OHK = \frac{OK}{HK} = \frac{4}{\frac{4 \cdot 5}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$f_{g2} \angle OAK = \frac{2 f_{g1} \angle OAK}{1 - f_{g1} \angle OAK} = \frac{2 \cdot \frac{5}{8}}{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{39}{64}} = \frac{5 \cdot 16}{4 \cdot 39} = \frac{5 \cdot 16}{2 \cdot 39} = \frac{80}{39}$$

$$\Rightarrow 2\angle CHA = \angle S(BC)A = 2\angle CHK = \text{arc } \frac{AB}{R}$$

Prüfer: $\arctg \frac{80}{88}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - \frac{4}{5}A + 3\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \\ -\frac{21}{5}A + 3\sqrt{A^2+B^2} = 0 \end{array} \right.$$

~~$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - \frac{4}{5}A - 3\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \\ -\frac{21}{5}A - 3\sqrt{A^2+B^2} = 0 \end{array} \right.$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. Восстановите исходные логарифмы, преобразовав уравнение

к виду:

$$1) \log_2^5 6x - \frac{2}{\log_2 6x} = \frac{3}{2 \log_2 6x} - 4$$

$$f(x) = \frac{\log_2^5 6x + 8 \log_2 6x - 4}{\log_2 6x} = 0$$

$$f'(x) = 6 \log_2^5 6x + 14$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_2 6x - 2 \log_2 7 = \log_{26x} 393 - 4 \quad \log_2 y + \frac{6}{\log_2 y} = \frac{5}{2 \log_2 y} - 4$$

$$\log_2 6x - \frac{2}{\log_2 6x} = \frac{3}{2 \log_2 6x} - 4$$

$$\log_2 6x - \frac{2}{\log_2 6x} + 4 = 0$$

$$\log_2 y + \frac{4}{2 \log_2 6xy} + 4 = 0$$

$$t^4 - \frac{4}{2t} + 4 = 0$$

$$\log_2 6x = -\log_2 y$$

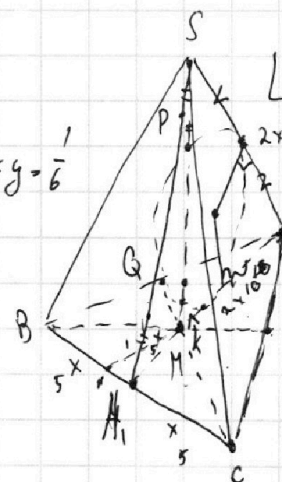
$$t^4 + \frac{4}{2t} + 4 = 0$$

$$\log_2 6x \cdot y = 0$$

$$\frac{2t^5 + 8t + 1}{2t} = 0$$

$$6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

$$\log_2 y - \log_2 6x + \frac{4}{2} \left(\frac{1}{\log_2 6x} + \frac{1}{\log_2 6y} \right) = 0$$



$$\begin{aligned} SP \cdot SQ &= SL^2 \\ MQ \cdot MP &= MK^2 \\ BK \cdot KC &= 20 \\ \frac{3}{4} \cdot 20 \cdot AM &= \\ &= \boxed{3 \cdot 5 \cdot 15} \end{aligned}$$

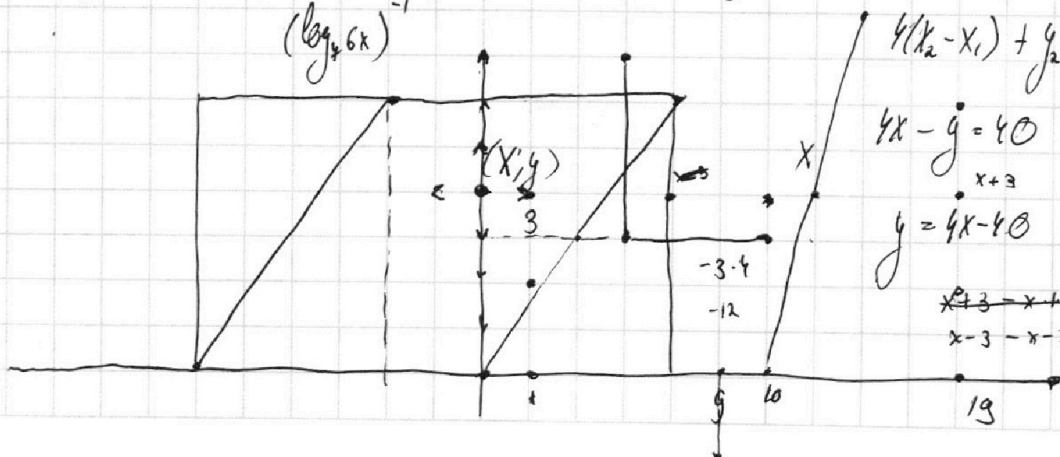
$$(\log_2 y + \log_2 6x)(\log_2 y - \log_2 6x)(\log_2 y + \log_2 6x) \frac{\log_2 6x + \log_2 6y}{\log_2 6x \log_2 6y} + \frac{4}{2} = 0$$

$$(\log_2 y + \log_2 6x) \left(\log_2^3 y + \log_2 y \log_2^2 6x - \log_2^2 y \log_2 6x - \log_2^3 6x \right) + \frac{4}{2 \log_2 6x \log_2 6y} = 0$$

$$2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 2^3 + 4 = 0$$

$$68 : 4 = 17$$

$$\frac{4}{1350} \left(\log_2 6x - \frac{4}{2 \log_2 6x} \right)' = \frac{4 \log^3 6x}{\ln 2 \cdot 6x} + \frac{4}{2} \left(\frac{\ln 2 \cdot 6x}{\log^2 6x} \right) \quad (d-d): 4$$



$$\begin{aligned} 4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 &= 40 \\ 4x - y &= 40 \\ x &= 3 \\ y &= 4x - 40 \\ x+3 &= x+3 \\ x-3 &= x-3 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solutions and diagrams for various problems:

Problem 1 (Top Left): Prime factorization of a, b, c and their product.

$$a \cdot b = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot n \quad bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot m \quad ac = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} \cdot k$$

$$abc = \sqrt{2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{50} \cdot n \cdot m \cdot k} = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{25} \cdot \sqrt{3 \cdot n \cdot m \cdot k}$$

Problem 2 (Top Right): Trigonometric identity and angle calculation.

$$\arccos(\cos(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{6}$$

Problem 3 (Middle Left): Geometry of a circle and a triangle.

Problem 4 (Middle Right): Geometry of a sphere and a triangle.

Problem 5 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 6 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 7 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 8 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 9 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 10 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 11 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 12 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 13 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 14 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 15 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 16 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 17 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 18 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 19 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 20 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 21 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 22 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 23 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 24 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 25 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 26 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 27 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 28 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 29 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 30 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 31 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 32 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 33 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 34 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 35 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 36 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 37 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 38 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 39 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 40 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 41 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 42 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 43 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 44 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 45 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 46 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 47 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 48 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 49 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 50 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 51 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 52 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 53 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 54 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 55 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 56 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 57 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 58 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 59 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 60 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 61 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 62 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 63 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 64 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 65 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 66 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 67 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 68 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 69 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 70 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 71 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 72 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 73 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 74 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 75 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 76 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 77 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 78 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 79 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 80 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 81 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 82 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 83 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 84 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 85 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 86 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 87 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 88 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 89 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 90 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 91 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 92 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 93 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 94 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 95 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 96 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 97 (Bottom Left): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 98 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 99 (Bottom Center): Geometry of a triangle and a circle.

Problem 100 (Bottom Right): Geometry of a triangle and a circle.